



HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année MDCCIX.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique,
pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

MDCCXXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROT.

A PARIS,

Chez { GABRIEL MARTIN, rue Saint Jacques,
à l'Etoile.
FRANÇOIS MONTALANT, Quay des
Augustins.
JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils,
Imprimeur du Roy & de l'Académie
Françoise, rue Saint Jacques, à la Bible
d'or.
HIPPOLYTE-LOUIS GUERIN, rue
Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.



TABLE

POUR

L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

S ur la Pesanteur de l'Atmosphère.	Page 1
Sur des Observations du Barometre faites en des lieux éloignez.	3
Sur la matiere du Feu.	6
Diverses Observations de Physique Generale.	8

ANATOMIE.

Sur le Délire mélancolique.	11
Sur les incisions faites à la Cornée.	13
Sur les Yeux d'Ecrevisses, & sur quelques particularitez des Ecrevisses.	15
Sur la Formation des Coquilles.	17
Diverses Observations Anatomiques.	22

CHIMIE.

Sur le Sublimé corrosif.	34.
Sur les Métaux imparfaits exposez au verre ardent.	36
Sur le Cachou.	38
Sur l'Analyse des Cloportes.	là même.
Sur les Acides minéraux & vegetaux.	40

TABLE

BOTANIQUE.

<i>Sur une Vegetation singuliere.</i>	42
<i>Sur la Circulation de la Sève dans les Plantes.</i>	44
<i>Diverses Observations Botaniques.</i>	50

ALGEBRE.

<i>Sur la Construction des Egalitez.</i>	52
--	----

GEOMETRIE.

<i>Sur des figures égales en surface courbe , & en solidité.</i>	56
<i>Sur une espece imparfaite de Developées.</i>	64
<i>Sur les Courbes de la plus viste descente.</i>	68

ASTRONOMIE.

<i>Sur l'Etoile de l'Hydre qui paroît & disparoît.</i>	80
<i>Sur les Mouvemens apparens des Planetes.</i>	82
<i>Sur les Taches du Soleil.</i>	88

OPTIQUE.

<i>Sur quelques faits particuliers d'Optique.</i>	90
---	----

ACOUSTIQUE.

<i>Sur les Sons des Cilindres solides.</i>	93
<i>Observation d'Aoustique.</i>	96

T A B L E.

M E C H A N I Q U E.

<i>Sur la résistance des Milieux au Mouvement.</i>	97
<i>Sur un Problème de Statique.</i>	109
<i>Machines ou Inventions approuvées par l'Académie pendant l'année 1709.</i>	113
<i>Eloge de M. Tschirnhaus.</i>	114
<i>Eloge de M. Poupart.</i>	125





T A B L E

P O U R

L E S M E M O I R E S.

O bservation de la quantité de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année dernière 1708. avec les changemens qui sont arrivés au Thermometre & au Barometre par rapport à la chaleur & aux saisons. Par M. DE LA HIRE.	page 1
Observations de la quantité d'eau de pluie & des vents, par M. le Comte du Pontbriand dans son Château à deux lieues à l'Ouest de S. Malo ; communiquées à l'Académie par M. du Torar de l'Académie, & comparées avec celles que nous avons faites à Paris à l'Observatoire Royal pendant les années 1707. & 1708. Par M. DE LA HIRE.	5
Observations de l'eau qui est tombée à Lyon pendant l'année dernière 1708. par M. DE LA HIRE.	8
Sur un Fœtus humain monstrueux. Par M. LITRE.	9
Remarques sur un Fœtus monstrueux. P. M. MERY.	16
Comparaison des Observations du Barometre faites à Paris & à Zurich pendant les six premiers mois de l'année 1708. Par M. MARALDI.	20
Comparaison des Observations du Barometre faites à Paris & à Zurich les six derniers mois de l'année 1708. Par M. MARALDI.	23
Solutions & Analyses de quelques Problèmes appartenans aux nouvelles Méthodes. Par M. SAURIN.	26
Observation du Retour de l'Etoile changeante de l'Hydre. Par M. MARALDI.	33
Reflexions & Experiences sur le Sublimé corrossif. Par M. LEMERY.	42
De la Proportion que doivent avoir les Cilindres pour former par leurs Sons les Accords de la Musique. Par M. CARRE'.	47
Observations des Eclipses de la Lune & du Soleil faites à Nuremberg pendant l'année 1708. Par M. CASSINI le fils.	62
Observations sur quelques vegetations irregulières de differentes parties des Plantes. Par M. MARCHAND.	64
Courbe de Projection décrite en l'air dans l'hypothèse des resistances de ce milieu en raison des vitesses actuelles du mobile, nonobstant les-	

T A B L E.

quelles résistances les accélérations des chûtes se fassent en raison des tems, ainsi que quelques Philosophes disent l'avoir observé.

Et (par occasion) des projections faites dans un milieu sans résistance avec des accélérations quelconques des chûtes : desquelles projections on donne ici une Règle générale, d'où résulte la Solution d'un Problème de Balistique proposé dans les *Memoires de Trevoux* du mois de Janvier 1706. art. XI. pag. 167. Par M. VARIGNON. 69

Observations sur les mouvemens de la langue du Piver. Par M. MERY. 85

Observations de l'Eclipse de Soleil arrivée le 11. Mars 1709. après midy ; à l'Observatoire. Par M^{rs} DE LA HIRE. 91

Observation de l'Eclipse du Soleil du 11. Mars 1709, faite à l'Observatoire Royal. Par M. CASSINI le fils. 92

Extrait des Observations de l'Eclipse du Soleil du 11. Mars 1709. faites à Montpellier, à Marseille, à Genes & à Boulogne. Par M. CASSINI le fils. 93

Explication de quelques faits d'Optique, & de la maniere dont se fait la vision. Par M. DE LA HIRE. 95

Suite des Essais de Chimie. Art. IV. du Mercure. Par M. HOMBERG. 106

Problème géométrique. Par M. PARENT. 118

Examen d'une difficulté considérable proposée par M. Hugens contre le Système Cartésien sur la cause de la Pesanteur. Par M. SAURIN. 131

Methode générale pour déterminer le Point d'intersection de deux Lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux moindres, ou plus grands qu'un droit : Et pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de tels points d'intersection. Par M. DE REAUMUR. 149

Experiences sur les Metaux, faites avec le Verre ardent du Palais Royal. Par M. GEOFFROY. 162

Observations de la Pesanteur de l'Atmosphere, faites au Château de Meudon avec le Barometre double de M. Hugens. Par M. DE LA HIRE. 176

Formules générales pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux. Par M. DE REAUMUR. 185

Des Mouvemens primitivement variés dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives de ces mouvemens. Par M. VARIGNON. 193

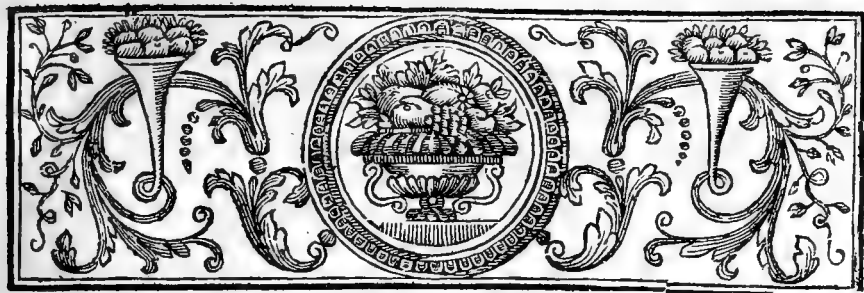
Observations & Analyses du Cachou. Par M. BOULDUK. 227

Comparaison des Observations du Barometre, faites en differens lieux. Par M. MARALDI. 233

T A B L E.

<i>Du mouvement apparent des Planetes à l'égard de la Terre.</i> Par M. CASSINI.	247
<i>Solution generale du Problème, où parmi une infinité de Courbes semblables décrites sur un plan vertical, & ayant un même axe & un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine & une ligne donnée de position, est parcouru dans le plus court tems possible.</i> Par M. SAURIN.	257
<i>Des Mouvements commencés par des vitesses quelconques, & ensuite primitivement accélérés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du Mobile.</i> Par M. VARIGNON.	267
<i>Observations sur les Ecrevisses de riviere.</i> Par M. GEOFFROY le jeune.	309
<i>Extrait ou Abregé du Projet de M. Reneaume sur les Manuscrits de feu M. de Tournesfort.</i> Par M. TERRASSON.	315
<i>Eclaircissemens sur la construction des Egalitez.</i> Second Memoire. Par M. ROLLE.	320
<i>Problème de Statique.</i> Par M. VARIGNON.	351
<i>Observations touchant l'effet de certains Acides sur les Alcalis volatils.</i> Par M. HOMBERG.	354
<i>De la formation & de l'accroissement des Coquilles des animaux, tant terrestres qu'aquatiques, soit de mer soit de riviere.</i> Par M. DE REAUMUR.	364
<i>Conjectures & reflexions sur la matiere du Feu ou de la Lumiere.</i> Par M. LEMERY le fils.	400.
<i>De l'évanouissement des Quantités inconnues dans la Géometrie analytique.</i> Par M. ROLLE.	419
<i>Observations sur l'évaporation qui arrive aux Liquides pendant le grand froid : Avec des Remarques sur quelques effets de la Gelée.</i> Par M. GAUTERON.	451

Fin des Tables.



HISTOIRE

DE

L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCIX.



PHYSIQUE GENERALE.

*SUR LA PESANTEUR
DE L'ATMOSPHERE.*



A pesanteur de l'Atmosphère est si importante en Phisique , qu'on ne la peut trop étudier ; p. 176, V. les M₂
on y est même invité par l'esperance du succès,
qui semble ne dépendre que de quelques calculs affés faciles.

M. de la Hire aiant fait à Meudon des experiences très exactes de la quantité dont la hauteur du Barometre varioit depuis le lieu le plus élevé du Parc jusqu'à la
1709. A

Riviere qui est à $85\frac{1}{3}$ Toises au dessous, il en a tiré la hauteur de la colonne d'air qui répondoit alors à une ligne de Mercure, & la contrebalançoit, & il a trouvé qu'elle étoit de près de 76 pieds, la pesanteur de la colonne entiere de l'Atmosphère étant de 28 pouces de Mercure, à $\frac{1}{2}$ ligne près. Il s'étoit servi d'un très bon Barometre double de M. Huguens, qui marque les degrés de la variation dans une plus grande étendue que le Barometre simple, mais qui aussi demande plus de calcul, parce qu'après les experiences faites, il faut le reduire au simple. Il l'y reduisit selon les principes que nous avons expliqués d'après lui dans l'Hist. de 1708.*

* P. 3. & suiv.

Il est à propos de remarquer que la hauteur entiere de $85\frac{1}{3}$ Toises $\frac{1}{3}$ répondoit à près de 7 lignes de Mercure, & que les 76 pieds de hauteur d'air qui répondent à 1 ligne de Mercure ont été trouvés, en supposant les 7 hauteurs d'air, dont chacune répond à une ligne de Mercure, égales entr'elles, ce qui n'est pas exactement vrai, car l'inférieure est la moindre parce qu'elle est chargée d'un plus grand poids, & plus condensée, & ainsi de suite; mais M. de la Hire a négligé cette difference, M.^{rs} Cassini & Maraldi* voulant y avoir égard ont mis entre ces hauteurs une progression telle que la 1^{re} ayant 61 pieds, la 2^{de} en eût 62, la 3^{me} 63 &c. du moins dans l'étendue d'une demie-lieuë. A ce compte la hauteur moyenne de ces 7 divisions seroit de 64 pieds, ce qui est fort éloigné de près de 76. Nous ne dissimulons point ces differences, qui peut-être s'accorderont avec le temps.

* V. l'Hist. de 1703. p. 12.

Aux observations de Meudon sur la pesanteur de l'Atmosphère, M. de la Hire en a joint d'autres sur la variation que le chaud & le froid causent à la liqueur du Barometre double, variation trompeuse, & qui, si elle n'étoit bien connue, pourroit être attribuée au changement de pesanteur de l'air. Il a supposé, comme il est vrai, que le Mercure du Barometre simple ne se dilatoit ni ne se condensoit sensiblement par le chaud ou par le froid, il y a comparé chaque jour pendant trois ans un Baro-

mettre double , & ensuite il a pris les jours les plus differents par rapport au chaud & au froid , & où cependant le Barometre simple étoit à la même hauteur. Il est évident que dans ces jours-là la hauteur du Barometre double auroit dû aussi être la même , si elle ne varioit qu'avec la pesanteur de l'Atmosphère. Mais elle s'est toujours trouvée différente , & quelquefois de 19 lignes , dont ce Barometre étoit plus élevé dans le chaud. Le hazard a voulu que dans ces trois années d'observation il n'ait pas fait de grands froids , mais seulement de grandes chaleurs. D'ailleurs il ne s'y est pas trouvé des jours du plus grand chaud & du plus grand froid , où le Barometre simple ait été à la même hauteur ; ainsi les 19 lignes ne sont la différence que d'un grand chaud à une constitution d'air tempérée , & M. de la Hire n'a pû voir la plus grande variation dont le Barometre double soit susceptible à cet égard. Elle doit beaucoup passer 19 lignes , ce qui certainement n'est pas à compter pour rien. Cependant la liqueur de ce Barometre a été choisie pour la moins capable de rarefaction que l'on pût trouver.

SUR DES OBSERVATIONS

DU BAROMETRE

FAITES EN DES LIEUX ELOIGNÉS.

CE que fait le Barometre à l'égard d'un certain lieu , V. les M.
P. 233.
il le peut faire à l'égard de toute la Terre ; c'est-à-dire que si pour un lieu particulier il marque les variations qui arrivent à la pesanteur de l'Atmosphère , il peut marquer les différences qui sont à cet égard entre les différentes parties de l'Atmosphère entière , ou même les différences qui se trouvent entre les variations de ces différentes parties. Par là il devient la mesure universelle du poids & de l'action de toute cette grande envelope d'air répandue.

duë autour du globe terrestre , & si l'on en découvre jamais la nature , ce sera par le secours du Barometre. Dans cette vûë, M. Maraldi a comparé ensemble un assés grand nombre d'observations faites sur cet Instrument en des lieux éloignés les uns des autres. Nous en rapporterons seulement ici les résultats , & quelques conclusions qu'on en peut tirer jusqu'à présent. Je dis *jusqu'à présent* , car peut-être faudra-t-il quelque jour ou modifier celles-cy , ou même en tirer de contraires.

1°. Pendant 3. années entieres il s'est trouvé assés de conformité entre les variations du Barometre à Paris & à Gennes , de sorte qu'en ces deux Villes il a très-souvent monté ou descendu les mêmes jours , & cela , quoique les Vents y fussent presque toujours différents , & quelquefois opposés , & la constitution de l'air très-différente à l'égard du chaud & du froid.

2°. Cette conformité est égale , soit que le Barometre varie subitement & promptement, comme lorsqu'il monte ou descend de 10 lignes ou d'1 ponce en un jour (il s'agit ici du Barometre simple) soit lorsqu'il varie plus lentement , comme il fait d'ordinaire. Mais cette même conformité n'est pas si grande quand le Barometre est vers l'une ou l'autre extremité de l'étendue de sa variation , que quand il est vers le milieu.

Par là se confirme un principe établi par M^{rs} Cassini & Maraldi pour une nouvelle mesure des Montagnes *, qui e
*V. l'Hist. de 1703. p. 11. & suiv. l'on peut supposer que dans une assés grande étendue de Pais la variation du Barometre est la même. Mais on voit en même temps que pour la pratique de cette Methode , il faut préférer les observations du Barometre faites en des temps où il est à une hauteur moyenne.

3°. Comme le Barometre a communément une plus grande étendue de variation en hiver , aussi en a-t-il une plus grande dans les Pais plus Septentrionaux. Elle ne varie guere entre les Tropiques qu'à 5. ou 6 lignes , & ici elle est de 2 ponces ; à Gennes elle est de 3 lignes moindre qu'à Paris , parce que Paris est plus septentrional.

4°. Cependant cette même étendue de variation se trouve un peu plus petite à Zurich qu'à Gennes, qui est beaucoup plus meridionale. Mais M. Maraldi fait remarquer que Zurich est beaucoup plus élevé sur le niveau de la Mer que Gennes, & que par les observations du P. Laval sur le S. Pilon *, plus élevé que Marseille de 480 Toises, & plus septentrional de 2', la variation du Barometre est moindre aussi qu'à Marseille. Si l'on veut donc trouver son compte à la progression de la variation du Barometre toujours croissante depuis l'Equateur, il faut ne comparer ensemble que des lieux à peu près également élevés sur le niveau de la Mer. L'Atmosphère est plus exempte de changements & plus tranquille, tant entre les Tropiques où le Soleil agit presque toujours également, qu'à une certaine élévation, où le Soleil agit aussi sur une matiere plus égale, & moins mêlée des vapeurs & des exhalaisons de la Terre.

5°. On a fait à Malaca, qui n'a que 2 degrés de latitude septentrionale, les mêmes experiences * qui ont fait conclure ici à M. Mariotte, & à tous les autres Physiciens, que l'air se dilate précisément selon qu'il est chargé d'un moindre poids, & on a trouvé qu'il se dilatoit moins que selon cette portion. Il vient d'abord dans l'esprit que l'air de Malaca étant déjà très-dilaté par la grande chaleur du climat, peut n'être plus si susceptible de dilatation. M. Maraldi ne disconvient pas que cette cause n'ait part au phénomène, mais il prétend qu'elle n'est pas la seule; car ayant fait les experiences dont il s'agit ici avec de l'air dilaté par la chaleur de l'eau bouillante, & par consequent plus dilaté que celui de Malaca, il a trouvé que les dilatations de cet air s'éloignoient moins de la proportion des poids que celles de l'air de Malaca, ou, ce qui revient au même, qu'il se dilatoit d'avantage. Ce n'est donc pas la seule chaleur du climat qui rend l'air de Malaca moins capable de dilatation, il faut outre cela que de lui-même il le soit moins, & à ce compte la masse de l'Atmosphère sera éterogene selon les differens climats,

* V. l'Hist.
de 1708. p.
105. & suiv.

* V. l'Hist.
de 1705. p.
12. & suiv.

& il faudra être fort réservé en cette matiere à tirer des consequences d'un climat à un autre. On peut dire généralement qu'en fait de Phisique la présomption doit être toujours grande pour la diversité.

S U R L A M A T I E R E

D U F E U.

V. les M.
p. 400.
p. 50.

L'Hist. de 1700 * a dit en parlant de la Chaux : *On n'imagine point que ses principes actifs puissent être autre chose que des particules ignées , que la calcination a fait entrer dans la Chaux. Il est vrai que ces particules ignées fixées & devenues immobiles dans les pores d'un Corps , revoltent un peu l'esprit. Mais enfin le Regule d'Antimoine calciné au Miroir ardent augmente de poids , & l'on ne peut soupçonner nulle autre matiere de s'y être mêlée , que celle qui compose les rayons du Soleil. Il faut convenir que cette hypothèse est presque également difficile à recevoir , & à rejeter.*

M. Lémery le fils croit qu'on peut sortir de cette incertitude , & se declare absolument pour l'hypothèse. On a imaginé jusqu'ici que l'essence de la matiere du Feu consistoit uniquement dans une grande subtilité jointe à une extrême agitation , & selon cette idée il est impossible de concevoir que quand elle est enfermée dans les pores de la Chaux , ou du Regule d'Antimoine , ou enfin des autres minéraux qui augmentent de poids par la calcination, elle ne perde pas tout son mouvement , & ne cesse pas d'être matiere de Feu. Mais M. L'émery ajoute à sa subtilité , & son agitation une figure particuliere , de sorte que ni une autre matiere qui auroit autant ou plus de subtilité & d'agitation ne seroit matiere de Feu, ni celle-là ne cesse de l'être , ou du moins très disposée à le redevenir , quoiqu'elle ait perdu une partie de son mouvement. Il est vrai qu'elle ne doit pas le perdre tout à fait , & pour lui en conserver ce qui lui est nécessaire ,

on peut concevoir & qu'elle agit toujours contre les petites cavités des Corps où elle est emprisonnée, & qu'une matiere beaucoup plus subtile & plus agitée, qui remplit tous les vuides de l'Univers, & ne trouve point de pores si étroits qui ne lui laissent un libre passage, coule incessamment dans les lieux où elle est enfermée, & entretient son mouvement. Elle n'en a pas assez pour forcer ses prisons, mais elle est toujours en état de joindre son action à celle de quelque agent extérieur qui viendra la secourir. C'est ainsi que dès que l'eau vient dissoudre la Chaux vive & en desunir les parties, la matiere de Feu qu'elle renfermoit s'échape de toutes parts, & cause une violente effervescence.

Si l'on demande pourquoi cette matiere que la calcination a fait entrer par les pores d'un corps, n'en sort pas par les mêmes pores après la calcination, M. Lémery répond que l'action du Feu rarefiant tous les corps, comme on le sçait par experience, elle rend tant qu'elle dure leurs pores beaucoup plus grands, & que quand elle vient à cesser, elle leur permet de se rétrécir, & par consequent d'emprisonner dans les petites cavités ce qui y avoit pénétré.

Il n'y a rien d'unique dans la Nature, & si une certaine mechanique est constante en certaines occasions, elle doit se retrouver en d'autres qui y auront rapport. Puisque l'on admet une fois que la matiere du Feu, peut, sans cesser d'être ce qu'elle étoit, s'enfermer dans les cavités des corps calcinés, on sera en droit d'imaginer qu'elle ait été pareillement enfermée dans les cavités de plusieurs autres corps, dès que l'on pourra croire qu'elle en sorte, & en un mot on supposera legittimement que c'est elle qui rend inflammables tous les corps qui le sont, & qu'elle s'en échape sous la forme de flamme, si tôt qu'elle est dégagée de ses envelopes, pourvu que d'ailleurs elle soit assez abondante. Cette suite du Système de M. Lémery l'étend infiniment,

A ce compte, la matiere du Feu & celle de l'eau, quoi-

8 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
que si opposées , ont un rapport essentiel. Elles sont l'une
& l'autre cachées dans une infinité de Mixtes , & même
souvent en grande abondance , sans y découvrir cependant
aucune de leurs propriétés les plus sensibles , & sans
se déclarer pour ce qu'elles sont , à moins que les agents
extérieurs ne leur aident à se montrer.

Ceux de tous les corps où la matiere du Feu est le plus
sensiblement renfermée , ce sont les Phosphores ; on n'a
qu'à les exposer au jour , ils en prennent aussitôt une nou-
velle qui met l'ancienne en action ; ce sont des éponges
de lumiere , aussi la rendent-ils avec la même facilité qu'ils
l'ont prise. Il faut concevoir tous les corps inflammables
comme des Phosphores , mais moins sensibles , & qui ne
rendent pas si facilement la matiere du feu qu'ils con-
tiennent.

L'air sera aussi un grand Phosphore , tout impregné
de cette matiere , qui n'attend que l'action du Soleil ,
dont elle tire sa source. Mais nous ne voulons pas pousser
plus loin des idées qui appartiendroient à un Système gé-
néral , nous les laissons au Memoire de M. Lémery , aus-
si-bien que l'éclaircissement des difficultés que tout Système
général ne peut manquer de produire.

DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHISIQUE GENERALE.

I.

M Jaugeon ayant été curieux de savoir ce que c'est
que le Chagrin qui nous vient de Turquie , s'en
informa à M. de Feriol Ambassadeur à Constantinople ,
dont il reçut toute l'instruction qu'il souhaitoit. Il n'y a
point d'animal de ce nom , comme quelques-uns l'ont crû.
On fait le Chagrin avec la peau de la croupe des Chevaux
& des Mulets , qu'on passe bien , & qu'on rend la plus mince
qu'il est possible , on la tient sous la presse pendant un
certain

certain tems , après y avoir mis de la graine de Moutarde la plus fine. Quand la graine prend bien , les peaux sont belles , sinon , il y reste des endroits unis qu'on appelle des *Miroirs* , & qui sont un grand défaut. On fait les plus beaux Chagrins à Constantinople , & en quelques endroits de Syrie.

II.

Il a paru étonnant que le Froid de l'Hiver de 1709 , qui fut si extraordinaire , & si rigoureux , ait été pendant plusieurs jours à Paris par un vent de Sud. Pour en rendre raison , M. de la Hire a dit que les Montagnes d'Auvergne , qui sont au Sud de Paris , étoient alors toutes couvertes de neige , & M. Homberg , qu'un vent de Nord très froid qui venoit de loin , & s'étendoit loin , ayant précédé , le vent de Sud ne fut qu'un reflux du même air que le Nord avoit poussé , & qui ne s'étoit échauffé en aucun pays. Ces deux causes peuvent fort bien s'être jointes.

I I I.

Il y eut encore une autre merveille pendant ce même Hiver. Malgré l'extrême violence du froid , la Seine ne se gela point entièrement à Paris , & le milieu de son courant fut toujours libre , horsmis qu'il y flottoit de gros glaçons. Cependant on a vû dans des hivers moins rigoureux la Seine si bien prise , que des Charettes y pouvoient passer. M. Homberg croit que du moins dans notre Climat de grosses Rivières comme celle là ne doivent point geler. Elles-mêmes , si ce n'est vers les bords , parce que leur courant est toujours trop fort vers le milieu , qu'ainsi si l'on ne cassoit point la glace des bords , ce qu'on ne manque jamais de faire pour différentes raisons , le milieu couleroit toujours à l'ordinaire , & ne charrieroit point de glaçons , supposé d'ailleurs qu'il ne tombât point de petites rivières dans la grosse , mais que comme il y en tombe , les glaçons qu'elle charrie dans son milieu viennent pour la plus grande partie des petites rivières , qui ont gelé facilement , & dont on a cassé la glace , que ces glaçons arrêtent ou par un pont , ou par un coude de la

riviere, ou par quelque obstacle que ce soit, se prennent & se colent les uns aux autres par le froid, & forment ensuite une espece de croûte qui couvre toute la surface de la riviere, & qu'enfin comme le froid de 1709. fut & très subit & très âpre dès son premier commencement, les petites rivières qui tombent dans la Seine au dessus de Paris gelerent tout à coup, & entierement, de sorte que leurs glaçons qui se seroient pris sur la superficie de la Seine, ne purent y être portez, du moins en assez grande quantité. Il est assez remarquable, que la violence même du froid ait été en partie cause de ce que la Seine ne gela point.

On a sù que dans ce même hiver la glace du Port de Copenhague avoit été épaisse de 27 pouces, dans les endroits même où elle n'étoit point accumulée. Ce fait est d'autant plus digne d'attention, que dans la grande gelée de 1683 la Société Royale ayant fait mesurer l'épaisseur de la glace de la Tamise, quand on alloit dessus en carosse, elle ne se trouva que de 11 pouces.

- N**ous renvoyons entierement aux Memoires.
- V. les M
P. 1.
V. les M.
P. 5.
V. les M.
P. 8.
V. les M.
P. 20.
V. les M.
P. 131.
 - Le Journal de M. de la Hire pour l'année 1708.
 - Ce qu'il a donné sur les Pluyes & les Vents observez à Pontbriand.
 - Et sur les Pluyes & les Vents observez à Lyon.
 - Ce que M. Maraldi a donné sur les Observations du Barometre faites à Zurich.
 - Et le Memoire de M. Saurin sur la Pesanteur.





ANATOMIE.

SUR LE DÉLIRE

MÉLANCOLIQUE.

SI ce n'étoit un certain sentiment commun à tous les Hommes , qui leur persuade que leur Tête ou leur Cerveau est le siège de leurs pensées , il y auroit autant de lieu de croire que c'est le Poumon , ou le Foye , ou tel autre Viscere qu'on voudroit , car si leur mécanique ne paroît avoir aucun rapport à la pensée , celle du Cerveau n'y en a pas davantage. Il faudroit une partie où vinssent aboutir tous les mouvemens de sensations , & telle que M. Descartes avoit imaginé la Glande pineale , mais il n'est que trop vrai que c'étoit une pure imagination , & que même nulle autre partie n'est capable des fonctions qu'il lui attribuoit. Ces traces qu'on suppose si volontiers , & dont les Philosophes modernes ont tant parlé qu'elles commencent à devenir familières dans le discours commun , on ne fait pas trop bien où les mettre , & on ne voit point de partie dans le Cerveau qui soit bien propre ni à les recevoir , ni à les garder. Non seulement nous ne connoissons pas notre Ame , ni la maniere dont elle agit sur des Organes materiels , mais dans ces Organes mêmes nous ne pouvons appercevoir aucune disposition à l'être.

Cependant la difficulté du sujet n'exclut pas les hypotheses , elle doit seulement les faire traiter avec moins de rigueur. M. Vieussens le fils ayant dessein d'expliquer le Délire mélancolique , a supposé que le Centre ovale étoit le siège des fonctions de l'Esprit. Selon les découvertes ou le système de M. Vieussens le Pere , qui a poussé fort

loin les recherches anatomiques , le Centre ovale est un tissu de petits vaisseaux très déliez , qui communiquent tous les uns avec les autres par une infinité d'autres petits vaisseaux encore infiniment plus déliez , que produisent tous les points de leur surface extérieure. C'est dans les premiers de ces petits vaisseaux que le sang arteriel se subtilise au point de devenir Esprit animal , & il coule dans les seconds sous la forme d'Esprit. Au dedans de ce nombre prodigieux de tuyaux presque absolument imperceptibles se font tous les mouvemens auxquels répondent des idées, & les impressions que ces mouvemens y laissent sont les traces qui rappellent les idées qu'on a déjà eues. Il ne faut pas oublier que le Centre ovale se trouve placé à l'origine des Nerfs, ce qui favorise beaucoup la fonction qu'on lui donne ici.

Si cette mécanique est une fois admise , il est aisé d'imaginer que la santé de l'Esprit , en ce qu'elle a de matériel , dépend de la régularité , de l'égalité , de la liberté du cours des esprits dans ces petits canaux. S'il y en a la plupart d'affaibles , comme pendant le sommeil , les esprits qui coulent dans ceux qui restent fortuitement ouverts , réveillent au hazard des idées entre lesquelles il n'y a le plus souvent aucune liaison , & que l'Âme ne laisse pas d'assembler , faute d'en avoir en même tems d'autres qui lui en fassent voir l'incompatibilité. Si au contraire tous les petits tuyaux sont ouverts , & que les esprits s'y portent en trop grande abondance , & avec une trop grande rapidité , il se réveille à la fois une foule d'idées très vives , que l'Âme n'a pas le tems de distinguer ni de comparer , & c'est là la Frenésie. S'il y a seulement dans quelques petits tuyaux une obstruction telle que les esprits cessent d'y couler , les idées qui y étoient attachées sont absolument perduës pour l'Âme , & elle n'en peut plus faire aucun usage dans ses opérations , de sorte qu'elle portera un jugement insensé toutes les fois que ces idées lui auroient été nécessaires pour en former un raisonnable ; hors delà tous ses jugemens seront sains. C'est là le Délire mélancolique.

M. Vieussens a fait voir combien sa supposition s'accorde avec tout ce qui s'observe dans cette maladie. Puisqu'elle vient d'une obstruction, elle est produite par un sang trop épais & trop lent, aussi n'a-t-on point de fièvre. Ceux qui habitent les pays chauds, & dont le sang est dépouillé de ses parties les plus subtiles par une trop grande transpiration, ceux qui usent d'alimens trop grossiers, ceux qui ont été frapés de quelque grande & longue crainte, &c. doivent être plus sujets au Délire mélancolique. Nous n'entrerons point dans un plus grand dénombrement, il iroit peut être trop loin ; il n'y a guere de tête si saine où il n'y ait quelque petit tuyau du Centre ovale bien bouché.

SUR LES INCISIONS FAITES A LA CORNEE.

LA Chirurgie s'enhardit tous les jours. Nous avions déjà parlé dans l'Histoire de 1707 * d'incisions qu'on avoit faites, ou qu'on pouvoit faire à la Cornée. M. Gandolphe, qui avoit déjà enrichi cette même Histoire d'un assez grand article *, a fait pratiquer à Dunquerque cette operation sur un Homme, à qui un coup donné sur l'œil avoit causé un grand épanchement de sang dans l'humeur aqueuse. Comme elle en étoit entièrement obscurcie, la vûe étoit éteinte dans cet œil, & il ne lui restoit qu'un foible sentiment à une grande lumière. Du reste il n'y avoit nul autre accident. M. Gandolphe trouva que le sang épanché étoit en trop grande abondance, pour pouvoir être dissipé par des remèdes Topiques, & d'ailleurs pour l'être assez promptement, sans quoi il pouvoit par un long séjour obscurcir pour toujours l'humeur aqueuse. Il se résolut donc à ouvrir la Cornée dans l'œil malade, & il y fit faire jusqu'à trois incisions, parce que toute la matiere qu'il falloit tirer n'étoit pas sortie par les deux premières. Elles furent faites toutes trois en travers, &

* P. 24.

* P. 26.
& suiv.

ne causerent point de douleur. On ne mit sur l'Oeil que des Compresses trempées dans un mélange de 4 onces d'eau de Plantin , & de 2 onces d'eau Vulnere. En 8 jours , à compter depuis la premiere operation , l'Oeil eut repris sa transparence naturelle ; il ne resta aucune cicatrice des incisions. Ce dernier fait est très remarquable. M. Gandolphe dit qu'il l'a trouvé dans un vieux Livre de Medecine, mais il étoit parfaitement oublié.

On reconnut dans cette cure que les plantes résolutives, telles que le Perfil & le Cerfeuil , qui sont excellentes pour résoudre le sang des chairs meurtries, faisoient un mauvais effet à l'œil, qu'elles y causoient des douleurs, & rendoient la vûë trouble.

Quand l'œil fut guéri , on vit que la prunelle demeurait toujours fort dilatée , & à tel point que son diamètre étoit double de ce qu'il avoit été. Comme elle étoit exactement ronde , on ne pouvoit soupçonner que l'Iris qui la forme eût été blessée par la lancette , & en eût perdu son ressort. Elle l'avoit pourtant perdu du moins pour la plus grande partie , mais par une autre cause ; apparemment c'étoit par le coup qui avoit causé l'épanchement de sang. Cet œil qui a une plus grande prunelle doit être plus commode dans une moindre lumière , & l'autre au contraire dans une plus grande , & il y a lieu de croire que l'Homme qui les a s'en sert alternativement.

A l'expérience & aux faits de M. Gandolphe, M. Littre a joint quelques réflexions.

Il avertit qu'on ne doit pas prendre pour un principe général que les incisions de la Cornée ne laissent point de cicatrices , & M. Gandolphe convient avec lui qu'elles en doivent laisser , quand elles ont été faites sur des yeux affectez de fluxions , d'ulceres , d'inflammations , car alors le tissu & les vaisseaux de la Cornée aiant été extrêmement dilatez , le suc nourricier s'y porte en plus grande abondance , & s'y attache confusément , ce qui forme la cicatrice ; mais il est visible , qu'il peut y avoir d'autres

cas, où cette raison cesse, tel que celui dont nous avons parlé.

M. Littre veut qu'on fasse toujours l'incision à la partie inferieure de la Cornée, tant afin que le sang extravasé, ou le pus sortent plus facilement, qu'afin que la cicatrice, s'il y en a une, nuise moins à la vision. Par cette derniere raison, l'ouverture doit être aussi la plus petite qu'il soit possible.

Il recommande que l'instrument dont on se servira soit bien tranchant, & peu pointu, bien tranchant afin que le globe de l'œil soit moins ébranlé par le coup, & que les vaisseaux d'où le sang s'est épanché ne se rouvrent pas, peu pointu, afin que le Chirurgien soit moins en péril de piquer l'Iris.

Pour prévenir encore cet accident, il conseille au Chirurgien de bien assujettir le globe de l'œil, avant que d'inciser, & de lui faire prendre une figure telle que l'Iris soit la plus éloignée qu'il se pourra de la Cornée.

SUR LES YEUX D'ECREVISSES,

ET SUR QUELQUES PARTICULARITEZ

DES ECREVISSES.

CE qu'on appelle Yeux d'Ecrevisses, sont de petites pierres blanches, rondes, & ordinairement plates, à qui on a donné ce nom, parce qu'effectivement elles se tirent des Ecrevisses de Riviere, & que quoiqu'elles ne ressemblient guere à des yeux, elles y ressemblent encore plus qu'à toute autre partie. V. les M. p. 309.

Les plus habiles Naturalistes avoient crû quelles se formoient dans le Cerveau des Ecrevisses, & Vanhelimont a trouvé le premier que c'étoit dans la région de l'Estomac, & en même temps il a découvert plusieurs particularitez très remarquables de l'histoire naturelle de

ces Animaux. Mais comme il est établi qu'on ne se fie pas trop à lui, on en avoit douté, ou même on n'y avoit pas fait beaucoup d'attention. Cependant M. Geoffroy le jeune en a verifié une grande partie, & c'est ce que nous allons rassembler ici.

On peut faire un genre des Animaux qui portent leurs os en dehors, au lieu que les autres les portent en dedans, & les Ecrevisses en font une espece. Celles de Riviere se dépouillent tous les ans au mois de Juin de ces os dont elles sont découvertes & armées. Une membrane qui tapisse le dedans de toutes leurs écailles, prend leur place après qu'elles sont tombées, & devient en se durcissant & en s'épaississant une écaille nouvelle. Dans le tems de cette mûe, les Ecrevisses sont foibles, languissantes, & ne mangent point.

Les Reptiles qui quittent leur ancienne peau sont un exemple de ce qui arrive aux Ecrevisses, & enfin il n'est pas si étonnant qu'un Animal se dépouille d'une enveloppe extérieure. Mais il l'est qu'il puisse se défaire d'une partie externe, telle que l'Estomac, & c'est ce que font les Ecrevisses. Leur ancien Estomac s'en va, & apparemment aussi l'Intestin, du moins M. Geoffroy le conjecture, & les membranes extérieures de ces viscères leurs-sucbedent. Il y a lieu de croire que comme ils sont usés, & à demi dissous, ils achevent de se dissoudre dans les viscères nouveaux, & sont la nourriture de l'Animal pendant sa mûe. Le vieil Estomac est le premier aliment que le nouveau digere.

C'est seulement dans ce tems-là qu'on trouve les pierres, qu'on appelle Yeux d'Ecrevisses. Elles commencent à se former quand l'ancien Estomac se détruit, & sont ensuite enveloppées dans le nouveau, où elles diminuent toujours de grandeur, jusqu'à ce qu'enfin elles disparaissent. M. Geoffroy croit qu'elles contribuent aussi à nourrir l'Animal pendant sa maladie. Quelle prodigieuse diversité de desseins dans les ouvrages de la Nature ! Qui eût crû qu'il y a un Animal qui se nourrit de la substance de

de son propre Estomac ? après cela , s'il y a quelque chose d'incroyable en ce genre , il faut que ce soit une impossibilité bien démontrée.

SUR LA FORMATION DES COQUILLES

JUſqu'ici les Curieux ont été aſſez touchez des Coquillages , de leur prodigieuſe variété , de la régularité exacte de leur ſtructure , de la beauté & de la vivacité ſingulière de leurs couleurs , de la juſteſſe de leurs comparimens , à peine imitable au Pinceau , mais les Phiſiciens ne leur ont pas rendu , pour ainſi dire , aſſez de juſtice , & ont trop négligé de les conſiderer en Phiſiciens , & d'étudier leur Formation. Apparemment ils ont crû que comme les Coquilles , ainſi que les écailles des Ecreviſſes , ſont des os extérieurs pour tous les Animaux qu'elles couvrent , il falloit les regarder comme parties de leurs corps , & comprendre cette merveille dans celle de la formation générale des Animaux , incompréhenſible à tout l'Eſprit humain. Ils ont donc ſuppoſé que l'Animal & la Coquille naiſſoient du même Oeuf , & ſe développoient enſemble , & ils ſe ſont contentés d'admirer que la Nature eût fait des demeures ſi bien travaillées & ſouvent ſi précieufes pour de ſi vils Animaux. Mais cette ſuppoſition n'eſt que commode , & quoi qu'aſſés vraiſemblable , elle n'eſt nullement vraie. L'Animal naît de ſon œuf , mais non pas la Coquille qui eſt une merveille à part , & c'eſt ce que M. de Reaumur a démêlé le premier , du moins ne connoit-on juſqu'à préſent aucun Auteur qui lui puiſſe conteſter la gloire de la découverte.

Il a reconnu par des expériences déciſives que la Coquille des Limaçons de jardin ſe forme de la matière qui transpire de leur corps , & ſe durcit enſuite à l'air. Il eſt certain que tous les autres Animaux transpirent auſſi , &

sont envelopés d'une espece de nuage ou d'Atmosphère qui s'est exhalée d'eux, & qui peut-être prend à peu près leur figure extérieure. Tout ce que les Limaçons ont de particulier c'est que l'Atmosphère de leur transpiration s'épaissit autour d'eux, & leur forme une enveloppe visible dont leur corps est le moule, au lieu que ce que les autres Animaux transpirent, s'évapore & se perd en l'air. Cette différence vient de la différente substance qui transpire, celle qui sort des Limaçons est visqueuse & pierreuse. Ce n'est pas là seulement une supposition, c'est un fait assez bien prouvé par des expériences de M. de Reaumur.

A ce compte, quoique la Coquille fasse la fonction d'*os universel* de l'Animal, elle ne croît pourtant pas, comme les os ni comme les autres parties par végétation, c'est à dire, par un suc qui circule au dedans d'elle-même, mais par une addition extérieure de parties qui surviennent les unes après les autres, & s'entassent peu à peu, selon qu'on le pense communément des Pierres, & il est remarquable qu'il y ait une partie d'Animal qui emprunte des Minéraux cette façon de croître.

Pour entrer un peu plus dans le détail, il faut se souvenir que la tête du Limaçon est toujours à l'ouverture de la Coquille, & sa queue ou l'autre extrémité de son corps vers la pointe ou le sommet de la Coquille, & que son corps, par quelque cause que ce soit, se tourne naturellement en spirale, dont les différens tours sont en différens plans. Cela supposé, prenons le Limaçon qui ne fait que d'éclore, & qui est dans sa première petitesse. Puisqu'une matière qu'il transpire se petrifie autour de lui, il doit se faire d'abord une petite enveloppe proportionnée à la grandeur de son corps, & comme son corps est encore trop petit pour faire un tour de spirale, ou du moins un tour entier, cette enveloppe ne fera que le centre, ou tout au plus le premier commencement d'un très petit tour de spirale. L'Animal croît ensuite. S'il cessoit de transpirer, il est visible que son corps autant qu'il seroit augmenté demeureroit nud, mais comme

il ne cesse pas de transpirer, il se fait à lui-même une couverture à mesure qu'il croît, elle se met au bout de la première, & si le Limaçon a crû jusqu'à faire un second tour de spirale, la Coquille en fait aussi un second. Ce second tour est le second, ou, ce qui est la même chose, la spirale est allongée, parce que l'Animal a crû en longueur, & en même tems ce tour est aussi plus large que le premier, ou d'un plus grand diamettre, parce que l'Animal a crû aussi en largeur. Les autres tours se forment de même. Ils peuvent aller dans les Coquilles des Limaçons de jardin jusqu'à quatre & demi.

C'est une suite nécessaire de cette formation des Coquilles que les premiers tours de celle d'un jeune Limaçon, qui n'en a encore, si l'on veut, que deux, ne soient pas plus grands que les deux premiers tours de celle d'un Limaçon plus âgé qui en aura quatre; car ce qu'il y a une fois de formé dans la Coquille, ne s'augmente plus, seulement il s'y ajoute avec le tems de nouvelle Coquille. Aussi est-ce là ce qui s'observe invariablement, & il n'en faudroit pas davantage pour démontrer le système de M. de Reaumur. Et ce qui le confirme encore, c'est que ces mêmes premiers tours de spirale qui dans la Coquille d'un jeune Limaçon sont aussi longs & aussi larges que dans celle d'un plus âgé, sont cependant moins épais. On voit par là que la partie de l'Animal qui seroit demeurée nue par son accroissement est, comme il a été dit, celle qui a travaillé à se couvrir, & que celle qui étoit déjà couverte, ne laissant pas pour cela de transpirer toujours a augmenté l'épaisseur de sa couverture.

Entrons encore un peu davantage dans les particularités. On voit des rayes spirales tracées sur la Coquille des Limaçons, principalement sur celles d'une certaine espece de petits Limaçons de jardin; le fond en est ordinairement jaune ou citron, avec des rayes noires ou brunes. Voici comment M. de Reaumur explique ces rayes. Ce qu'on appelle le *Collier* du Limaçon est le principal ouvrier de la Coquille, parce que quand le Limaçon

croît, c'est toujours le Collier qui demeure découvert. Si l'on conçoit qu'il soit jaune avec un seul point noir, ou pour parler plus précisément, que la matiere qui s'échape de tout le Collier soit de nature à faire une Coquille jaune, à l'exception de celle qui s'échaperait par un seul pore ou point, & qui fera la Coquille noire, il est évident, pourvu qu'on se représente l'Animal croissant depuis sa moindre grandeur, se roulant toujours en spirale, & augmentant le nombre des tours, que le point noir du Collier tracera sur toute la Coquille une raye noire, qui fera une spirale très-exactement décrite selon les accroissemens insensibles, & reguliers de l'Animal. Si le point noir n'étoit pas un point, mais une raye droite, la spirale de la Coquille en seroit moins courbe, mais toujours aussi regulierement décrite. S'il y avoit sur le Collier plusieurs points, ou plusieurs rayes de la même ou de différentes couleurs, il y auroit aussi sur la Coquille plusieurs rayes spirales, soit de différentes couleurs, ou de la même, & la position qu'elles auroient entre elles dépendroit de celle des points ou des rayes du Collier.

Il ne faut pas croire que ces points ou rayes du Collier soient une pure hypothèse, on les voit distinctement, & de plus on les voit toujours placés sous l'extrémité de la spirale qu'ils ont dû tracer sur la Coquille, parce que c'est là où ils en sont de leur ouvrage. La partie du Limaçon qui suit le Collier ne fournit qu'une matiere blanche, & luisante, & comme c'est elle qui tant que le Limaçon croît succede au Collier & se place toujours sous la partie de la Coquille qu'il vient de former, elle enduit d'un blanc luisant toute la surface interieure de Coquille, & de là vient que cette surface ou n'a pas la même couleur que l'exterieure, ou n'a nulle variété de couleurs.

Il n'y a point de Physicien qui n'étende de lui-même ce que nous avons dit des Coquilles des Limaçons à celles de tous les autres Animaux qui en sont revêtus. Les variétés que nous avons déjà imaginées dans le Collier à l'égard de la couleur, du nombre, de la position de ses

points ou rayes, doivent servir à en faire imaginer encore d'autres d'une espece differente. Par exemple, s'il a de petites éminences disposées sur sa surface extérieure, elles en feront de pareilles sur la Coquille, qui iront toujours en augmentant regulierement, parce que le Collier avec ses éminences croîtra de la même maniere. Si l'Animal cesse de croître dans certains tems réglés, qui lui seront contraires comme l'Hiver ou l'Été, & qu'ensuite il recommence, il pourra y avoir sur la Coquille des traces de ces differentes reprises, comme les cercles concentriques du tronc des Arbres sont les marques des differens accroissemens de chaque année interrompus en certains tems. Nous évitons avec soin un plus grand détail, aussi bien que toute la mécanique particuliere de la formation des Coquilles. Il nous suffit qu'on l'aperçoive en général, & que l'on voye comment des Animaux sont eux-mêmes les Architectes de leurs habitations, & que ces habitations ne sont si regulieres que parce qu'elles se forment & s'accroissent avec leurs Architectes mêmes, dont elles representent tous les differens âges & les differens états.

Nous devons avertir ici le Public, que pendant que M. de Reaumur étudioit cette matiere, M. du Verney l'étudioit aussi de son côté, comme faisant partie de l'Histoire entiere des Limaçons qu'il a entreprise. Nous avons déjà parlé de l'Hist. de 1708 * de ses découvertes sur leur Génération, il poursuit de même tout ce qui les regarde à prendre cet Animal depuis son Oeuf. On verra en son tems qu'elles sont ses pensées sur la formation de leur Coquille.

* p. 48. & suiv.



DIVERSES OBSERVATIONS

ANATOMIQUES.

I.

ONa fût dans l'Academie par une Lettre d'un Magist'rat fort considerable, que le 1 Février 1709 la femme d'un Boucher d'Aix étoit accouchée de 4 filles qui paroissoient à differens termes, qu'ensuite il étoit venu une masse informe, & puis de 2 jours en 2 jours de nouveaux Enfans, bien formez, tant Garçons que Filles, jusqu'au nombre de 5, de sorte qu'en tout il y en avoit 9, fans compter la masse. Ils étoient tous vivans, & furent baptisez ou ondoyez. On n'avoit point encore ouvert la masse informe, qui apparemment contenoit un autre Enfant. Le nombre des Enfans, & quelques soupçons de superfétation sont ici des choses très remarquables. Il est vrai que l'Histoire de la fameuse Comtesse de Hollande seroit bien plus merveilleuse, mais aussi n'a-t-elle pas l'air d'une histoire.

II.

M. Méry a apporté à l'Academie les deux yeux d'un Homme qui venoit de mourir, & que l'on étoit persuadé qui avoit des Cataractes. Il les a ouverts en presence de la Compagnie, & n'a trouvé dans tous les deux que le Cristallin qui commençoit par son milieu à devenir glaucomatique. *Depuis que l'on agite dans l'Academie la question des Cataractes* *, comme nous l'avons dit dans l'Histoire de 1708, *ce qu'on a crû Cataracte, s'est toujours trouvé Glaucoma,* & voilà le nombre des Glaucoma crûs Cataractes encore augmenté.

*V. l'Hist.
de 1706. p.
11. celle de
1707. p. 22.
& celle de
1708. p. 39.

III.

Les Medecins tiennent qu'une Loupe peut être de trois especes, selon la matiere dont elle sera formée. Si cette matiere ressemble à de la Bouïllie, la Loupe s'appelle un

Atherome ; si elle ressemble à du Miel, *Meliceri* , si elle ressemble à du Suif, *Steatome*. M. Littre veut établir une quatrième espece , qui s'appellera *Lipome* , à cause de la graisse qui forme la Loupe. Il en a vû une en effet placée sur l'épaule d'un Homme depuis 4 à 5 ans, grosse comme un pain d'un sou, qui n'étoit qu'un Kiste ou sac membraneux, mince & d'un tissu fort lâche, rempli d'une graisse molle, & qui avoit toutes les qualitez des graisses ordinaires. Quoique la graisse & le suif se ressemblent, cette nouvelle espece de Loupe, ou ce Lipome ne peut pas être rapporté au Steatome, parce que la matiere du Steatome n'est point inflammable, & ne se fond point ou du moins très difficilement, & imparfaitement, & c'est tout le contraire de celle du Lipome. Quand l'Homme qui avoit cette Loupe, fatiguoit beaucoup, ou faisoit quelque excès en vin ou liqueurs ardentes, sa Loupe s'enflloit pour quelques jours, apparemment ou parce que son sang se fermentoit davantage, & que la graisse du Lipome se fondoit en partie, & acqueroit un plus grand volume dans un Kiste qui lui cédoit facilement, ou parce que les vaisseaux de la Loupe se dilatoient par le nouveau bouillonnement du sang.

I V.

On croit communément la Matrice si délicate qu'une égratignure, un coup d'ongle y cause une inflammation, & souvent la mort, & que le plus petit ulcere y est presque toujours incurable. Cependant M. Jaugeon a fait voir à l'Academie une Lettre écrite à M. Dionis par M. Ciron, Chirurgien de la Marine à Brest, qui rapportoit qu'une playe de Matrice très considerable n'avoit point causé la mort. Voici le fait très abregé, & réduit aux seuls points essentiels. Une Blanchisseuse de Brest, âgée de 34 ans, d'un temperament robuste, grosse de 6 à 7 mois, étant tombée violemment sur la pointe d'une pallissade du fossé de la Ville se fit 3 ou 4 doits au dessous du nombril une playe large de 2 doits. De ce tems-là, elle cessa de sentir son Enfant. Elle voida par le vulve 8 ou 10 jours après.

beaucoup de sang mêlé de pourriture, & cet écoulement dura 8 ou 10 jours. La playe du ventre ayant été traitée à l'ordinaire, cette femme revint en assez bon état recommença de travailler, passa le 9^{me} mois de sa grossesse, & alla jusqu'au 15^{me} sans incommodité considérable. Alors il se fit une tumeur à l'endroit du ventre où elle avoit été blessée, la tumeur s'ouvrit d'elle-même, supura pendant 40 jours des matieres assez loüables, ensuite se dessecha, & se cicatrisa. Le 27^{me} mois de la grossesse, la tumeur revint, mais beaucoup plus considerable, & fut en 3 jours grosse comme un balon. On l'ouvrit, & on en tira 2 pintes de matieres très puantes, dont l'évacuation soulagéa fort la Malade. Le 3^{me} jour du pensément, il vint de petits os, & enfin de jour en jour vinrent les uns après les autres tous les os d'un petit squelette de 6 à 7 mois. Certainement la Matrice avoit été percée par la pointe de la palissade, le fœtus y avoit été tué de ce coup, il s'y étoit pourri, & ensuite ou il en étoit sorti par l'ouverture de la playe, n'étant plus qu'un squelette, ou ses os en étoient sortis par la même ouverture les uns après les autres. Rien ne peut être plus contraire que cette histoire à l'extrême délicatesse qu'on attribué à la Matrice, ou si, comme il y a apparence, cette délicatesse lui est attribuée avec raison, rien ne prouve mieux qu'il ne faut jamais désespérer d'aucune cure, & que l'on ne fait si l'on n'est pas dans certaines circonstances singulieres. Nous ne devons pas oublier que cette même femme le 14^{me} mois après sa chute se trouva enceinte d'un faux germe, qu'elle rendit avec une perte de sang considerable.

V.

Une femme de 17 ans, d'un temperament bilieux, & d'une grande vivacité, fut grosse, & porta son Enfant du côté droit. Il devint si gros qu'il ne put sortir, & fut tiré du ventre de sa Mere mort & par pieces. Dans les derniers mois de sa grossesse, elle fut incommodée d'une oppression de poitrine, d'une difficulté de respiration, & de palpitations de cœur, & depuis ce tems-là ces maux
ne

ne firent qu'augmenter pendant les 5 années suivantes, après quoi ils s'arrêterent au point où ils étoient, si ce n'est que la Malade fit quelque excès, mais l'excès passé, ils cessèrent aussi d'augmenter. Il faut remarquer que pendant ces 5 années, comme elle étoit fort jeune, elle crut encore en hauteur, elle eut encore 2 enfans, qu'elle porta toujours du côté droit, & elle en accoucha sans peine. Elle mourut à 39 ans, en partie pour ne s'être pas conduite comme on lui avoit prescrit. M. Littre ouvrit son corps. Il trouva que le Ligament large & le Ligament rond de la Matrice du côté droit étoient plus courts, plus compactes, & plus gros que ceux du côté opposé, que la Matrice étoit plus grosse qu'à l'ordinaire, & pantoit un peu du côté droit, que le grand Lobe du foye qui doit être cave par derrière, convexe par devant, mince & étroit en bas, épais & large en haut, entièrement renfermé dans la capacité du ventre, étoit de figure conique long de 9. pouces, large de 4. à sa base qui étoit sa partie inférieure, & de 2 à sa pointe, entrant jusques dans la partie moyenne de la cavité de la poitrine, quoique d'ailleurs il ne fût que du poids ordinaire, & qu'enfin toutes les parties du même côté, le Rein, le Diaphragme, le Poumon, étoient tant par leur figure, que par leur position, tant en elles-mêmes que par rapport aux parties voisines, dans le même état que si elles avoient été violemment poussées par la Matrice de bas en haut. Aussi M. Littre conjecture-t-il qu'elles l'avoient été. La trop grande force des Ligamens de la Matrice du côté droit, avoit tiré & fait pancher la Matrice de ce côté-là, & déterminé le premier Enfant à s'y porter. Malheureusement encore il fut extrêmement gros, & fit une forte compression à toutes les Parties qui étoient au dessus de lui, de sorte que le Poumon droit en fut fort rapetissé, & resserré. De-là tous les maux, ainsi qu'il est visible. Les parties comprimées, & gênées par cet Enfant, l'ayant été pendant un tems considerable, ne se remirent point après sa sortie, tant parce qu'elles

avoient déjà perdu une partie du ressort necessaire , que parce que les Enfans suivans étant toujours du côté droit, les entretenrent dans ce mauvais pli. Elles le conserverent donc , même en croissant , & par consequent tant que la Dame crut en hauteur, les incommoditez augmentèrent, parce qu'elles avoient commencé par une pression faite en ce sens-là. Il suffit que les Medecins soient avertis de la possibilité de ces accidens, pour les prévenir aisément dans de jeunes femmes grosses , lorsqu'ils s'appercevront qu'elles porteront trop leurs Enfans d'un côté.

V.

M. Plantade , de la Societé Royale de Montpellier , étant à Paris , a trouvé à ses repas deux fois de suite en assez peu de tems deux Poulets qui avoient chacun deux Cœurs. Il donna ceux du dernier à M. Cassini le fils qui les apporta à l'Academie. M. Littre les examina, il commença par les ramollir dans de l'eau tiède pour les mettre en état d'être disséqués. Ils étoient égaux entre eux , & seulement tant soit peu plus petits chacun que le Cœur d'un Poulet de même âge. Ils étoient situés à côté l'un de l'autre à un demi pouce de distance , avoient chacun leurs ventricules , leurs oreillettes , & tous leurs vaisseaux sanguins comme les Cœurs ordinaires , & n'avoient rien de singulier sinon qu'ils étoient attachez tous deux par leur Veine Cave inferieure à un des Lobes du foye. M. Littre conjecture que le sang du ventricule droit du Cœur droit alloit dans le Poumon droit , & le sang du ventricule droit du Cœur gauche dans le Poumon gauche. Quant à l'autre circulation , ou les Aortes des deux Cœurs pouvoient s'unir , & n'en former qu'une , ou l'Aorte du Cœur droit fournissoit du sang aux parties du côté droit , & celle du Cœur gauche au côté gauche , ou toutes deux se distribuoient également par tout le Corps , de sorte qu'il y avoit toujours double Arrere. Du reste , comme chacun des deux Cœurs avoit presque autant de force qu'un Cœur unique , ce Poulet avoit

deux fois plus de vie qu'un autre, & si un Cœur lui manquoit, il en avoit encore un de relais. Cette conformation qui, selon ce qu'on a vû, n'est pas apparemment fort rare dans cette espece, ne doit pas être impossible dans l'Homme, peut-être a-t-elle déjà produit des phenomenes, qui ont confondu les Phisiciens.

VII.

On a déjà vû dans l'Histoire de 1701 * quelques-unes des difficultez que M. Méry oppose au Systême de la ^{* p. 33. &c} génération de l'Homme par des Oeufs. On prend pour ces Oeufs des Vesicules pleines de liqueur qui sont dans les Testicules où prétendus Ovaires des Femmes, & M. Méry avoit trouvé des Vesicules toutes pareilles dans l'épaisseur de l'Orifice interne de la Matrice, & certainement celles-là n'étoient pas des Oeufs. Il vient d'en trouver encore de parfaitement semblables, & qui sont encore moins des Oeufs, s'il est possible, puisqu'elles étoient dans les Testicules d'un Homme. Si elles avoient été toutes réunies ensemble, elles auroient fait le quart de son volume. Leur liqueur étoit claire & transparente comme de l'eau, & la membrane qui la renfermoit étoit, comme dans les Ovaires des femmes, naturellement inséparable de la substance propre du Testicule. Les Ovaires des Femmes étant cuits dans l'eau bouillante, la liqueur de leurs Vesicules se durcit, ce qui paroît favoriser le systême des Oeufs, mais ce Testicule d'Homme étant pareillement cuit, il y eut une partie de ses Vesicules dont la liqueur se durcit, & d'autres dont la liqueur demeura fluide. Il en arrive autant aux eaux qu'on tire du ventre des Hidropiques; quelquefois elles s'épaississent par le feu, quelquefois elles conservent leur fluidité, & cette difference ne vient que de ce que les unes sont de la limphe destinée à la nourriture des parties, & les autres de la serosité du sang, semblable à l'urine. On peut legitiment dire la même chose de toutes les Vesicules ou Hydatides, ainsi l'épaississement de la liqueur

contenuë dans les Ovaires des Femmes ne prouve rien pour les Oeufs.

Il est vrai que le Testicule d'homme observé par M. Méry étoit malade , & non pas dans l'état naturel. Aussi M. Méry ne prétend-il pas que les Testicules des hommes ressembtent à ceux des femmes , qu'on a pris pour des Ovaires , mais seulement que si par quelque cause que ce soit il se trouve dans les uns & dans les autres des Vésicules toutes semblables , il y a apparence qu'elles ne sont pas plus des oeufs dans les uns que dans les autres.

V I I I.

M. Méry ayant ouvert à un Malade un abcès sur la surface du grand *Trochanter* du *Femur* droit , dont il sortit une palette & demie de sang très fluide , mais d'un rouge obscur , y trouva un Polipe, long de 2 pouces , large de 1, épais de 5 ou 6 lignes , couvert de plusieurs tuberositez inégales , & irrégulieres , dont quelques-unes étoient suspenduës par de petits ligamens. Il étoit fortement attaché au tendron du *grand Fessier* par un pedicule long d'un pouce , & gros comme une plume à écrire. C'étoit là ce qu'il avoit de plus singulier, car les Polipes qui se forment dans le Cœur , & jettent souvent des branches dans ses vaisseaux , ne tiennent point à la substance par de pareils pedicules. Delà M. Méry conjectura qu'il devoit s'être formé d'une maniere differente de ceux du Cœur. Ils sont apparemment produits par la Lympe , qui dans les ventricules se sépare des autres parties du sang à cause de quelque disposition particuliere , & l'on voit effectivement par toutes les saignées qu'elle a beaucoup de facilité à s'en séparer , car c'est cette partie blanche du sang , qui en un moment monte au haut de la Palette , s'y coagule , & y fait une croûte parfaitement semblable à la matiere des Polipes du Cœur. Aussi croit-on qu'il s'y en engendre souvent dans le petit espace de tems , où un Mort se refroidit , & que c'est là ce qui rend les petits Polipes si communs dans les cadavres que l'on ouvre. Mais il paroît à cause du pedicule qu'avoit le Polipe dont il s'agit pre-

sentement ; qu'il ne s'étoit formé que peu à peu du suc qui exudoit du tendon, où il étoit attaché. L'épanchement extraordinaire de ce suc avoit été causé par une chute que le Malade avoit faite sur cette partie, il y avoit trois semaines.

IX.

M. Gandolphe, dont nous avons déjà parlé dans l'Hist. de 1707 *, Medecin de la Marine à Dunquerque, a envoyé à l'Académie la description & la figure d'un Ver Ténia, rendu par une Dame de Dunquerque, & la Relation exacte & très bien circonstanciée de la maladie, avec une Petite Dissertation sur ces sortes de Vers en général. * p. 262 & suiv.

La Malade venoit d'accoucher heureusement pour la quatrième fois. Comme elle avoit des accidens qui n'étoient point une suite de son état, de la fièvre aussi-tôt qu'elle eut accouchée, de fréquentes nausées, une difficulté de respiration, qui alloit jusqu'à une espece d'étranglement, de grandes douleurs dans le bas ventre, quoique sans aucune tension, M. Gandolphe crut qu'il y avoit quelque chose d'extraordinaire dans le bas ventre, & il ordonna le Tarte Emetique avec de la Manne, ce qui fit sortir le Ténia le troisième jour après l'accouchement.

Ce Ver fut en mouvement pendant quelque tems. Quoiqu'il eût 50 pouces de long, il n'étoit pas sorti tout entier, il y a apparence que le reste vint dans des selles, mais si corrompu qu'on ne le reconnut pas. Il avoit 4 lignes de large vers le milieu du corps, & environ $\frac{1}{2}$ ligne d'épais. Il étoit plat comme un Lacet, & delà vient son nom. Il étoit articulé dans toute sa longueur par des anneaux enchassés régulièrement les uns dans les autres, mais avec quelque difference. Les 11 premiers anneaux ou articles du côté de la tête étoient unis par une membrane fine qui les separoit tant soit peu les uns des autres, ils étoient un peu plus épais & plus petits que les articles du reste du corps, & alloient en grossissant insensiblement depuis la tête. Tous les autres articles étoient unis immé-

diatement les uns aux autres. Ceux du milieu avoient plus de grosseur , & une articulation plus aisée que les précédens , & ceux de l'extrémité étoient plus longs & moins larges , & leur articulation encore plus manifeste.

M. Gandolphe remarqua quelques singularitez au premier article, qui formoit la tête. Il y avoit au dessous une ouverture presque imperceptible en forme de fente, deux trous dans l'épaisseur de l'extrémité, & une petite éminence ronde au dessus.

Au dessous des six premiers articles, il y avoit plusieurs petites éminences rondes , placées en long , comme les pieds des Chenilles.

La partie supérieure de chaque article , c'est-à-dire : celle qui étoit vers la tête , étoit reçue dans l'article précédent , & la partie inférieure recevoit l'article suivant , ce qui fait l'articulation perpetuelle du Ver. M. Gandolphe appelle *ventre* une partie de chaque article où les Viscères sont renfermez. C'est une espece de cavité qui ne se voit sensiblement que dans les articles du milieu & de l'extrémité. Elle est élevée , & placée à la partie supérieure de l'article , & se termine en pointe au milieu de l'article même. Ce qui a fait reconnoître à M. Gandolphe cet endroit pour le ventre, c'est qu'en le pressant légèrement dans un article séparé des autres , il en voyoit sortir d'espace en espace comme de petits canaux blancs d'une grande finesse , qui ne pouvoient être que les Viscères du Ver.

En separant les articles de l'extrémité, il a vû que la partie supérieure de chacun étoit enchassée dans une petite cavité , & que la partie inférieure de l'article qui recevoit débordoit un peu au delà du corps & des côtes de l'article reçu. La cavité où chaque article étoit joint, étoit toute traversée par des fibres musculieuses , qui laissoient entre elles de petits espaces , par où les Viscères communiquoient d'un article à l'autre.

Les côtes des articles ne se terminoient ni en pointe ni en mammelon , mais il y avoit toujours à un seul côté

de chacun une petite ouverture en forme d'issuë , placée près de la partie inferieure. Il y aboutissoit un canal qui s'étendoit jusqu'au milieu de l'article. Ces issuës n'étoient pas toujours du même côté du Ver, mais alternativement de côté & d'autre sans ordre réglé , tantôt deux , trois , six de suite , tantôt une seule. M. Andry , fameux Medecin de la Faculté de Paris , & fameux sur tout en cette matiere , a le premier observé ces ouvertures. Il les prend pour des Trachées , parce que certaines especes d'Insectes en ont effectivement qui sont disposées ainsi tout le long de leur corps à chaque article ou *incision* , mais M. Gandolphe doute que ceux qui vivent dans le corps d'autres Animaux , & ne vivent que là , comme le Ténia , ayent besoin de respiration & de Trachées.

La peau du Ténia en fait presque toute la substance. C'est un veritable muscle formé de fibres disposées en plusieurs sens , & entrecoupées aux jointures. Elles ne paroissent qu'à l'interieur de la peau. Elles ont plus de force dans le ventre de chaque article , parce que c'est l'endroit où il se peut faire le plus de compression. Le Ver se plie facilement dans toute son étenduë , mais principalement aux jointures. Le dessous étoit plus plat & plus lisse que le dessus.

La Dame qui avoit ce Ténia avoit rendu plusieurs fois par les selles de petits corps blancs , ou des Vers qui ressembloient à de la graine de Courge , & qu'on appelle par cette raison Vers *cucurbitaires* , ou *cucurbitins*. Ils étoient sortis seuls. La plupart des Auteurs les regardent comme des signes & des especes d'avantcoureurs d'un Ténia qui est dans le corps , mais M. Gandolphe ne croit pas ces signes encore bien certains , & il désiroit qu'on observât plus exactement ces sortes de corps blancs , pour savoir si ce sont effectivement des Vers , s'ils sont vivans ou morts , d'une autre espece que le Ténia &c.

Il est à remarquer que le Pere de la Malade étoit mort d'une Pleuresie , & qu'avant que de mourir il avoit jetté un Ver plat & fort long. Nous dirons en passant que le

Malade qui donna occasion au livre de M. Andry sur la *Generation des Vers*, & qui en avoit jetté un de 179 pouces, qui n'étoit pas entier, avoit pareillement une Pleuresie, mais dont il fut entierement guéri deux jours après la sortie du Ver.

Si le Ténia étoit toujours un mal hereditaire, cette circonstance serviroit peut être à expliquer l'origine de ce Ver, qu'il est très difficile d'imaginer. Car il est à présumer qu'il vient d'un Oeuf comme tous les autres Animaux, mais comment cet Oeuf se trouve-t-il dans le corps d'un homme? y est-il venu de dehors enfermé dans quelque Aliment, ou même, si l'on veut, porté par l'air? On devroit donc voir quelquefois sur la terre des Ténia, & l'on n'en a jamais vû. On pourroit bien supposer que le Chile dont ils se nourrissent dans le corps humain leur convient mieux que toute autre nourriture qu'ils pourroient trouver sur la terre, & qu'ils n'y parviendroient jamais à avoir ni 50 pouces, ni 179, encore moins 1980, car on en a vû de cette énorme longueur, mais du moins devoit-on connoître des Ténia de terre, quelque petits qu'ils fussent, & l'on n'en connoît point. Il est vrai qu'on pourroit encore dire que leur extrême petitesse les rend absolument méconnoissables, & change même leur figure, parce que tous leurs articles ou anneaux seront roulezz les uns dans les autres; mais que de cette petitesse qui les change tant ils puissent venir à avoir 1980 pouces ou plus de 27 toises de long, c'est une supposition un peu violente; quel Animal a jamais crû selon cette proportion? il seroit donc commode de supposer, que puisque le Ténia ne se trouve que dans le corps de l'Homme ou de quelque autre Animal, l'œuf dont il est éclos étoit naturellement attaché à celui dont cet Animal est venu, & les Vers hereditaires s'accommoderoient fort à cette hypothèse, mais jusqu'à present il vaut mieux, selon M. Gandolphe, s'abstenir de deviner sur ce sujet.

Il a sù que sa Malade ayant une fièvre intermittente pendant sa troisième Grossesse avoit pris des tablettes vomitives,

nitives, qui avoient puissamment agi, sans que son Ténia eût causé aucun symptôme. A plus forte raison auroit-il pû n'en causer jamais dans un corps toujours sain. Ainsi on peut porter un Ténia toute sa vie sans s'en apercevoir. Cet hôte n'est nuisible que par des mouvemens extraordinaires, & il n'y a apparemment que de certains vices particuliers des humeurs qui l'y obligent en l'incommodant & en l'irritant. Hors delà il peut vivre paisiblement avec celui qui le loge, en lui dérobant seulement un peu de Chile, dont la perte se peut aisément souffrir à moins que le Ver ne fût d'une prodigieuse grandeur, ou qu'il n'y eût quelque autre circonstance particulière.

X.

Les Naturalistes croient que les Epines dont les *Oursins* sont herissés, leur tiennent lieu de Jambes, & qu'ils s'en servent pour marcher. Mais M. Gandolphe ayant observé à Marseille ces Animaux qui marchaient assés vite au fond de la Mer, a découvert que ce ne sont point leurs Epines qui executent ce mouvement, mais des Jambes disposées autour de leur bouche, qui est toujours tournée contre le fonds de la Mer, ces Jambes disparaissent entièrement, dès que les Oursins sont tirés du fonds de l'eau, & delà est venuë l'erreur commune. On a sù qu'ils marchaient & on n'a point vû leurs Jambes, parce qu'on ne les a point vûs marcher dans la mer. Elles ressemblent à celles d'un Insecte plat, nommé *Etoile de mer*, que M. Gandolphe a étudié à Dunquerque, & dont il promettoit une description, qu'apparemment nous ne verrons pas. L'Academie a appris sa mort dans cette même année 1709, & a crû perdre avec un si bon Correspondant beaucoup de belles observations.

Nous renvoyons entierement aux Mémoires
L'Ecrit de M. Littre sur un Foetus humain monstrueux.

V. les M.
p. 9.
V. les M.
p. 16.

Celui de M. Méry sur un autre Foetus monstrueux.

1709.

E

v. les M. Et les observations de M. Méry sur les mouvemens de
p. 35. la Langue du Piver.



C H I M I E.

S U R L E S U B L I M É

C O R R O S I F.

v. les M.
p. 42.

LE Sublimé corrosif est du Mercure avec lequel se font exactement, & intimement incorporés par une operation Chimique du Sel, & du Vitriol. On l'appelle *Sublimé*, parce que dans l'operation il s'est élevé au haut d'un Matras, & *corrosif*, parce que les matieres avec lesquelles on l'a mêlé lui ont donné une vertu de ronger & de corroder qu'il n'avoit pas. Il y a toute apparence, qu'étant par la figure ronde de ses plus petites particules aussi divisible, aussi mobile, aussi actif, qu'il l'est naturellement, mais par cette même figure incapable de déchirer, il en devient très capable, lorsqu'il est armé & herissé de toutes parts des Acides aigus du Sel, & du Vitriol. Aussi le Sublimé corrosif pris interieurement est-il un très fort poison, mais appliqué par dehors il est bon pour nettoyer les ulceres, & manger les chairs qu'il faut consumer,

Il a encore d'autres usages en Medecine, mais ce n'est que lorsqu'il a en partie changé de nature, & qu'il est devenu *Sublimé doux*. Il le devient par une nouvelle addition de Mercure, & par de nouvelles sublimations, car la même quantité des Acides du sel & du Vitriol étant répandue sur une plus grande quantité de Mercure, la vertu corrosif diminuë d'autant, & l'activité nuisible

réduite à un certain degré n'est plus qu'utile. On est même assez maître du degré par l'opération.

Comme il est bon de l'être ; principalement à l'égard des Reinedes violens , l'expérience que M. Lémery a faite en travaillant sur le Sublimé corrosif , peut avoir son utilité. Il a trouvé qu'on le peut faire avec le Sel seulement , pourvu que l'on mette autant de Sel , que l'on auroit mis de Sel & de Vitriol , & que de cette manière il est moins corrosif , & cause moins de douleur en rongant les chairs. Ce nouveau Sublimé corrosif doit par conséquent se changer plus aisément en Sublimé doux , & une si grande addition de Mercure n'y doit pas être nécessaire ; & c'est ce qui se trouve en effet.

Il est assez établi chés les Chimistes que les Acides du sel sont plus grossiers que ceux du Vitriol , & cela supposé , il n'est pas surprenant que le Mercure ait moins d'action , lorsqu'il n'est armé que de dards moins perçans.

Cette même grossièreté des Acides du Sel , qu'on peut très raisonnablement & qu'on doit même supposer égale dans le même Sel , rend raison de ce que , selon que M. Lémery l'a éprouvé , le Sel qui après avoir servi à faire du Sublimé corrosif est demeuré dans le fond du Matras , ne peut plus servir à en faire d'autres , quelque purifié qu'il puisse être. C'est que tous ses Acides les moins grossiers ayant été épuisés par la première opération , ceux qui restent le sont trop pour s'attacher au Mercure , & pour s'envoler avec lui.

Après avoir fait du Sublimé corrosif avec le Sel seulement , M. Lémery a voulu voir s'il en feroit avec le Vitriol seul ; mais il n'en a pû venir à bout. Il ne s'est élevé au haut du Matras que quelques Souffres legers du Vitriol , tout le reste de sa substance est demeuré incorporé avec le Mercure au fond du Vaisseau. Peut-être les Acides du Vitriol par leur grande quantité , & par la finesse dont ils sont , s'unissent-ils si facilement , si promptement , & en si grande abondance à la substance du

Mercuré, qu'ils en font une masseliée & pesante, qui ne se peut élever. Cette idée feroit entendre aussi pourquoi le mélange du Sel & du Vitriol réussit dans la composition du Sublimé.

SUR LES METAUX IMPARFAITS

EXPOSEZ AU VERRE ARDENT.

V. les M.
p. 162.

* p. 39. &
40.

LE Verre ardent du Palais Royal est le Fourneau le plus vif que la Chimie ait jamais eu, & il peut servir à des opérations que nul autre ne pourroit exécuter, mais le mal est qu'il ne va pas souvent. Nous avons dit pourquoi dans l'Hist. de 1705 *, & nous pouvons ajouter ici que dans toute l'année 1708 il y eut à peine 3 ou 4 jours favorables.

M. Geoffroy en profita pour présenter au Soleil les 4 Metaux imparfaits, le Fer, le Cuivre, l'Etain & le Plomb, & pénétrer par là dans le mystère de leur composition intime. Il faut renvoyer au Mémoire de l'Auteur le détail des Expériences, quoiqu'agréable & instructif, & venir ici aux faits généraux qui en résultent.

Ces 4 Metaux ont pour base une Terre susceptible de vitrification, cassante, friable, différente dans tous les quatre, puisqu'elle se vitrifie différemment. Dans le Fer, c'est un simple *Regule* de Fer, c'est à dire la partie la plus dure, & la plus fixe de ce Metal; elle est plus blanche que lui. Dans le Cuivre, c'est une matière rouge, dont les petits grains vus avec le Microscope sont autant de Rubis; dans l'Etain, c'est une matière cristalline très-difficile à fondre, car elle ne se fond pas parfaitement au feu du Soleil, & se met seulement en aiguilles hérissées de pointes; dans le Plomb, c'est une matière talqueuse, ou du moins disposée par lames, comme le Talc, un peu molasse, douce au toucher, transparente, de différentes couleurs en différens endroits.

Ces vitrifications des Metaux ne sont pas ordinairement bien achevées, parce qu'il faudroit pour cela qu'ils eussent été tenus en fonte au foyer du Miroir un certain tems, & pendant ce tems ils fondent, penetrent, & percent leurs supports, c'est à dire, les matieres surquoy on les expose au Soleil. C'est encore là une des incommodités du Verre ardent. La grande chaleur, qui en fait le merite, y a ses inconveniens.

Outre la Terre, il entre dans les 4 Metaux un Souffre; ou une substance huileuse, qui en fait l'opacité, le brillant, & la malleabilité. Elle est la même dans tous les quatre, & de plus la même que dans les Vegetaux, & par conséquent dans les Animaux. Cette proposition avoit déjà été avancée dans l'Hist. de 1707*, en voici la preuve. Pour vitrifier au Soleil lequel que ce soit des Metaux imparfaits, il faut le tenir exposé au foyer non sur un Charbon, mais sur un morceau de Coupelle, ou de Grez, ou de Porcelaine, dont on ait ôté le Vernis. La raison est, que l'huile de ces Metaux s'envole d'abord en fumée, & c'est ce qui les réduit en une terre vitrifiable, mais ils ne s'y réduiroient pas, s'il leur survenoit d'ailleurs de nouvelle huile, qui tint la place de celle qu'ils perdent. Or il leur en surviendrait s'ils étoient sur le charbon, qui échauffé par le Soleil leur en fourniroit, parce qu'il est fort sulfureux. On les met donc sur des matieres purement terreuses, ou du moins destituées d'huile, autant qu'il est possible. Quand ils ont été vitrifiés sur ces supports, on n'a qu'à les remettre au Soleil sur le Charbon, & les y fondre, ils reprennent tous leur forme métallique, parce que le Charbon leur a rendu le seul principe qui leur manquoit, & qui par conséquent devoit être le même dans tous, & le même que dans les Plantes. M. Geoffroy a trouvé qu'il étoit encore le même dans le Mercure.

* P. 44.

Cette conclusion lui étoit fort favorable dans sa contestation avec M. Lémery le fils, exposée dans les Histoires précédentes, car il n'étoit plus du tout merveilleux

que des Plantes brûlées produisissent quelques atômes de Fer. Cependant M. Geoffroy a déclaré qu'il ne prétendoit point ni que les experiences que nous avons rapportées, ni même que les raisonnemens qu'il auroit employés, prouvassent rien de décisif en sa faveur, & qu'enfin il ne regardoit son opinion que comme une opinion, à laquelle il ne desiroit que la vraisemblance. Il y a peu de matieres en Phisique, qui ne donnassent lieu à des Philosophes sensés d'en dire autant.

SUR LE CACHOU.

V, les M.
P. 227.

Comme les Naturalistes ne savent pas bien ce que c'est que ces petits grains noirs dont la matiere vient des Indes, & qu'on appelle du Cachou, c'est aux Chimistes à le reconnoître. M. Bolduc est persuadé par toutes les Analises qu'il en a faites que c'est un suc vegetal. L'Extrait que l'on en tire par l'Esprit du vin est en plus grande quantité, & d'une qualité plus forte que celui qu'on tire par l'Eau, marque que c'est le souffre ou la partie resineuse qui domine dans ce Mixte.

SUR L'ANALISE DES CLOPORTES.

Les Cloportes sont des Insectes si connus, qu'il seroit inutile d'en faire la description. Seulement est-il bon de remarquer que M. Lémery a reconnu sûrement contre l'opinion de quelques Auteurs, qu'elles sont vivipares. Il croit qu'il y en a de deux especes, les Domestiques qu'on trouve sur les toits, dans les Caves, dans les crevasses des Murs, enfin dans les lieux humides, & salpêtreux, & les Sauvages, qui vivent dans les Bleds, dans les Bois, dans les fentes des vieux Arbres. Ces dernieres

— sont les plus petites , & on les employe beaucoup moins en Medecine. Les Domestiques sont préférées parce qu'elles paroissent plus empreintes d'un sel salpêtreux , dont elles se sont nourries , & qui fait toute leur vertu. C'est ce sel qui les rend utiles dans les occasions où il s'agit d'ouvrir & de résoudre , comme dans la Nephétique , dans la Jaunisse , dans les Ecouelles , dans l'Esquinancie , &c.

M. Lémery a tiré des Cloportes domestiques par la distillation un sel volatil tout semblable à celui du Vipere , & dont on peut se servir dans les mêmes maladies , & en même dose. L'Esprit de Cloporté a la même vertu , puisque ce n'est que ce sel volatil , qui nage dans un flegme. Il vient des Cloportes , comme des Viperes , & plus généralement comme de tous les autres animaux , une huile noire & foetide , empreinté aussi d'un sel volatil. Cellecy ayant été mêlée avec deux fois plus d'Esprit de Nitre désflegmé , il s'est fait une grande effervescence , & M. Lémery a crû même appercevoir un peu de feu , mais embarrassé , & comme absorbé par l'épaisseur & la noirceur de l'huile. Cette experience ressembleroit à l'inflammation causée par le mélange de l'Esprit de Nitre , & des Huiles essentielles de certaines Plantes , dont il a été parlé dans l'Hist. de 1702 * , & dépendroit du même principe , c'est à dire de l'extrême avidité avec laquelle des Souffres bien dépouillés d'Acides , s'en chargent. Il pourroit seulement y avoir une difference que M. Lémery a remarquée. C'est que si l'on ne soupçonne pas d'Alcali dans les Huiles essentielles des Plantes , au lieu qu'on peut croire qu'il s'en trouve dans des Huiles d'Animaux , qui ont été tirées par la Cornue à un grand feu , car il y a beaucoup d'apparence que c'est le feu qui fait ces Alcali. Ainsi il n'y a que l'experience des Huiles des Plantes , qui prouve que ces Alcali ne sont pas les seules matieres capables de faire effervescence avec les Acides.

Le Charbon qui reste des Cloportes distillées dans la Cornue ayant été calciné , M. Lémery a trouvé du Fer

* p. 66.
& suiv.

40 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
dans ces cendres. Il en avoit trouvé aussi dans des cendres
provenues d'autres Animaux , mais cela ne lui est pas
toujours arrivé. Il n'en a pû tirer de la Corne de Cerf, de
l'Yvoire, des Yeux d'Ecrevisses, des Coquilles d'Huitres,
au lieu que jusqu'ici on en a toujours découvert dans des
Cendres de Vegetaux. Peut-être en reconnoissant à force
d'experiences les matieres où il se trouve du fer, & celles
où il ne s'en trouve point, on viendra à découvrir pour-
quoi il est plutôt dans les unes que dans les autres.

SUR LES ACIDES MINERAUX ET VEGETAUX.

V. les M.
P. 354.

Nous venons de voir que le Souffre qui entre dans la
composition des Metaux, du moins des Metaux im-
parfaits, est précisément le même que celui qui entre
dans la composition des Plantes, mais sur des experiences
faites & rapportées par M. Homberg, on pourroit croire
que l'Acide Mineral & le Vegetal seroient fort diffé-
rens.

Que l'on verse sur de l'Esprit d'urine qui est un Alkali
volatil une quantité à peu près égale de Vinaigre distillé,
qui est un Acide vegetal, il ne se fera ni ébullition ni ef-
fervescence, & cette tranquillité des deux liqueurs mê-
lées ensemble durera, jusqu'à ce que la quantité de l'Es-
prit d'urine soit fort diminuée, ou celle du Vinaigre di-
stillé fort augmentée. Mais si sur de l'Esprit d'urine, quelle
qu'en soit la quantité, on verse un Acide mineral, comme
de l'Esprit de Sel, ou Nitre, n'y en eût-il qu'une goutte,
aussi-tôt il se fait une ébullition, plus ou moins grande,
selon qu'il y a plus ou moins d'Acide par rapport à la
quantité de l'Alkali. M. Homberg rapporte une autre ex-
perience pareille, & qui prouve la même chose.

Cependant il ne prétend pas que les Acides Minéraux
& Vegetaux soient differens. D'où les Plantes tirent-elles
leurs

leurs Acides que de la Terre, & n'y font-ils pas Mineraux ? mais il veut que ces Acides & par eux-mêmes & lorsqu'ils entrent dans la composition de quelque Mineral soient comme des paquets de plusieurs Aiguilles couchées les unes sur les autres, au lieu qu'après qu'ils ont esté sucés par les racines des Plantes, & qu'ils ont circulé par leurs canaux étroits, les Aiguilles se sont séparées & par là ont perdu la force qu'elles tiroient de leur union. Cette seule idée suffit pour donner la clé du petit Système de M. Homberg sur cette matière.

Quelque forts que puissent être les Acides minéraux parce qu'ils sont en paquets, ils ne laissent pas, pour ainsi dire, d'avoir de la peine, lorsqu'ils ont affaire, non à des Alkali volatils distillés, tels que l'Esprit d'urine, & qui sont en quelque sorte nuds & entierement exposés à leur action, mais à d'autres Alkali volatils non distillés, encore envelopés d'huiles, ou enfin de parties étrangères. C'est ainsi que M. Homberg dit qu'il a vû un mélange d'Esprit de Nitre & de Mouches Cantharides faire pendant plus de deux ans une petite & lente ébullition. L'occasion qui a mis sous ses yeux un fait si remarquable mérite qu'on y fasse dans son Memoire une attention particuliere. Il s'agissoit d'un remede pour la Gravelle & pour la Pierre.

M. Homberg en suivant la Theorie presente en a trouvé un pour un mal sans comparaison moins important, c'est pour les Tannes du Visage, mais les remedes qui sont les fruits du raisonnement en doivent être plus précieux, ne fût-ce que par leur rareté. Il a trouvé par experience que le Fiel de Beuf étoit un Savon semblable au Savon artificiel, c'est à dire un composé d'une Huile, & d'un Alkali. D'un autre côté il étoit persuadé que les Tannes étoient une portion huileuse & saline de la Sueur, arrêtée dans les mailles de la Peau. Sur cela, il a conçu que le Fiel de Beuf dépouillé de sa partie huileuse & réduit à sa seule partie alcaline, devoit être un dissolvant pour les Tannes.

144

M Jussieu, Medecin de Lyon, & Successeur de l'illustre M. Tournefort au Jardin Royal, a donné à l'Academie la Description d'une Mine de Cuivre & de Vitriol, qui est aux environs de Lyon.

V. les M.
p. 106.

Nous renvoyons entierement aux Memoires L'Ecrit de M. Homberg sur le Mercure, destiné à faire partie de ses Essais de Chimie.



BOTANIQUE.

SUR UNE VEGETATION

SINGULIERE.

V. les M.
p. 64.

Nous ne repeterons rien ici du Fait rapporté par M. Marchant, mais comme pour l'expliquer il a recours à une supposition particuliere qui appartient au Siftême général de la multiplication des Plantes, nous en parlerons avec quelque étendue, & nous tâcherons de l'éclaircir.

Les Oeufs des Animaux, & les Graines des Plantes, c'est la même chose; un Animal & une Plante contenus en petit l'un dans son Oeuf, l'autre dans sa Graine, viennent à se développer, & alors on dit qu'ils naissent; jusqu'à tout est égal de part & d'autre. Mais les Plantes ont des manieres de naître qui ne leur sont pas communes avec les Animaux; il y en a plusieurs qui peuvent venir de *bouture*, une branche de Figuier, par ex. mise en

terre, pousse des racines, & devient une Plante entière.

On conçoit sans peine qu'un Corps, quelque petit qu'on le suppose, soit organisé, & croisse ensuite en conservant la disposition de ses parties, mais qu'une partie devienne en croissant le tout entier, c'est ce qui ne se conçoit pas aisément, car où peut-elle prendre les autres parties organiques différentes d'elle ? où la branche de Figuier a-t-elle pris des racines qui n'appartenoient qu'au Figuier entier, & qu'elle n'a jamais dû contenir en petit ? on n'imagine point que de la jambe d'un Animal, il pût jamais se former son Cœur, son Poumon, enfin tout l'Animal.

Puisqu'on ne peut concevoir qu'une partie organisée se forme de nouveau, & que les Philosophes sont obligés d'en supposer toujours la préexistence en petit, il faut nécessairement admettre dans la branche de Figuier de petites racines qui ne seroient jamais développées, si elle n'avoit été séparée de l'Arbre, & mise en terre. Cette supposition doit passer d'autant plus aisément, que pour faire de la Branche un Arbre entier il ne faut ajouter à tout ce qu'elle eût montré naturellement que des racines cachées, & que ces racines qui n'auroient point paru si la branche n'eût point été séparée, & qu'elle fût demeurée toute entière à l'air, peuvent être déterminées à paroître par l'attouchement de la terre dans la partie qui en est embrassée. Les racines sont infiniment moins différentes du tronc, qu'une partie organique d'un Animal ne l'est de toute autre partie organique.

Toutes les manières dont les Plantes peuvent se multiplier autrement que par graines, se réduisent pour le Système physique à celle que nous venons d'expliquer, & l'on verra dans le Memoire de M. Marchant diverses expériences qui prouvent que de très petites parties de Plantes, & qui en ont été séparées de différentes façons, vegetent & rendent la Plante toute entière. Ainsi une Plante contient des graines dans toutes ses parties, ou ; ce qui revient au même, c'est un amas & un composé d'un nombre infini de petites Plantes pareilles, qui ne

paroissent que comme parties de ce Tout, & ne montrent point ce qui pourroit les rendre elles-mêmes des Touts parfaits. Ce bizarre principe de la Philosophie Scolastique sur la maniere dont l'Ame est dans le Corps, *que le Tout est dans le Tout, & le Tout dans chaque partie*, est donc exactement vrai à l'égard des Plantes, & il est assés remarquable qu'on trouve réellement dans la matiere ce qui avoit été imaginé comme une propriété particuliere & incomprehensible de l'Esprit.

Après cela, il est aisé d'apercevoir en general la cause des Vegetations singulieres, ou des Plantes monstrueuses. Il est évident que la maniere dont se forment les Animaux monstrueux expliquée dans l'Hist. de 1702 * ne produiroit pas des Plantes qui le fussent, mais si par quelque accident une partie d'une Plante met au jour ce qu'elle n'y doit pas mettre comme simple partie, & qu'elle devienne une espece de Tout à part, quoi qu'attachée au grand Tout, c'est un Monstre. On en avoit déjà vû un exemple dans les Mem. de 1707. * La structure mécanique des Plantes étant beaucoup plus simple que celle des animaux, & par consequent moins susceptible de bisarreries fortuites, les Monstres de Botanique sont aussi en moindre quantité, & moins surprenants.

SUR LA CIRCULATION DE LA SEVE DANS LES PLANTES.

EN 1667, dès la naissance de l'Academie, feu M. Per-
raut, homme plein de vuës, & de vuës le plus sou-
vent hardies, qui sentoient l'esprit original, avança cette
proposition alors fort surprenante, que la sève circule
dans les Plantes, comme le sang dans les Animaux. On
ne savoit pas encore qu'un Medecin de Hambourg l'avoit

publiée deux ans auparavant. Un an & demi après , M. Mariotte ayant été reçu dans la Compagnie, mit en avant la même proposition comme toute nouvelle, mais il trouva que M. Perraut l'avoit prévenu, & s'il fut bien aisé que cette conformité fût une espece de preuve du Siftême , peut-être fût-il fâché qu'on lui en eût enlevé le premier honneur. L'Illustre M. Malpighi, en qui le genie de l'invention a tant brillé, a été aussi dans la même pensée. M^{rs} Perrot & Mariotte l'ont tous deux exposée au Public avec toutes ses preuves dans leurs *Essais de Physique*. Cependant l'Académie, qui se pique d'une sage lenteur, n'en a jamais été pleinement convaincuë, & M^{rs} du Clos & Dodart entre autres ont toujours protesté contre cette opinion.

M. Dodart convenoit bien qu'il y a un suc qui de la racine des Plantes monte jusqu'aux extremitez des branches, & même des feuilles, & un suc qui de ces extremitez descend aux racines. Une de ses principales raisons étoit que si on transplante en un même jour deux Arbres de même espece, après leur avoir coupé leurs branches & leurs racines, si ensuite, les deux Arbres ayant repris, on retranche à l'un des deux quelques-unes des nouvelles branches de chaque année, on verra qu'il profitera beaucoup moins que l'autre par le tronc, & par les racines, ce qui prouve que ces parties reçoivent une nourriture des branches. Il concevoit que cette nourriture étoit plus aérienne, puisqu'elle étoit formée des humidités de l'air, de la rosée, &c. au lieu que celle qui venoit des racines étoit plus terrestre. Mais enfin il prétendoit que le suc montant & le suc descendant n'étoient pas le même, ou que celui qui avoit monté ne redescendoit point, & reciproquement, & que par conséquent il n'y avoit point de circulation.

M. Magnol a attaqué ce Siftême encore plus directement en répondant en détail à tous les raisonnemens & à toutes les experiences qui composent le *Traité* de M. Perraut sur ce sujet.

Ses raisonnemens sont tirés la plupart de l'Analogie des Plantes & des Animaux, qui rend égale de part & d'autre la nécessité de la circulation. Mais cette Analogie, quoique specieuse, & en quelque façon séduisante, quand on veut bien s'y prêter un peu, ne conclut pas beaucoup quand on la traite à la rigueur, & il n'est pas difficile à M. Magnol de répondre à tout ce qu'elle a fourni. Nous ne nous arrêterons pas sur cet article, parce que ce sont de simples probabilités, qu'il est également aisé d'établir & de détruire:

Les experiences sont plus décisives, ou du moins elles le devroient être, mais souvent il n'est pas plus facile d'en faire une bien incontestable & bien concluante qu'une démonstration phisique, qui consisteroit en un simple raisonnement. De 25 Experiences que M. Perraut avoit rassemblées pour appuyer son système, M. Magnol en nie la plupart, & il prétend que les autres ne prouvent rien. Nous ne nous arracherons qu'à tout ce qu'il y a dans tout cela de plus important.

M. Perraut avoit avancé que quand de jeunes rejetons avoient été gelés ou broutés par les Animaux, le reste de l'Arbre languissoit ou mouroit, parce que les mauvaises qualités contractées par ces accidens se communiquoient à tout le corps de la Planre par le moyen de la circulation; que par la même raison le Guy, & la Mouffe tuoient les Arbres; que quand on leur ôtoit entierement leurs feuilless, leurs fruits ne profitoient pas tant, parce qu'ils étoient privés du suc qu'elles devoient leur renvoyer; que si on fait une ligature à la tige d'une Plante qui soit de nature à rendre beaucoup de suc, comme le grand Tithimale, la tige s'enfle au dessus de la ligature, ce qui prouve & qu'il y a un suc qui descend, & que ce suc est plus grossier & plus épais que celui qui monte, puisque celui-ci n'a point causé de gonflement; que si l'on coupe la tige d'un Pavot quatre doigts au dessous de sa tête, lorsqu'elle commence à meurir, on voit fortir un suc fort blanc de bas en haut, & un jaunâtre de haut en bas.

M. Magnol nie nettement tous ces faits. On ne doute pas que M. Perraut ne les eût vus , mais apparemment il ne les avoit pas assez repetés , assez tournés de differens sens , & pour ainsi dire , assez chicanés. Il faut se défier d'une experience où l'on voit ce qu'on veut voir.

Il y a plusieurs autres faits que M. Magnol reçoit , mais dont il conteste les consequences. Par ex. il y a des Arbres comme le Sureau , la Vigne , &c. dont les branches ayant été couchées en terre y prennent racine , après quoi si on les coupe , & qu'on les sépare de l'Arbre , elles deviennent elles-mêmes de nouveaux Arbres , dont la position est contraire à ce qu'elle eût été naturellement. Il est bien vrai qu'alors la sève qui doit nourrir l'Arbre a un mouvement contraire à celui qu'elle eût eu dans les mêmes canaux , mais cela prouve seulement que ces canaux la laissent indifferemment couler d'un sens ou d'un autre , selon qu'ils sont posés par rapport à la terre. Cette indifférence sera encore plus sensible , si on peut faire , & même assez facilement , comme quelques Auteurs l'ont écrit , que les racines d'un jeune Tilleul deviennent ses branches , & ses branches ses racines.

Aux experiences par lesquelles M. Perraut fait voir qu'il y a differens sucs dans les Plantes , M. Magnol répond aussi en convenant qu'ils y sont , & qu'ils y doivent être , puisqu'il y a des parties de differente nature à nourrir , mais en niant que ces sucs montent , & puis descendent pour remonter.

M. Perraut avoit conçu que ceux qui retournoient des extrémités des branches à la racine étoient destinés à la nourrir , au lieu que ceux qui partent de la racine sont destinés à nourrir le reste de l'Arbre. M. Magnol combat cette pensée par plusieurs experiences. 1°. Une Plante vivace coupée jusqu'à la racine repousse avec vigueur , quoique suivant cette hypothèse la racine privée de toute nourriture dût mourir. 2°. De même un Olivier coupé rés terre pousse quantité de rejettons qui deviennent Arbres. 3°. Une Bulbe mise en terre pousse plusieurs racines avant

les feuilles. Ce n'est donc pas le suc descendu des feuilles qui nourrit les racines.

La circulation par laquelle les suc s'ont plus brisés ; plus atténués , & en quelque sorte plus tourmentés que par un simple mouvement direct , engageoit M. Perraut à dire que les Plantes ont besoin d'une nourriture extrêmement préparée. M. Magnol ne convient pas de la nécessité de cette grande préparation. Il a fait tremper pendant une nuit une tige de Tubereuse en fleur dans du suc de *Solanum racemosum* mêlé d'un peu d'eau. Ce suc est de couleur de laque , & la Tubereuse est devenue d'un beau couleur de rose. Il ne paroît pas que les suc qui ont fait ce changement de couleur , & qui par conséquent ont très-intimement nourri la Plante , aient pu être fort altérés ni fort travaillés. On fait aussi qu'il ne faut qu'un peu d'eau pour remettre en vigueur une Plante arrachée de terre qui commence à se flétrir , & quelquefois même pour la faire vegeter.

Après tout cela cependant il faut avouer qu'il reste à M. Perraut quelques preuves qu'il n'est pas aisé de détruire. Il avoit arraché de terre plusieurs Plantes pareilles & entières avec leurs racines , & il en prit une dont le tronc se divisoit en deux branches ; il la plongea dans l'eau seulement par le bout d'une des deux branches, elle y fut quelques jours , & non seulement elle s'entretint fraîche , mais elle poussa de nouvelles feuilles du côté qui n'étoit pas mouillé , tandis que les autres Plantes se desséchèrent entierement. D'autres Auteurs ont ajoutés une experience semblable. Quand on peut rencontrer par hasard un Arbre porté par deux grosses racines dont l'une est découverte d'environ un pied & demi , on la coupe à 4 doigts de terre , de sorte que sa partie supérieure qui est de plus d'un pied doit perir , si elle ne tire sa nourriture que de la terre , car elle n'a plus de communication avec elle. Cependant loin de perir elle pousse l'année suivante des branches & des feuilles. Ces faits qui ne sont point contestés , marquent un mouvement par lequel la
Sève

Sève se porte de haute en bas. Mais est-ce un mouvement de circulation ? voici un autre fait qui le prouve , ou du moins qu'il y a un suc qui monte , & un autre suc différent qui descend par d'autres canaux.

On a pris un morceau d'un petit Rameau d'Orme sans nœuds , long environ de 3 pouces , & on lui a mis à chaque bout un entonnoir fait avec de la cire ; on a coupé le rameau en deux , & on en a versé de l'eau dans les entonnoirs. Elle n'a passé que dans le morceau de bois dont l'entonnoir étoit appliqué au bout qui regardoit les branches. Après cela , au lieu d'eau on a mis dans les entonnoirs de l'esprit de vin , qui a distillé promptement par le morceau par où l'eau n'avoit pû passer , & n'a passé que long-temps après par celui qui avoit laissé couler l'eau. La même chose est arrivée à d'autres especes de bois. Vû la position qu'avoit les deux morceaux du rameau , lorsqu'il faisoit partie de l'Arbre , M. Perraut a conclu que les canaux qui laissoient passer l'Esprit de vin étoient *montants* , & ceux qui laissoient passer l'eau *descendants* , & que la liqueur qui couloit dans les canaux montants étoit plus spiritueuse & plus subtile , & celle des canaux descendants plus aqueuse , plus grossiere. Jusquelà tout est assez prouvé , du moins pour quelques especes d'Arbres , & ensuite c'est une conjecture qui peut passer pour vraisemblable , que ces deux liqueurs différentes ne sont que la même , qui étant remplie de parties spiritueuses , lorsqu'elle a monté de la racine , en a laissé en chemin la plus grande quantité pour la nourriture du tronc & des branches , & après cela n'a rapporté des extremités des branches que ses parties les plus grossieres mêlées avec les humidités de l'air , ou avec les eaux de la pluye. M. Perraut imaginoit de plus que cette Sève qui retourne devoit être plus propre à la nourriture des racines.

Sur cette matiere , comme sur beaucoup d'autres , on peut encore attendre les lumieres du tems. Il est difficile en Phisique d'aller jusqu'à un Système , il l'est même quelquefois d'en détruire un absolument.

DIVERSES OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

Les Religieux de Joyenval ayant mangé de la Jusquiame dans une Salade le Mercredi saint au soir, ils dormirent très mal la nuit, eurent de grands maux de tête, & des retentions d'urine, & le lendemain ils étoient comme des gens yvres, ne pouvant lire, ni presque parler; & il leur fut absolument impossible de dire l'Office du Jeudi saint. C'est de M. Chevalier que l'Academie aprit cet accident.

II.

Un Orme des Tuilleries qui à l'entrée du Printemps de 1708 étoit entierement dépouillé de son écorce depuis le pied jusqu'au branches, ne laissa pas de pousser sa sève dans toutes ses parties, & d'entretenir ses feuilles pendant tout l'Eté suivant, avec moins de vigueur cependant que les autres Ormes. M. du Puis premier Jardinier des Tuilleries le fit arracher en Autonne, persuadé qu'il ne pouvoit plus subsister à l'avenir. C'est dommage qu'on ne l'ait pas laissé vivre autant qu'il auroit pû, mais les interets de la Phisique, & ceux de la beauté du Jardin se sont trouvés differents. M. Parent a montré à l'Academie une attestation de M. du Puis sur ce fait, qui meritoit effectivement d'être bien certifié, car on a crû jusqu'apresent l'écorce beaucoup plus necessaire à la vie des Arbres.

III.

M. Magnol sur l'usage de la Moëlle des Plantes a rapporté cette experience. En Languedoc on ente les Oliviers en Ecusson au mois de Mai, quand ils commencent d'être en sève au tronc, ou aux grosses branches. On coupe l'écorce horizontalement de la largeur de 3 ou 4

doits tout autour du tronc ou des branches , un peu au dessus de l'ente , de sorte que le bois ou corps ligneux est découvert , & que l'Arbre ne peut recevoir de nourriture par l'écorce. Il ne perd pourtant pas encore ses feuilles , elles sont nourries par le suc , qui étoit déjà monté. Ce qu'il y a de remarquable , c'est que l'Arbre porte dans cette année des fleurs & des fruits au double de ce qu'il avoit coutume d'en porter. Ensuite les branches au dessus de l'ente , étant privées du suc qui doit monter par l'écorce , meurent , & les rejettons qui sortent de l'ente font un nouvel Arbre. Il paroît par-là que le suc qui monte par l'écorce n'est pas celui qui fait les fleurs & les fruits , que c'est donc celui qui a passé par la Moëlle , & y a été préparé , que la quantité du suc qui devoit naturellement passer par la Moëlle a été augmentée de celui qui ne pouvoit plus passer par l'écorce , & que c'est là ce qui a causé la multiplication des fleurs & des fruits. En effet la Moëlle des Plantes est , comme celle des Animaux , un amas d'une infinité de petites Vésicules , qui paroissent destinées à filtrer & à travailler un suc plus finement qu'il ne seroit nécessaire pour la seule nourriture du bois. M. Magnol a observé que les Plantes qui ont beaucoup de Moëlle , comme le Rosier , le Troëscne , le Lilac , ont aussi beaucoup de fleurs & de graines , & que dans les Plantes ferulacées la Moëlle monte de la tige jusqu'à la semence ; il dit même que les longues semences du *Myrrhis odorata* , n'étant pas encore mûres , ne sont visiblement que de la Moëlle.

M Marchant a donné la Description du *Dracunculus* , sive *Serpentaria triphylla Brasiliiana* , de l'*Heliotropium maius* , & de l'*Helenium vulgare* , ou *Enula Campana* , Aulnée.

M. Chomel a donné celle de l'*Apium Pyrenaicum Thapsiæ facie* , Inst. Bot. ou *Seseli Pyrenaicum Thapsiæ facie* , D. Fagon Schol. Bot. Parad. Bot.

[2 P. 42.] **M**. Jussieu dont nous avons déjà parlé cy-dessus * successeur de l'amour de M. Tournefort pour la Botanique, aussi bien que de sa place au Jardin Royal, a fait voir quelques Plantes qu'il a cruës nouvelles, & entre autres une espece de *Chondrille*, dont il a donné la description.



A L G E B R E.

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES.

L'Hist. de 1708 a déjà expliqué * & la fameuse Regle de M. Descartes pour la Construction des Egalités déterminées, & les défauts que M. Rolle y trouve, malgré l'applaudissement avec lequel elle a été reçûe par les Geometres, & même malgré le grand nombre de succès qu'elle a eû jusqu'à present dans la pratique. En un mot il n'y a aucun inconvenient possible où M. Rolle ne prétende qu'elle tombe quelquefois, & même pour ne rien dissimuler, pas trop rarement; de sorte que les Geometres qui l'ont un peu maniée, & qui n'en ont pas senti les défauts, ont dû, ou être bien heureux à tomber dans les cas qui lui sont favorables, ou en savoir éviter les écueils avec beaucoup d'adresse, ou se prendre à eux mêmes des embarras qu'elle leur produisoit, & ne s'en pas vanter. M. Rolle a continué cette année le détail de ces défauts qu'il avoit commencé l'année dernière. L'idée generale

V. les M. p.
320 & 419.

* p. 71. &
suiv.

que nous en avons donnée est suffisante, & nous ne la repeterons pas.

Ensuite il a voulu remonter aux sources des inconveniens, & il a commencé à en découvrir une. C'est l'*Évanouissement* des Inconnuës.

Quand on travaille à résoudre un Problème, on en exprime chaque condition par une Equation algebrique, où il entre des quantités inconnues differemment mêlées & combinées avec les Connues. Comme on ne cherche qu'à diminuer le nombre des Inconnuës, & à s'en delivrer dans le Calcul, lorsqu'une même Inconnuë ce qui arrive presque toujours, se trouve dans plus d'une Equation, on tire de deux Equations sa valeur exprimée par des lettres differentes d'elle, après quoi on ne se sert plus dans les operations que de cette valeur, & l'Inconnuë est entierement chassée du Calcul, ou *évanouïe*. L'Equation où l'Inconnuë évanouïe ne se trouve plus, s'appelle la *Reduite*. Il est visible que si deux Equations qui auroient chacune deux Inconnuës, & qui par consequent seroient indéterminées, avoient deplus les mêmes Inconnuës, il n'y auroit donc qu'à en faire évanouïr l'une ou l'autre, pour avoir une Reduite qui seroit une Equation déterminée. C'est pour ces sortes d'Equations, ou pour la construction des Problèmes qui en dépendent, que M. Descartes avoit imaginé sa Regle. Par consequent si dans la Methode d'évanouïr les Inconnuës il y a quelque defectuosité, il ne sera pas étonnant, que celle de la Construction des Egalités s'en ressente.

On n'a point encore douté que la Reduite ne contînt toutes les conditions des deux Equations *primitives* ou *generatrices* dont on l'a formée, car on ne l'a formée qu'en concluant que deux quantités étoient égales entre elles, puisqu'elles étoient égales à unetrouisième, conclusion la plus évidente & la plus infallible sur laquelle l'Esprit humain puisse compter. Cependant M. Rolle prouve par un assés grand nombre d'exemples que la Reduite peut être fort differente des generatrices, que par ex. & c'est

uniquement sur quoi il insiste jusqu'à présent, deux generatrices exprimant les conditions d'un Problème impossible, la Reduite en pourra exprimer un possible. Cela se reconnoît en ce que la Reduite ayant des Racines réelles quand on vient à les appliquer aux generatrices, on voit ces Equations n'avoir plus que des Racines imaginaires ou aboutir à des contradictions. Or on fait qu'en Geometrie le réel, & l'imaginaire, ou le contradictoire, sont les marques certaines du possible & de l'impossible. D'où peut venir cette bisarrerie ? où la Reduite peut-elle avoir pris des Racines, non seulement differentes de celles des generatrices, mais d'une nature toute contraire ? comment l'impossibilité & la contradiction des generatrices produit-elle de la possibilité & de la réalité dans la Reduite ? Nous allons tâcher de le faire entendre par des reflexions assez simples, & si simples, que peut-être sera-t-on surpris de l'avoir esté.

Que l'on suppose une Inconnüe prise 2 fois égale à 5 : cette Equation est impossible en nombres entiers, c'est à dire qu'il est impossible que l'Inconnüe soit un nombre entier, & cela est très évident, puisqu'étant prise 2 fois elle seroit un nombre pair, qui ne peut être égal à 5. Que l'on suppose la même Inconnüe prise 4 fois égale à 7, l'Equation est encore impossible par la même raison. Maintenant que l'on dispose ces deux Equations de maniere que leur second membre soit Zero, ce qui est la forme la plus ordinaire que l'on donne aux Equations, & qu'ensuite on les ajoute l'une à l'autre, elles produiront une troisiéme Equation dont le second membre sera encore Zero, parce que deux Zero sont Zero. Mais cette troisiéme Equation donnera l'Inconnüe prise 6 fois égale à 12, c'est à dire l'Inconnüe égale à 2, & par consequent ce sera là une Equation très possible & très réelle produite par deux Equations impossibles & contradictoires.

L'origine de cette difference entre les deux premieres Equations & la troisiéme est bien claire. Deux nombres impairs mis ensemble en font un pair, & la réunion des

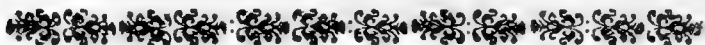
deux premieres Equations a entierement corrigé tout ce qui faisoit l'impossibilité de chacune separément. Cet exemple, méprisable peut-être par son trop de simplicité & d'évidence, n'est ici que pour faire appercevoir en general comment dans des cas plus compliqués l'impossible peut produire le possible.

L'impossibilité des generatrices peut tenir à differentes choses, qui disparoîtront par leur réunion dans la Reduite. Par ex. cette impossibilité venoit de ce que l'Inconnuë qu'on a évanouïe étoit élevée au quarré, & si c'eût été un simple plan, l'Equation étoit possible; dès que l'évanouïssment a chassé ce quarré, la Reduite doit être toute réelle. L'impossibilité étoit fondée sur ce que chacune des generatrices avoit une Racine imaginaire, or le produit de l'imaginaire par l'imaginaire peut être réel; si en fermant la Reduite on a multiplié les deux Racines imaginaires l'une par l'autre, il peut donc n'y rester plus rien que de réel. Plus generalement encore, on voit en y faisant un peu d'attention, que tous les rapports, ou pour mieux dire, toutes les combinaisons de rapports que les grandeurs connuës ou inconnuës ont entre elles dans les Equations generatrices, ne passent pas dans la Reduite, il s'en éclipe quelques-uns avec l'Inconnuë qui s'évanouït, il s'en introduit d'autres par la nouvelle face que prend la Reduite, & il peut arriver assés naturellement que l'impossibilité des deux generatrices s'en aille avec les rapports qui s'en vont, ou soit réparée par ceux qui surviennent.

Ceci peut donner une démonstration *à priori* d'une chose que M. Rolle n'a fait qu'avancer dans son Memoire. Il dit que quand il y a plus de deux generatrices, qui conspirent à donner une Reduite, ce qui arrive souvent, plus il y en a, plus le nombre des inconveniens, que produit la Methode, peut être grand. C'est que le nombre de ces rapports dont nous venons de parler sera plus grand aussi. Il peut s'y joindre encore d'autres causes d'inconveniens.

Ce qui a pû tromper , c'est que quand des Génératrices on tire la Reduite , il est certain qu'on raisonne bien en unsens ; on tire une Equation qui est vraye , & qui doit l'être dans toute son étendue , mais ce n'est pas à dire qu'elle renferme tout ce qui étoit dans ses generatrices , ni même précisément & parfaitement tout ce qui leur étoit commun , & si on le prétend , on est dans l'erreur , parce qu'on tire une conclusion trop forte. En un mot , il est sûr que l'Egalité qu'on déduit est bien déduite , mais non pas qu'en la comparant à celles dont elle est déduite , on n'y doive trouver rien de changé.

S'il peut naître des effets bisarres du seul changement de deux generatrices en une Reduite , ou , ce qui est la même chose , de l'évanouissement d'une Inconnue , il ne doit pas être étonnant que l'introduction d'une Inconnue nouvelle produise des nouveautés , & soit sujette à des inconveniens imprévus. Or cette introduction se fait toutes les fois que l'on veut construire selon la Regle de M. Descartes une Equation déterminée. Il n'en faut pas davantage pour faire apercevoir en general la source purement logique des erreurs. Il ne nous est pas permis de suivre M. Rolle jusque dans le geometrique.



GEOMETRIE.

SUR DES FIGURES EGALES EN SURFACE COURBE , ET EN SOLIDITE.

Archimede , l'un des plus puissants Genies , qui ayent
 V. les M. jamais été en Mathematique , a découvert le pre-
 mier que la surface d'une Sphère , & celle du Cilindre
 p. 113. circonscrit ,

circonscrit , prise sans les deux bases planes , sont égales, & même *continuellement* égales, c'est-à-dire, non seulement dans leur tour, mais encore dans leurs parties correspondantes, lorsque ces deux Corps sont coupés en tranches par des lignes perpendiculaires à leur axe commun. Il découvrit encore que la solidité de la Sphère est à celle de son Cilindre circonscrit comme 2 à 3 , & tout le monde fait qu'il voulut que ces deux figures fussent représentées sur son tombeau, comme des monuments éternels de sa gloire. A la Sphère, & au Cilindre, il ajouta le Cone droit, qu'il compara à ces deux autres Corps , tant en surface courbe qu'en solidité.

Il fit encore plus. Il créa de nouveaux Corps pour les étudier, ce furent les Solides qu'il conçut que formeroient les trois Sections Coniques en tournant autour de leurs Axes. Elles lui en produisirent quatre , parceque l'Ellipse a deux Axes, & même elles en auroient dû produire cinq, puisque l'Hyperbole a deux Axes aussi, mais Archimede ne considéra la revolution de l'Hyperbole qu'autour de son Axe transversal, ou *premier*, & M. Wallis est le premier qui l'ait fait tourner autour de l'Axe conjugué; il a nommé *Cylindroïde* le Solide qu'elle forme par cette revolution. Archimede compara les solidités de ses nouveaux Corps à celles de la Sphère, du Cilindre, & du Cone, mais non pas les surfaces; du moins il ne nous en reste rien dans les Ecrits qui sont venus de lui jusqu'à nous.

M. Huguens dans son fameux Traité de la Pendule donna les rapports de ces surfaces, excepté celle du Cylindroïde, mais sans les démontrer. La methode qui l'y avoit conduit lui parut digne d'être cachée. M. Parent se piqua de démêler le mystere, & y réussit. Il trouva, outre les surfaces des Solides d'Archimede, celle du Cylindroïde de M. Wallis, & il y reconnut cette propriété remarquable, que quand les deux Axes conjugués de l'Hyperbole qui a produit ce Solide, ont une certaine proportion avec ceux d'un Sphéroïde *aplati* qui y sera inscrit, les surfaces de ces deux Solides seront continuellement éga-

58 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
les , comme le sont celles de la Sphère , & du Cilindre circonscrit. La proposition d'Archimede peut même n'être qu'un simple Corollaire de celle de M. Parent , parce qu'il est fort aisé de changer le Cylindroïde en Cilindre , & le Spheroïde en Sphère.

M. Parent trouva aussi un rapport continuel & constant, qui est entre une portion quelconque de la surface d'un Cone droit , & sa projection sur sa base , & il presenta en 1697 toutes ces recherches à l'Academie , où il n'avoit pas encore été reçu.

Ils s'avisa ensuite de faire tourner un Quart de cercle autour du diametre auquel la Tangente de son point du milieu seroit parallele. Cela forme une espece d'Anneau large , toujours plus élevé dans son milieu. Il y inscrivit une Sphère, il s'aperçut que non seulement la surface intérieure de l'Anneau , & celle de la Sphère , mais encore leurs solidités étoient continuellement égales , ce qui lui parut avec justice plus singulier que tout ce qu'il avoit trouvé jusque là. C'étoit pour la premiere fois que cette double égalité entre les deux mêmes Corps paroissoit en Geometrie. Aussitôt M. Parent songea à la trouver entre d'autres Corps pris à volonté , & il en fit un Problème tout nouveau. Il supposa une Sphère déterminée avec laquelle ils devoient avoir la double égalité , & par conséquent l'avoir entre eux.

* P. 71. &
72. Nous avons dit dans l'Hist. de 1706. * la raison essentielle pour laquelle le Cercle est de toutes les Courbes possibles celle qui dans un circuit égal comprend le plus grand espace , & par la même raison la Sphère est de tous les Corps celui qui sous une surface égale à la plus grande solidité. Delà il suit évidemment qu'il est impossible qu'aucun Corps soit égal à une Sphère en surface & en solidité à la fois , à moins qu'il n'y ait une certaine partie de sa surface qui ne soit point comptée , & pour cela M. Parent prend des Corps tels que des Cilindres , des Cones , &c. dont la surface totale a une partie plane , & l'autre courbe , & ne compte point la partie plane. Ainsi

il ne s'agit dans ce Problème que de la surface courbe & convexe d'un Cilindre , ou d'un Cone , par ex. & on n'y comprend point leur base circulaire. Par la même raison, quand on aura trouvé un Cilindre, par ex. égal en surface & en solidité à la Sphère proposée, on saura qu'il sera impossible de trouver un Sphéroïde, un Fuseau, enfin quelque autre Corps que ce soit terminé par une seule surface courbe, qui ait cette double égalité avec ce Cilindre , car il faudroit donc qu'il l'eût aussi avec la Sphère, ce qui ne se peut.

En égalant différents Corps à la Sphère, M. Parent trouve quantité de nouvelles propriétés geometriques dans lesquelles nous n'entrerons point. Nous en détacherons seulement quelques-unes, ou des plus simples, qui serviront d'exemples, ou des plus générales, qui appartiendront de plus près au Système de la Geometrie.

Le Cilindre qui a la double égalité avec la Sphère est tel que le rayon de sa base est les deux tiers du rayon de la Sphère, & que sa hauteur est triple de ce même rayon, d'où il suit évidemment que le rayon de ce Cilindre est à sa hauteur, comme 2 à 9. & son diametre à sa hauteur, comme 4 à 9. Il est évident aussi que le diametre de la Sphère est à celui du Cilindre, comme 6 à 4, & par conséquent le diametre de la Sphère est 6, moyen proportionnel entre 4 & 9, c'est à dire entre le diametre du Cilindre, & sa hauteur, ce qui est assez remarquable.

On voit que ce Cilindre est unique, au lieu que s'il n'étoit question que de l'une ou de l'autre des égalités, on trouveroit une infinité de Cilindres différents qui la pourroient avoir avec la Sphère. Il y a deux Cones droits, qui ont avec la Sphère ces deux égalités, mais si on les cherche dans le Cone droit *tronqué*, c'est à dire dont on retranche une partie vers son sommet par un plan parallèle à sa base, on trouve une infinité de ces Cones, ou, ce qui revient au même, une infinité de Cones dont le diametre & la hauteur ont des proportions différentes, qu'il faut tronquer de maniere que les hauteurs qui leur

restent soient inégales. Cela vient de ce qu'une infinité de Cones de différentes proportions peuvent surpasser plus ou moins en surface & en solidité la Sphère proposée, & par conséquent pour retrancher leurs différents excès, les hauteurs qu'on leur laissera doivent être différentes. Cette infinité de Cones tronqués est cependant renfermée entre certaines bornes que le calcul de M. Parent détermine.

Il cherche aussi à égaler à la Sphère proposée une Sphère *tronquée*, ou une tranche de Sphère, terminée par deux cercles paralleles & égaux pris à discretion vers ses deux poles. Il semble que l'on doit trouver une Sphère d'un plus grand rayon à laquelle cette tranche appartiendra, & c'est la valeur de ce rayon plus grand qu'il faut découvrir. Mais il n'en vient aucun autre par le calcul que le rayon même de la Sphère proposée, c'est à dire que la Sphère proposée entière est elle-même la tranche qui lui est égale en surface & en solidité. Il ne faut point être étonné qu'une Sphère entière vienne au lieu d'une tranche que l'on cherchoit, car elle est une tranche pourvu qu'on imagine que c'est la Sphère moins les deux cercles infiniment petits des poles, ce qui ne la diminue point, & il est visible qu'étant ainsi conçue elle est terminée comme l'on demandoit. Mais il est assez étonnant qu'il n'y ait aucune Sphère plus grande que la proposée, & dont une partie telle qu'on la demande ait avec la proposée la double égalité. Voici la cause qu'on peut concevoir de ce paradoxe.

Que l'on détermine à une Sphère un Equateur, & des Poles, & qu'on la divise de degré en degré depuis l'Equateur vers un pole, toujours parallelement à ce grand cercle, il est assez évident que dans ces différentes tranches, toutes d'un degré, la proportion de la surface courbe à la solidité sera différente. La 89^{me}, par ex. qui comprend le pole, aura beaucoup de surface, & peu de solidité, & la 1^{re} aura beaucoup de solidité & peu de surface. En un mot, la proportion de la surface à la solidité, va toujours

en diminuant depuis le Pole jusqu'à l'Equateur. Il n'y a donc dans la demi-sphère aucune tranche où cette proportion soit la même que dans une autre tranche quelconque. Delà il suit que si à la 1^{re} tranche on joint celle qui lui répond de l'autre côté de l'Equateur, aux 2 premières pareillement les deux correspondantes, &c. aucune de ces nouvelles tranches, n'aura la même proportion de surface & de solidité qu'une autre quelconque, ni par conséquent que la Sphère entière, qui peut être prise elle-même pour une tranche, ni qu'aucune autre Sphère, puisque toutes les Sphères sont semblables. Donc il est impossible qu'une Sphère soit égale en surface & en solidité à une tranche sphérique proprement dite, & autre qu'elle-même.

Il faut bien remarquer que cette tranche sphérique, sur laquelle tombe la conclusion de nôtre raisonnement doit être telle que le raisonnement l'a supposée, c'est à dire comprendre toujours l'Equateur en son milieu, de quelque grandeur qu'elle soit. Si l'on prend une tranche d'une autre espèce, comme celle qui auroit un Pole en son milieu, ce qu'on appelle un *Segment* de Sphère, ce n'est plus la même chose, & nôtre raisonnement ne conclut point qu'un segment ne puisse avoir la même proportion de surface & de solidité que la Sphère. Au contraire il paroît clairement que dans le segment comme dans la demi-sphère la proportion de la surface à la solidité va toujours en diminuant depuis le pole, & enfin le calcul fait voir qu'il y a un certain segment où cette proportion diminue depuis le pole jusqu'au plus grand cercle du segment, précisément de la même manière dont elle diminue depuis le Pole jusqu'à l'Equateur, desorte que le segment & la demi-sphère étant divisés en un nombre égal de parties, chaque partie du segment auroit la même proportion de surface & de solidité que la partie correspondante de la demi-sphère, & comme la demi-sphère a la même proportion de surface & de solidité que la Sphère entière, le segment auroit aussi la

même proportion que la Sphère. La détermination géométrique du segment qui a cette propriété est un endroit des plus curieux & des plus remarquables de la Théorie de M. Parent, qui cependant est arrivé à cette vérité sans considérer la proportion des surfaces & des solidités.

Il a cherché quel seroit le rayon d'une Sphère dont un segment auroit la double égalité avec la Sphère proposée, & il a trouvé pour le rayon cherché deux valeurs, l'une est le rayon même de la Sphère proposée, l'autre, un plus grand rayon. De là il suit que la Sphère proposée est elle-même le segment cherché dans le même sens que nous avons vu qu'elle pouvoit être une tranche sphérique autrement prise, & puisqu'il y a un véritable segment d'une autre Sphère plus grande qui lui est égal en surface & en solidité, il a donc la même proportion de surface & de solidité qu'une Sphère. Mais dans la Sphère proposée il y a nécessairement un segment semblable à celui là, & par conséquent il y a dans cette Sphère & dans toute autre un certain segment qui a la même proportion de surface & de solidité que la Sphère même.

La considération de cette proportion donne la raison essentielle, qui fait qu'une infinité de Cones tronqués sont égaux à la Sphère proposée, & que cette infinité est renfermée dans des bornes. Il est clair que non seulement dans le Cone en general la proportion de la surface à la solidité va toujours en croissant depuis la base jusqu'au sommet, mais même qu'elle croît davantage dans un Cone plus *aigu*, c'est à dire, dont la hauteur est plus grande par rapport au rayon de sa base. Cette même proportion, variable dans tous les Cones différents selon qu'ils sont plus ou moins aigus, est constante dans toutes les Sphères. Il est aisé d'imaginer un Cone plus grand que la Sphère proposée tant en surface qu'en solidité, mais si aigu que la proportion de la surface à la solidité y surpassera beaucoup celle qui appartient à la

Sphère, & à tel point qu'elle la surpassera encore vers sa base, quoi qu'elle y soit moindre qu'ailleurs, de sorte qu'il sera impossible de couper ce Cone de maniere que le reste ou Cone tronqué ait la double égalité avec la Sphère. De même on peut imaginer un Cone plus grand que la Sphère, mais si peu aigu ou si *obtus*, que la proportion de la surface à la solidité y sera beaucoup surpassée par celle qui appartient à la Sphère, & à tel point qu'elle le fera encore vers le sommet, quoi qu'elle y soit plus grande. Il y a donc dans le nombre infini de Cones plus grands que la Sphère proposée tant en surface qu'en solidité, ne fussent-ils plus grands que d'une certaine quantité déterminée, un nombre infini de Cones si aigus, & un autre nombre infini de Cones si obtus, que l'on n'en sauroit tirer des Cones tronqués égaux à la Sphère, & par conséquent le nombre de Cones tronqués qui peuvent avoir cette égalité, est compris entre deux termes extrêmes, où il n'y a que des Cones de certaines dimensions. La variété de ces dimensions fera varier la proportion de la surface à la solidité depuis la base jusqu'au sommet, & par conséquent fera cause qu'il faudra tronquer ces Cones à différentes distances du sommet, ou, ce qui est la même chose, leur laisser différentes hauteurs, d'où il suit que leur nombre est infini, quoique l'étendue dans laquelle la variation de leur hauteur est comprise, ne soit que finie.

Voilà les principales reflexions, &, à ce qu'il nous paroît, les plus instructives que nous puissions faire sur la recherche de M. Parent. Il égale encore à la Sphère plusieurs autres corps, le Paraboloidé, le Cone coupé de maniere que la base du segment soit ou une Ellipse, ou une Parabole &c. mais tout cela ne demande que beaucoup de geometrie, & de calcul.

Ils'est même donné la peine de faire exécuter par le Tour jusqu'à 14 Corps dont il a démontré la double égalité avec la Sphere, & comme les dimensions que lui donnoit le calcul geometrique se sont quelquefois trou-

vées trop incommodes dans l'exécution, ou même impraticables, il a été obligé d'en chercher d'autres, qui ne rompiissent point l'égalité, & cela lui a produit quelques Problèmes aussi difficiles à refoudre, que ceux qui avoient été son principal objet.

S U R U N E E S P E C E
I M P A R F A I T E
D E D E V E L O P E E S.

* V. les M. **L**'Histoire de 1701.* a expliqué ce que c'est que les
 P. 149. & Développées & leurs Rayons. Delà il suit qu'une
 185. Courbe quelconque étant donnée, si du côté qu'elle
 * P. 31. & est convexe on tire sur tous ses points des perpendiculai-
 32. res, deux de ces perpendiculaires infiniment proches se
 couperont toujours au dedans de la Courbe à un point
 qui appartiendra à sa Développée, & en fera un côté in-
 finiment petit, ou, ce qui revient au même, qu'elles se-
 ront deux Tangentes de la Développée infiniment pro-
 ches, & enfin que toutes ces perpendiculaires formeront
 par leurs intersections tous les côtés infiniment petits de la
 Développée. On dit qu'elles en sont les *Rayons*, lors qu'on
 les prend depuis la premiere Courbe à laquelle ils sont
 perpendiculaires jusqu'à la Développée qu'ils touchent.
 Nous avons expliqué dans l'Histoire de 1704* ce qui dé-
 termine la differente longueur de ces Rayons, & à quoi
 elle a rapport.

Selon l'usage de la Geomerrie d'aujourd'hui, M. de
 Reaumur a songé à étendre & à rendre plus général le
 Problème des Développées. On n'avoit considéré que les
 perpendiculaires qui tomboient sur tous les points de la
 premiere Courbe du côté qu'elle est convexe, mais si
 de ce même côté il tomboit sur tous ses points d'autres
 lignes qui fissent avec elle un angle different du droit, &
 toujours

toujours le même , qu'arriveroit-il ?

Il est clair d'abord qu'il arriveroit tout ce qui arrive dans le cas des perpendiculaires , & vient non de ce qu'elles sont perpendiculaires , mais de ce qu'elles font toutes le même angle. Ces lignes obliques se couperoient toutes au-dedans de la Courbe , & formeroient par leurs intersections les costés infiniment petits d'une Courbe nouvelle , dont elles seroient toutes autant de Tangentes. Cette Courbe seroit donc une espece de Développée , qui auroit ses Rayons. Je la nomme *imparfaite* , parce que les Rayons de la vraie Développée étant ses Tangentes , & en même temps perpendiculaires à la premiere Courbe , les rayons de celle-ci n'auroient que la propriété d'être ses Tangentes , & ne pourroient par la supposition avoir l'autre propriété. M. de Reaumur cherche comme l'on a fait pour la vraie Développée , 1^o , quelle seroit la longueur du Rayon de la Développée imparfaite correspondant à un point quelconque de la premiere Courbe , ou , ce qui est la même chose , le point d'intersection de deux Obliques infiniment proches , 2^o , quelle seroit en général la nature de la Développée imparfaite. Il suppose le Rayon de la Développée connu par les Methodes de M. de l'Hopital , ou de M. Varignon *.

La longueur du Rayon de la Développée étant donc connuë pour un point quelconque de la premiere Courbe , si l'on suppose que du côté qu'elle est convexe il tombe sur ce même point deux lignes obliques infiniment proches , qui fassent avec la Courbe un angle infiniment aigu , elles en seront Tangentes toutes deux , ne se couperont qu'au seul point d'attouchement , & n'entreront point dans la Courbe ; par consequent le Rayon de la Développée imparfaite sera alors nul , tandis que celui de la vraie sera une grandeur finie , d'où il suit que depuis la ligne qui tombe sur la Courbe sous un angle droit jusqu'à celle qui y tombe sous un angle infiniment aigu , le Rayon de la Développée prise en général varie depuis une certaine grandeur déterminée jusqu'à Zero , ou , ce qui est le même , que pour

* V. l'Hist.
de 1701. p.
31. & suiv.
& celle de
1706. p. 90.
& suiv.

un point quelconque de la Courbe tout Rayon de la Développée imparfaite est plus petit que celui de la vraie Développée, & d'autant plus petit que la ligne oblique qui est tombée sur la Courbe a été plus oblique. Reste à déterminer la proportion de cette diminution.

Elle est la même que si on comparoit un choc oblique à un choc perpendiculaire d'une même Force. Par les regles de la Méchanique que l'impression du choc perpendiculaire seroit à celle du choc oblique, comme le sinus de l'angle droit, ou sinus total, au sinus de l'angle de l'obliquité. C'est cette proportion que M. de Reaumur trouve entre le Rayon de la Développée & celui de la Développée imparfaite, mais il la trouve par une autre voye purement geometrique, & c'eût été un défaut dans sa démonstration que d'y employer, quand même il l'auroit pû, une idée de Méchanique, plus composée que le sujet dont il s'agit. Aussi ne nous en sommes-nous servis que comme d'une espece d'exemple, qui rendoit la chose plus sensible. De ce que les lignes obliques tombent toujours sous le même angle sur les differents points de la Courbe, il suit que la raison du sinus total au sinus de cet angle est constante, & que par conséquent celle du Rayon de la Développée au Rayon de la Développée imparfaite l'est aussi; & comme le Rayon de la Développée varie à chaque point d'une Courbe, à moins qu'elle ne soit un Cercle, il faut que le Rayon de la Développée imparfaite varie aussi de la même maniere, devienne ou plus grand ou plus petit, & même nul ou infini, si l'autre le devient; & quand ils sont tous deux ou nuls ou infinis, ils conservent encore entre eux la proportion des Sinus.

Puisque le Rayon de la Développée est toujours plus grand que celui de la Développée imparfaite, il est nécessaire que l'espace compris entre la Courbe & sa Développée soit aussi plus grand que celui qui est compris entre la même Courbe, & sa Développée imparfaite, & il se trouve par une espece de bonheur que le rapport de ces espaces est le même que celui des quarrés des Sinus, qui representoient le rapport des Rayons.

Cette Theorie de M. de Reaumur pourroit en quelque sorte appartenir à la Dioptrique, & y ajoûter de nouvelles vûes. Nous avons dit dans l'Hist. de 1703 * ce que c'est ^{* p. 69. & suiv.} que les *Caustiques par refraction*. On ne les a encore considérées que comme formées par des rayons qui étant partis d'un seul point lumineux tomboient sur une surface courbe sous differens angles, après quoi ils se rompoient. Si l'on consideroit les rayons qui étant partis de differents points lumineux tombent sur la surface courbe sous le même angle, ce seroient d'autre *Caustiques par refraction*. Que cet angle commun à differents rayons soit le droit, il est visible que la *Caustique* sera la même courbe que la *Développée*; pour tout autre angle, ce sera quelque une des *Développées imparfaites* de M. de Reaumur.

La détermination de la nature des *Développées imparfaites*, ou leur Equation generale dépendante de la premiere Courbe sur laquelle tombent les lignes obliques, est un pur calcul algebrique où nous n'entrerons point. M. de Reaumur applique sa Theorie à deux exemples, en prenant la premiere Courbe, 1^o pour un Cercle, 2^o pour une Logarithmique Spirale.

Si c'est un Cercle, il n'a pour rayon de sa *Développée* que son propre rayon toujours constant, & par conséquent celui de sa *Développée imparfaite* l'est aussi, d'où il suit aussitôt que cette *Développée imparfaite* est aussi un Cercle, mais moindre que le premier. On fait que la *Développée* d'un Cercle n'est que son centre même.

Si c'est une Logarithmique Spirale, comme sa *Développée* n'est qu'elle-même dans une position differente, sa *Développée imparfaite* sera aussi une Logarithmique Spirale, la même que la proposée dans un cas, differente dans tous les autres. L'essence de cette Courbe consiste en ce que ses Ordonnées font toujours le même angle avec elle, & une Logarithmique Spirale est differente d'une autre, quand cet angle, constant pour chacune, est different. Si l'angle sous lequel les lignes obliques rencontrent la Logarithmique Spirale est le même que celui que les

Ordonnées de cette Courbe font avec elle, elle se reproduit elle-même dans sa Développée imparfaite, aussi-bien que dans la vraie; s'il est différent, elle produit une autre Logarithmique Spirale. Feu M. Bernoulli eut encore plus de raison qu'il ne pensoit de faire graver cette Courbe sur son Tombeau*, car il ignoroit apparemment cette dernière manière dont elle se reproduit, dûë à M. de Reaumur.

* V. l'Hist.
de 1705. p.
145. & 148.

Dans le goût que l'on a presentement pour les Theories générales, on ne pouvoit s'empêcher de desirer que celle des Développées imparfaites comprît aussi les vraies, qui n'en sont proprement qu'un cas particulier. Aussi sur ce que l'Academie parut souhaiter la réunion de ces deux Theories, M. de Reaumur y travailla, & en vint à bout. Il a donc trouvé une Formule générale, que M. Varignon trouva aussi, pour les Rayons des Développées quelconques, c'est à dire quel que soit l'angle constant sous lequel des lignes droites rencontrent une Courbe. Si cet angle est droit, la Formule se change aussitôt en celle, ou plutôt en toutes celles qu'a données M. Varignon pour les Rayons des Développées*. Ces Formules si générales sont des amas d'Infinis roulés, pour ainsi dire, les uns dans les autres, & qui se dévelopent successivement par les applications particulieres.

* V. l'Hist.
de 1701. p.
81. & 82. &
celle de
1706. p. 91.
& suiv.

SUR LES COURBES

DE LA PLUS VISTE DESCENTE.

V. les M.
p. 26. &
257.

M. Bernoulli, maintenant Professeur en Mathematique à Basle, demanda en 1696 à tous les Geometres de l'Europe, Quelle étoit la ligne que devoit décrire un Corps pesant pour aller, en tombant obliquement à l'Horison, d'un point donné à un autre aussi donné, le plus viste qu'il fût possible?

Si ces deux points avoient été dans une ligne verticale,

il est évident que cette même ligne droite , la plus courte de toutes celles qui pouvoient être comprises entre eux , auroit été celle qu'on demandoit , mais comme on les prenoit dans une ligne oblique à l'Horifon , la ligne droite comprise entre eux , quoique la plus courte de toutes , n'étoit point celle qui devoit être parcourüe en moins de temps. Voici la raison de ce Paradoxe , qui pourroit surprendre d'abord.

Quand un Corps tombe par une ligne droite , soit perpendiculaire , soit oblique à l'Horifon , les augmentations de sa vitesse dans chaque temps égal sont toujours égales , de sorte qu'à la moitié du temps total de sa chute , par ex. il a la moitié de la vitesse qu'il doit avoir à la fin. S'il pouvoit avoir acquis plutôt cette moitié de sa vitesse finale , il est visible que ce qui lui resteroit d'espace à parcourir , seroit parcouru plus viste , ou en moins de temps , & par conséquent aussi l'espace total , & en un mot , l'espace total sera parcouru d'autant plus viste que le Corps aura acquis plutôt une plus grande partie de sa vitesse finale , qui sera toujours la même. Il faudroit donc pour cela que le partage de cette vitesse entre differents temps égaux de la chute , fût inégal ; or il ne peut l'être quand la chute se fait par une ligne droite , mais seulement quand elle se fait par une Courbe. Il est bien vrai que cette Courbe fera un plus grand espace à parcourir que la droite , mais ce qu'il faudroit de temps de plus pourra être non seulement recompensé , mais encore surpassé par une plus prompte acquisition de vitesse.

Cette Courbe aura pour Axe une ligne horifontale tirée par le point d'où le Corps commence à tomber , & pour dernière & plus grande Ordonnée une ligne verticale tirée du point le plus bas de la chute sur cette horifontale. Toutes les autres Ordonnées seront paralleles à celle-cy , & quand la Courbe sera trouvée & décrite , chacune déterminera la hauteur verticale d'où le Corps sera tombé à chaque instant , & par conséquent la racine de chacune exprimera , comme l'on fait , la vitesse que le

Corps aura à cet instant , & avec laquelle il parcourra l'arc infiniment petit , où il se trouvera. Les racines des différences infiniment petites des Ordonnées représenteront donc nécessairement les augmentations de la vitesse à chaque instant.

On voit déjà par ce qui a été dit que vers le commencement de la chute les augmentations que la vitesse prend à chaque instant , doivent être plus grandes que vers la fin , c'est-à-dire , que l'Axe de la Courbe étant conçu divisé en parties infiniment petites égales , qui représenteront les instants , les différences des Ordonnées seront plus grandes vers l'origine de la Courbe , & iront en diminuant de cette extrémité vers l'autre. Delà il suit nécessairement que vers l'origine de la Courbe ses côtés infiniment petits auront une direction plus approchante de la verticale , & iront toujours vers l'autre extrémité en devenant plus horizontaux , & cela fait encore que ces mêmes côtés infiniment petits seront plus grands vers l'origine de la Courbe , & iront vers l'autre extrémité en diminuant. Cette première ébauche de la Courbe est déjà telle que le Problème la demande , car au commencement de la chute où le Corps a de lui-même une moindre vitesse , il est plus aidé par la direction plus verticale de la Courbe , qui en même temps lui fait décrire de plus grands arcs , & le fait tomber de plus haut , de sorte que non-seulement il fait plus de chemin , mais il acquiert encore plus de vitesse pour celui qui lui reste à faire ; & vers la fin de sa chute où il n'a plus tant de besoin d'être aidé par la direction de la Courbe , parce que sa vitesse est plus grande , & où il ne l'est plus tant en effet , il a encore l'avantage de n'avoir plus que de plus petits arcs à décrire. Voilà tout ce qu'on peut désirer pour accourcir la durée de sa chute.

Tout cela ensemble se réduit à ce seul point , que les côtés ou arcs infiniment petits de la Courbe soient plus grands , lorsque la vitesse du Corps sera par elle-même plus petite , & réciproquement , & rien ne peut être plus

avantageux que quand la grandeur des uns suivra précifément la même raifon que la petiteffe de l'autre. Donc puiſque la viteſſe du Corps à chaque inſtant ſ'exprime par la racine de l'Ordonnée correfpondante, la Courbe doit être telle que les arcs infiniment petits ſoient plus grands en même raifon que les racines des Ordonnées correfpondantes ſeront plus petites, & reciproquement. Or on trouve bien-tôt par le calcul que la Courbe à laquelle appartient cette propriété, eſt la Cycloïde. Le diametre de ſon Cercle générateur ſera la ligne qui meſure l'éten-
duë verticale de la chute du Corps, par conſequent la Courbe de la plus viſte deſcente ſera une demi-Cycloïde qui aura pour origine & pour ſommet les deux points extrêmes de cette chute. Ce Problème eſt celui pour lequel, ainſi que nous l'avons dit dans l'Hiſt. de 1704, * *l'Angleterre, l'Allemagne, la Suisse & la France fournirent chacune un Geometre.* * p. 128.

Feu M. Bernoulli frere de celui qui l'avoit propoſé, en propoſa un ſecond, qui en étoit comme une ſuite, & n'avoit pas moins de difficulté. Il ne ſuppoſoit plus deux points déterminés entre leſquels ſe fit la chute, mais ſeulement un point qui en fût toujours l'origine, & une ligne verticale où elle ſe devoit terminer à un point quelconque. De toutes les Cycloïdes qui pouvoient avoir leur origine à celle de la chute, & aller enſuite rencontrer la ligne verticale, il demandoit quelle étoit celle qui devoit être parcourüe en moins de temps?

Les deux illuſtres freres qui ont reſolu ce Problème en ont caché l'Analyſe. M. Saurin a crû qu'elle meritoit bien d'être donnée au Public, avec une Solution nouvelle, & fort ſimple qu'il a trouvée.

Pour en prendre quelque idée ſans Geometrie & ſans calcul, il faut ſe representer le nombre infini de Cycloïdes, qui ayant leur origine commune au point déterminé peuvent rencontrer la verticale déterminée. La premiere de toutes celles qui la rencontrent eſt une Cycloïde entiere qui la touche, & ne paſſe point au-delà, de

forte que dans l'espace déterminée elle a une moitié qui descend, & une autre moitié qui remonte également haut. Ensuite viennent d'autres Cycloïdes, qui passent toutes au-delà de la verticale, & y passent par une plus grande partie de leur moitié qui remonte, selon qu'elles sont plus éloignées de la première Cycloïde. Il en vient donc une qui passe au-delà de la verticale par sa moitié entière qui remonte, & par conséquent elle rencontre à son sommet la verticale, & la coupe à angles droits, après quoi toutes les autres ont au-delà de la verticale une partie de leur moitié descendante, & une partie toujours plus grande, jusqu'à ce qu'enfin la dernière Cycloïde infiniment plus grande que la première soit toute entière au-delà de la verticale, à cela près qu'elle a en deçà son premier arc infiniment petit par rapport au reste de la Courbe, & cet arc infiniment petit est cependant une ligne droite infinie, parallèle, & égale à la verticale tirée à l'infini.

Tous les arcs Cycloïdaux compris entre l'origine de la chute & la verticale, au nombre desquels il faut mettre la Cycloïde entière, premier terme de toute cette *serie* ou suite, sont les espaces que le corps aura à parcourir. Les verticales tirées jusqu'au sommet de chaque Cycloïde sont les plus grandes hauteurs d'où le Corps sera tombé, & par conséquent leurs racines représenteront les plus grandes vitesses acquises par le Corps. On cherche l'arc Cycloïdal parcouru en moins de temps.

Toute Cycloïde étant égale à 4 fois le diamètre de son Cercle générateur, les Cycloïdes sont entre-elles comme les diamètres ou comme les circonferences de leurs Cercles, ou enfin comme leurs propres bases, puisque ces bases sont égales aux circonferences des Cercles générateurs. Il est évident que la Cycloïde qui coupe la verticale à angles droits, & qui a une de ses moitiés en deçà, & l'autre au-delà, a une base double de celle de la première Cycloïde, qui est toute entière en deçà de la verticale. Donc cette Cycloïde entière est égale à la
moitié

moitié de l'autre. Donc ces deux espaces à parcourir sont égaux. D'un autre côté, le Corps qui parcourroit la Cycloïde entiere perdroit pendant la seconde moitié de la durée de son mouvement toute la vitesse qu'il auroit acquise pendant la premiere moitié, & s'il parcourt la demi-Cycloïde qui rencontre la verticale à angles droits, il ne perdra rien de sa vitesse acquise, & au contraire il en acquerra jusqu'au dernier instant. De plus il suit de la position de la Cycloïde entiere & de la demi-Cycloïde, que le Corps qui a parcouru la demi-Cycloïde est toujours tombé dans tous les instants d'une plus grande hauteur que celui qui a parcouru la Cycloïde entiere, lors même qu'il tomboit, & par conséquent lors même qu'ils acqueroient tous deux de la vitesse l'un en acqueroit plus que l'autre. Ainsi les deux espaces étant égaux, & la vitesse de celui qui parcourt la demi-Cycloïde étant toujours plus grande & de plus s'augmentant toujours, quand l'autre n'en acquiert plus, le temps qu'il employe à sa chute doit être plus court. Et comme les arcs Cycloïdaux compris entre la Cycloïde entiere, & la demi-Cycloïde, participent tous aux défauts de la Cycloïde entiere, & y participent d'autant moins qu'ils sont plus éloignés d'elle, il s'ensuit que le temps employé à la parcourir sera plus long, & qu'ensuite il ira toujours en diminuant jusqu'à la demi-Cycloïde, qui sera donc l'arc de la plus viste descente par rapport à tous les arcs précédents.

Reste à le comparer aux arcs suivans. Le dernier de ceux-là est comme nous l'avons dit, une ligne droite infinie, qui ne peut être parcourue qu'en un temps infini. Le temps va donc en croissant vers la fin de la Serie des arcs Cycloïdaux, au lieu qu'il a été en diminuant au commencement de cette Serie jusqu'à la demi-Cycloïde, & si la demi-Cycloïde est précisément le terme où le temps commence à croître, elle est sûrement l'arc de la plus viste descente pour la Serie entiere.

On peut remarquer que dans ces sortes de questions ;

où il s'agit de *plus Grands*, ou *plus Petits*, les Grandeurs qui en ont le caractère, ont aussi quelque propriété geometrique qui n'appartient qu'à elles, & les rend en quelque sorte reconnoissables. Ainsi la plus grande Ordonnée du demi-Cercle & de la demi-Ellipse est celle dont la Tangente est parallele à l'axe. Ici la demi-Cycloïde est le seul arc Cycloïdal qui coupe la verticale à angles droits. La premiere Cycloïde la touche, la dernière fait avec elle un angle aigu infiniment petit. Ces deux Termes extrêmes & celui du milieu étant posés, il est aisé d'imaginer les variations moyennes. La demi-Cycloïde est aussi la seule qui rencontre à son sommet la ligne verticale. Elle a donc, pour ainsi dire, beaucoup de présomptions geometriques qui lui sont favorables, & en effet c'est elle que le calcul détermine pour l'arc de la plus viste descente.

Feu M. Bernoulli, premier Inventeur de ce Problème, voulut encherir sur la difficulté de M. son frere, qui avoit encheri sur la sienne. Ce n'étoit plus une ligne verticale où se devoit terminer la chute, mais une ligne faisant avec l'Horizontale un angle aigu quelconque.

Il est essentiel pour la solution de remarquer de quel côté l'ouverture de cet angle aigu est tournée, si c'est du côté de l'origine de la chute, ou du côté opposé. Dans le premier cas, la ligne où le Corps doit arriver, & que j'appellerai *terminante*, va pour ainsi dire, au devant de lui, aussi trouve-t-on que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente est moindre qu'une demi-Cycloïde, au lieu qu'il en étoit une dans le cas de la verticale. Dans le second cas proposé, la terminante fuit le Corps, & l'arc Cycloïdal est plus d'une demi-Cycloïde. Il est vrai qu'alors il faut nécessairement que le Corps pendant une partie de son mouvement remonte, & perde de sa vitesse acquise, mais en récompense l'arc Cycloïdal est fort petit.

Et pour donner de tout ceci une idée plus développée, supposons que la ligne terminante ait sur l'horizontale

tirée par l'origine de la chute une origine fixe, à un pié, par ex. de l'origine de la chute ; imaginons ensuite que la terminante ait l'ouverture de son angle aigu du côté opposé à cette origine, & qu'elle fasse d'abord cet angle infiniment aigu, c'est à dire qu'elle soit horizontale, & se confonde depuis son origine avec celle qui est toujours & invariablement horizontale. Quel sera alors l'arc Cycloïdal que le Corps pourra décrire en moins de temps pour arriver jusqu'à elle ? Il est visible qu'il ne pourra y arriver plutôt que n'allant que jusqu'à son origine, & que pour y aller en décrivant un arc Cycloïdal il faudra qu'il remonte à la même hauteur d'où il sera descendu, puisque la terminante est horizontale, & par conséquent il décrira une Cycloïde entiere dont la base sera une étendue horizontale d'un pié. Si l'on imagine que la terminante se meuve circulairement sur le point de son origine pris pour centre, & que d'horizontale qu'elle étoit elle devienne verticale, nous avons vu que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente sera une demi-Cycloïde, & il est clair que cette demi-Cycloïde aura un pié pour base, & que par conséquent la Cycloïde dont elle est la moitié en a deux. Delà il suit 1°. que dans tout le chemin que la terminante a fait pour devenir d'horizontale verticale, c'est à dire tant qu'elle a été oblique, & que son angle aigu a regardé le côté opposé à l'origine de la chute, les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente ont été moins que des Cycloïdes entieres, & plus que des demi-Cycloïdes, 2°. que les Cycloïdes dont ils ont été portions, ont été toujours plus grandes, 3°. qu'ils ont été des portions d'autant plus petites de Cycloïdes, & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus grandes que l'angle aigu de la terminante a été plus grand, 4°. que l'arc de la plus viste Descente rencontre toujours la terminante à un point plus bas. Les deux positions *extrêmes* de la terminante ayant produit les effets que nous avons déterminés, les effets des positions *moyennes* n'ont pu être que ceux que nous venons de re-

présenter, car la nature des deux extrémités règle les variations qui se font entre deux.

De ce principe naît encore une conséquence, mais par la raison des contraires. Une Cycloïde est perpendiculaire à sa base, donc dans la position horizontale de la terminante l'arc de la plus viste Descente lui étoit perpendiculaire, puisque c'étoit une Cycloïde entière. Quand la terminante est verticale l'arc de la plus viste Descente qui est une demi-Cycloïde lui est encore perpendiculaire ; donc cet effet étant le même dans les deux positions extrêmes de la terminante, qui ont fait varier tout le reste, il n'y a point de variation à cet égard dans les positions moyennes, & quelque angle que fasse la terminante, l'arc de la plus viste Descente lui est toujours perpendiculaire.

Maintenant si l'on veut que la terminante achève un mouvement demi-circulaire, & que de verticale qu'elle étoit elle redevienne horizontale, & que par conséquent dans tout ce mouvement elle tourne son angle aigu du côté de l'origine de la chute, il n'y a qu'à considérer ce qui arrivera quand elle sera redevenue horizontale. Elle fera un angle infiniment aigu avec la ligne horizontale invariable & immobile, & par conséquent l'arc Cycloïdal que le Corps doit parcourir dans le moindre temps pour aller de l'origine de la chute jusqu'à la terminante qui en est infiniment proche, ne peut être qu'infiniment petit, & il sera nécessairement perpendiculaire à la terminante. Non-seulement cet arc Cycloïdal est infiniment petit, mais la Cycloïde dont il est portion peut être supposée aussi petite qu'on voudra, pourvu seulement qu'elle soit finie, car rien n'en détermine la grandeur. Nous avons déjà vu quelle est l'autre position extrême de la terminante, & quels en sont les effets. Donc dans tout le chemin qu'elle fait pour devenir de verticale horizontale, & ayant son angle aigu du côté de l'origine de la chute, 1°. les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente sont moindres que des demi-Cycloïdes, 2°. ils sont des portions de Cycloïdes toujours plus petites,

3°. ils font des portions d'autant plus petites de Cycloïdes , & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus petites que l'angle de la terminale est plus petit , 4°. l'arc de la plus vîte Descente rencontre toujours la terminante à un point plus haut , 5°. il lui est toujours perpendiculaire.

Ainsi l'arc Cycloïdal perpendiculaire à la terminante est toujours parcouru en moins de temps que tous les autres arcs en nombre infini qui la rencontrent , & c'est-là la Solution geometrique du Problème.

En rejoignant ensemble les deux cas de l'angle aigu de la terminante, on trouve que l'arc de la plus vîte Descente ne la rencontre jamais en un point plus bas que quand elle est verticale , que dans une moitié de ses positions le Corps acquiert toujours une nouvelle vitesse , & que dans l'autre moitié il perd une partie de sa vitesse acquise, quoiqu'il fasse son chemin dans le moindre temps possible , &c.

L'idée que nous avons suivie nous fournit un moyen tres-facile de comparer les Temps en général. Chaque temps pendant lequel est parcouru un arc de plus vîte Descente pour une certaine position déterminée de la terminante , est le plus court qu'il se puisse , mais il s'agit de comparer les Temps de plus vîtes Descentes correspondants à différentes positions de la terminante. Quand elle fait avec l'horizontale immobile un angle infiniment aigu du côté de l'origine de la chute , le temps ne peut être qu'infiniment petit , cela est clair par ce qui a été dit sur ce cas-là. Donc depuis cette position de la terminante jusqu'à ce qu'elle devienne verticale , auquel cas certainement le temps est fini , les Temps des plus vîtes Descentes n'ont pu aller qu'en croissant toujours. Lorsque la terminante est verticale , la demi-Cycloïde qui s'y termine est parcourue en moins de temps que tous les autres arcs Cycloïdaux qui s'y terminent aussi , & dans ce nombre est comprise une Cycloïde entiere qui va de l'origine de la chute à celle de la terminante ,

& qui a une base d'un pié selon la supposition qui a été faite. Or cette Cycloïde entiere est la même qui sera l'arc de la plus viste Descente lorsque la terminante de verticale qu'elle étoit sera redevenue horizontale. Donc tant qu'elle fera ce chemin les Temps des plus vistes Descentes continueront de croistre comme ils faisoient auparavant. Delà il suit que le temps de la plus viste Descente, lorsque la terminante est verticale, est moyen entre tous les autres, &c.

Comme les Geometres modernes sont difficiles à contenir en fait de difficultés, M. Bernoulli augmenta encore celle de son Problème, en ne supposant plus pour Courbes des plus vistes Descentes des Cycloïdes, auxquelles cependant appartient particulièrement cette propriété, mais seulement des Courbes semblables en général, qui seront ensuite tout ce qu'on voudra, Cercles, Cycloïdes, Paraboles, &c. Les deux freres résolurent encore ce Problème élevé à une si grande universalité, mais en cachant leur secret, que M. Saurin découvre présentement. Il suppose que ces Courbes soient non seulement de la même espece, mais encore semblables, c'est à dire que comme elles auront une origine commune, il faut qu'une corde tirée de ce point détermine dans ces Courbes des parties pareilles, des moitiés, des tiers, &c.

Les deux freres, & M. Saurin après eux ont encore ajouté une difficulté nouvelle au Problème, ils ont supposé que la terminante ne fût plus une ligne droite, mais une Courbe geometrique. Nous n'entrons point dans toutes ces Theories, il faut laisser à un petit nombre de Geometres le plaisir tout entier des embarras de leur art.

Nous finirons seulement par une ébauche du Problème entierement réduit à des lignes droites, & par-là entierement changé. La ligne de la plus viste Descente doit, aussi-bien que la terminante, être une ligne droite. Supposons d'abord que la terminante soit verticale, & que

l'horizontale fixe & immobile soit d'un pié. Toutes les lignes possibles de descente pour arriver à la verticale seront les hipotenuses d'un triangle rectangle, qui aura toujours pour l'un de ses deux autres côtés une horizontale d'un pié, & pour l'autre une verticale indéterminée. Ces hipotenuses seront les espaces que le Corps parcourra, & les différentes portions de la terminante verticale représenteront par leurs racines les vitesses des différentes chutes. La plus viste Descente est celle où l'espace est le plus petit qu'il soit possible, & la vitesse la plus grande. Il faut donc trouver dans les différents triangles celui dont l'hipotenuse est la plus petite qu'il se puisse par rapport au côté vertical. Or toute hypotenuse étant une grandeur composée de deux côtés qui comprennent l'angle droit, la question se réduit à ceci. Une grandeur qui doit faire une des deux parties d'un Tout étant déterminée, trouver l'autre partie telle qu'elle soit la plus grande qu'il se puisse par rapport au Tout, & on trouvera par un calcul d'une ligne que la partie indéterminée & inconnue doit être égale à la déterminée. Il faut donc que le côté vertical du triangle soit d'un pié aussi-bien que l'horizontal, & l'hipotenuse sera la ligne de la plus viste descente. La propriété geometrique qui distingue cette hipotenuse de toutes les autres, c'est d'être l'hipotenuse d'un triangle rectangle isoscele.

Maintenant si l'on conçoit que la terminante tournant circulairement sur son origine comme sur un centre s'approche infiniment près de l'horizontale immobile, la ligne de la plus viste Descente sera infiniment petite, & perpendiculaire à la terminante, & la portion de la terminante déterminée par cette ligne de la plus viste Descente sera encore égale à l'horizontale immobile d'un pié. Donc dans ces deux cas extrêmes cette portion de la terminante & l'horizontale d'un pié étant égales, il y a beaucoup d'apparence qu'elles le sont aussi dans tous les cas moyens, c'est-à-dire, tant que l'angle aigu de la terminante est tourné du côté de l'origine des chutes,

& la ligne de la plus viste Descente fera toûjours la base d'un triangle isofcele. Si l'angle aigu de la terminante étoit de 60 degrés, ce triangle isofcele seroit de plus équilateral.

Si l'angle aigu de la terminante est tourné du côté opposé, ou, ce qui est la même chose, si elle fait du côté de l'origine des chutes un angle obtus avec l'horizontale, la ligne de la plus viste Descente sera encore la base d'un triangle isofcele, mais *amblygone*, au lieu que dans les deux autres cas, il étoit rectangle ou *oxygone*.

Dans tous les trois cas, cette propriété du triangle isofcele vient également de ce que la perpendiculaire qui détermine la plus grande vitesse acquise par le Corps, y est la plus grande qu'il se puisse par rapport à la ligne qui représente l'espace parcouru. Mais ce plus grand rapport de la vitesse à l'espace est beaucoup plus aisé à appercevoir dans le triangle rectangle isofcele, que dans l'oxigone, ou l'amblygone isofceles aussi.



ASTRONOMIE

SUR L'ETOILE DE L'HIDRE.

QUI PAROIST ET DISPAROIST.

V. les M. **C**ette Etoile de l'Hidre qui paroist & disparoist, & dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1706 *, a été suivie par M. Maraldi qui l'avoit découverte, ou du moins qui avoit découvert qu'elle étoit *changeante*. Comme elle est présentement un peu mieux connuë qu'elle n'a encore été, nous en allons faire une petite Histoire un peu plus circonstanciée.

V. les M.
P. 33.
* P. 111, &
112.

Il paroist certain qu'elle a été vûë en 1662 par Hevelius, elle l'a été en 1672 par M. Montarani, & ni l'un ni l'autre de ces Astronomes ne l'a connue pour changeante. M. Maraldi l'a observée en 1704, 1705, 1706 & 1708. C'a été au mois d'Avril que Hevelius & Montanari l'ont vûë, M. Maraldi en 1704 & 1708 depuis Mars jusqu'en Juin, en 1705 à la fin de l'année, & en 1706 au commencement. Il l'a cherchée inutilement en tout autre temps, depuis l'an 1702, qu'il fut averti de cette Etoile par l'observation de M. Montanari. Elle commence par être à peine visible à la Lunette, & ensuite elle va jusqu'à égaler les Etoiles de la 4^{me} grandeur, après quoi elle diminue toujours. C'est vers la moitié de Mai qu'elle arrive à cette grandeur. Le plus long-temps de son apparition peut être de 4 mois. Lorsqu'elle parut hors de son temps ordinaire à la fin de 1705, & au commencement de 1706, elle fut d'abord fort petite & fort foible, & ne fit encore que diminuer toujours; elle ne parut que 2 mois.

Par tout ce que nous venons de dire, la periode de 2 ans assignée par M. Maraldi dans l'Hist. de 1706 aux retours de cette Etoile, & qui doit commencer en 1662, temps de la premiere observation, s'accorde jusqu'à present assez juste avec les phenomenes, excepté que l'Etoile ne parut point en 1702, quoiqu'elle eût dû y paroistre selon cette periode, & qu'elle parut hors de son temps en 1705, & en 1706. Ces irregularités du temps de son apparition, aussi-bien que celles qui regardent sa grandeur, pourront se concilier quelque jour avec quelque hypothese, & elles ne sont pas fort considerables par rapport au peu d'observations que l'on a jusqu'ici.

On peut même déjà imaginer selon le Siftême des demi-Soleils expliqué à cette occasion dans l'Hist. de 1706, que l'Etoile de l'Hidre qui ne paroist que 4 mois à peu près en 2 ans n'a que la 6^{me} partie de sa surface qui soit lumineuse, & que le reste est couvert par des Taches permanentes, mais non pas absolument fixes en un certain endroit du globe, ou qu'il s'y en peut joindre

quelquefois de nouvelles & de passageres. L'une ou l'autre de ces suppositions, ou toutes les deux ensemble, satisfèront à tout.

M. Maraldi fait un petit dénombrement de quelques Etoiles qui paroissent & disparoissent comme celle de l'Hydre, ou qui ne paroissent plus, du moins depuis un certain temps, ou même qu'on a lieu de croire qui ne paroissent que depuis peu. Ces observations sont d'une extrême importance pour le Système de l'Univers pris en grand, si cependant c'est l'Univers pris en grand que la plus grande étendue que nous en puissions apercevoir avec nos plus excellentes Lunettes.

SUR LES MOUVEMENTS

APPARENTS DES PLANETES.

V. les M.
P. 247.

IL est certain maintenant que le Soleil est le centre des mouvements des Planetes, & non pas de la Terre; les Systèmes de Copernic & de Tycho Brahé conviennent sur ce point. Delà il suit nécessairement que les mouvements des Planetes vûs de la Terre doivent paroître extrêmement differents de ce qu'ils paroistroient étant vûs du Soleil; ils en sont presque entierement défigurés, & à peine les Courbes de leurs Orbes sont-elles reconnoissables. C'est cette difference que nous allons expliquer pour faire entendre des figures que M. Cassini a données des Courbes que les Planetes vûës de la Terre paroissent décrire. La principale de ces irrégularités apparentes consiste dans les *Retrogradations* & *Stations*, & voici ce qui les produit. Je suppose que le Système de Copernic perfectionné par les Ellipses de Kepler représente l'Univers tel qu'il est en effet.

Imaginons Saturne immobile, & la terre qui se meut sous lui autour du Soleil d'Occident en Orient d'un mouvement uniforme, le Soleil est entre elle & Saturne, &

elle part du 1^{er} degré d'Aries pour aller en Taurus; elle voit donc Saturne au 1^{er} de Libra. Quand elle aura fait la moitié de son Cercle annuel ou de son Ellipse, & qu'elle sera entre le Soleil & Saturne, il est clair qu'elle verra encore Saturne au 1^{er} degré de Libra; or comme elle s'est muë réellement, il n'est pas possible que pendant son demi tour, elle ait toujours rapporté Saturne au même point du Zodiaque, elle l'a donc vû sortir du 1^{er} degré de Libra, & y revenir, c'est-à-dire qu'elle lui a vû deux mouvements contraires, l'un direct, l'autre retrograde. Et si l'on veut suivre cela plus exactement, on trouvera en tirant seulement une ligne droite de la Terre placée en differents points à Saturne, que dans son premier quart de cercle elle le voit direct & allant de Libra selon la suite des Signes, mais d'abord plus viste, & ensuite plus lentement, quoique le mouvement de la Terre soit supposé égal, que dans son second quart de cercle, elle voit Saturne retrograde & retournant sur ses pas, mais d'abord plus lentement, & plus viste vers la fin, que dans le troisième quart elle le voit encore retrograde, mais passant au-delà du 1^{er} de Libra dans Virgo, plus viste d'abord, & qu'enfin dans le dernier quart, elle le voit direct & retournant de Virgo au 1^{er} de Libra, plus viste vers la fin. Je ne considere point ici que la Terre étant tantôt plus proche, tantôt plus éloignée de Saturne de tout le diametre de l'Orbe qu'elle décrit, cela causeroit quelque difference optique dans les differentes parties du mouvement apparent de Saturne, & qu'elles ne paroistroient pas exactement égales; cette difference est très-legere, & n'empêche pas les conclusions que nous voulons tirer. Il faut bien remarquer que dans le passage de la direction à la retrogradation ou au contraire le mouvement de Saturne paroist toujours plus lent. Mais parce que le mouvement de la Terre, d'où dépend toute l'apparence du mouvement de Saturne, est égal, le mouvement apparent de Saturne ne peut en se rallentissant toujours devenir enfin contraire à ce qu'il

étoit sans avoir passé par tous les degrés possibles de lenteur, & par conséquent par le repos. En Geometrie, & c'est ici la même chose, une grandeur ne devient point de positive negative, ou au contraire, sans être devenue auparavant infinie, ou Zero. Il y a donc toujours un repos ou une *station* entre une direction & une retrogradation, ou entre une retrogradation & une direction.

Dans l'hipothese de l'immobilité de Saturne, la Terre pendant une moitié de son cours le verroit donc direct, & retrograde pendant l'autre, il en faudroit seulement excepter les deux étenduës ou les deux temps pendant lesquels elle le verroit Stationnaire, ou plutôt il vaut mieux les confondre, comme font les Astronomes, en partie avec les directions, & en partie avec les retrogradations, puisqu'ils en font le terme commun. Saturne seroit donc direct pour la Terre pendant toute la moitié de son cours où elle seroit la plus éloignée de lui, soit qu'alors elle continuât à s'en éloigner, soit qu'elle s'en approchât, & il seroit retrograde pendant la moitié où elle seroit la plus proche de lui, soit qu'elle s'approchât pour passer sous lui, soit qu'après y avoir passé elle s'en éloignât. Il est évident que tout cela est un effet de la figure circulaire, qui a deux moitiés entierement égales & semblables, mais contrairement posées par rapport à un point pris au dehors.

Non-seulement la Terre pendant son tour ne verroit pas Saturne décrire un tour entier du Zodiaque, ni même un demi-tour, mais elle ne lui verroit décrire qu'un assez petit arc, précisément à la maniere d'une Pendule qui va & revient sur ses pas. Si l'Orbe de la Terre étoit si petit par rapport à la distance de Saturne qu'il ne dût être compté que pour un point, l'arc d'oscillation de Saturne paroistroit nul, & cette Planette seroit vûë immobile comme on suppose ici qu'elle l'est. Plus le rayon de l'Orbe de la Terre sera grand par rapport à la distance de Saturne, plus le mouvement apparent de Saturne tant direct que retrograde sera grand.

Maintenant si l'on quitte la fausse hipotese de l'immobilité de Saturne , & qu'on lui rende son mouvement veritable d'Occident en Orient , qu'arrivera-t-il ? 1°. Si ce mouvement se faisoit en un an , comme celui de la Terre , elle le verroit toujours direct , ainsi qu'il l'est réellement , mais la révolution de Saturne est de 30 ans , & 30 fois plus lente que celle de la Terre , & par conséquent il est en partie immobile à son égard , & il doit conserver en partie les effets de l'immobilité que nous lui avions supposée. Il doit donc paroître encore tantôt direct , tantôt retrograde. 2°. La Terre ne passe pas moins sous lui que s'il étoit immobile , & par conséquent il doit paroître retrograde pendant ce passage , & même avant & après pendant tout le temps où la Terre est posée à son égard de la même maniere que l'orsqu'il étoit immobile. 3°. Puisque dans le cas de cette immobilité , la Terre voyoit Saturne direct dans les circonstances qu'on a marquées , à plus forte raison l'y voit-elle encore direct , car il l'est toujours réellement , & alors la réalité concourt avec l'apparence. Sa vitesse directe doit donc maintenant paroître plus grande qu'elle ne paroissoit. 4°. Par la même raison , sa vitesse retrograde qui étoit égale à la directe doit paroître moindre , car ce n'est plus qu'une apparence à laquelle la réalité est contraire , & qui est diminuée par cette réalité. 5°. Plus Saturne est éloigné du cas où il eût paru toujours direct , & plus il approche de celui où il étoit immobile , c'est à dire en un mot , plus sa révolution est lente par rapport à celle de la terre , plus sa vitesse retrograde approche d'être égale à la directe , & reciproquement plus sa révolution approcheroit de la vitesse de celle de la Terre , plus sa vitesse retrograde seroit au-dessous de la directe. 6°. Par la même raison que sa vitesse retrograde est moindre que la directe , il paroît maintenant faire moins de chemin étant retrograde qu'étant direct , & par conséquent la Terre ne le voit plus retrograde pendant qu'elle fait une moitié de son cours ou pendant 6 mois , mais

pendant un moindre espace de temps. 7°. L'arc de la retrogradation de Saturne est d'autant plus grand que sa révolution est plus lente par rapport à celle de la Terre, & l'Orbe de la Terre plus grand par rapport au sien. 8°. La durée de sa retrogradation dépend donc de la grandeur de cet arc, & de la vitesse apparente dont il est parcouru.

Il est manifeste que ce qu'on a dit de Saturne s'applique de soi-même aux autres Planetes superieures, & qu'il suit des mêmes principes que Jupiter & Mars paroissent retrogrades aussi-bien que lui, lorsqu'ils sont dans les mêmes circonstances, qu'ils sont tous trois retrogrades pendant moins de 6 mois, & que la vitesse retrograde de Saturne est moins petite par rapport à sa directe que celle de Jupiter; & celle de Jupiter moins petite que celle de Mars. Quant à la grandeur de leurs arcs de retrogradation, comme elle dépend de deux principes qui se combattent, & que Jupiter, par ex. a un plus grand arc de retrogradation que Saturne parcequ'il est plus proche de la Terre, & un plus petit parceque sa révolution se fait en moins de temps, on n'en peut rien déterminer par ce qui a été dit, mais on fait par le calcul astronomique que l'arc de Saturne est plus petit que celui de Jupiter, & celui de Jupiter plus petit que celui de Mars. Et pour la durée de la retrogradation, il y entre, outre la grandeur de l'arc, la vitesse apparente. Or cette vitesse est composée en partie de la vitesse réelle, qui est plus grande dans les Planetes plus proches du Soleil, & cela fait encore un assemblage de differents principes qui se combinent. On trouve par l'Astronomie que la durée de la retrogradation de Mars ne peut aller qu'à près de 3 mois, celle de Jupiter à 4, celle de Saturne à près de $4\frac{1}{2}$.

Si l'on veut étendre cette Theorie aux Planetes inferieures, on n'a qu'à s'imaginer la Terre immobile qui voit Venus tourner sous elle. On fera sur cette fixation les mêmes raisonnements, & on en tirera les mêmes

consequences que quand on avoit supposé Saturne immobile sous lequel la Terre tournoit , après quoi reprenant la réalité & rendant à la Terre son mouvement d'un an , on trouvera que Venus & Mercure doivent paroître retrogrades toutes les fois qu'ils passent entre la Terre & le Soleil , & quelque temps avant & après ce passage , que leur vitesse retrograde est toujours moindre que leur vitesse directe , que la vitesse retrograde de Mercure est plus grande par rapport à la directe que celle de Venus , que leur arc de retrogradation est d'autant plus grand que leur Orbe est plus grand par rapport à celui de la Terre , & leur révolution plus vite par rapport à la sienne , &c. L'arc de la retrogradation de Venus est presque toujours plus grand que celui de Mercure. La retrogradation de Venus est environ de 40 jours , & celle de Mercure de 18.

Ces irregularités apparentes des mouvements des Planètes vûs de la Terre supposent qu'ils soient en eux-mêmes parfaitement réguliers , ou , ce qui est la même chose , circulaires , & uniformes ; cependant ils ne sont ni l'un ni l'autre , ils sont Elliptiques , & ont une vitesse variable qui diminue réellement à mesure que la Planète s'éloigne du Soleil *. Parce qu'ils sont Elliptiques , une Planète , quoique toujours dans son Perigée , est inégalement éloignée de la Terre en différentes révolutions , car ce Perigée sera inégalement éloigné du Perihelie , & peut-être même sera l'Aphelie *. En même temps la vitesse réelle du Perigée varie , & par conséquent l'apparente.

* V. l'Hist.
de 1707. p.
97. & suiv.

* V. l'Hist.
de 1706. p.
100.

On peut juger par tout ce qui a été dit combien les mouvemens des Planètes qui vûs du Soleil seroient Elliptiques , doivent avoir de dessus la Terre une apparence différente , & même bizarre. En général , il faut pour représenter les retrogradations que ce soit une Courbe qui s'approchant toujours de la Terre vienne à avoir une Tangente dirigée à la Terre , sur laquelle la Planète étant arrivée elle paroîtra stationnaire , qu'après cela

la Courbe descend encore vers la Terre, & y ait de petits arcs correspondants à d'assés grandes durées, qu'ensuite elle remonte, qu'elle ait une seconde Tangente dirigée à la Terre, se coupe elle-même & continuë de remonter jusqu'à un certain point, ce qui représentera le mouvement direct. Cette Courbe ressemble beaucoup à celle que les Geometres ont appelée *la Fuelle*. M. Cassini l'a appliquée à toutes les Planetes, en donnant à ses différentes parties les différentes proportions nécessaires pour représenter le mouvement apparent de chaque Planete en particulier. Il a suivi & tracé les contours de la Courbe pour plusieurs années du mouvement de chaque Planete, & par-là on peut voir à tel jour que l'on veut des années qu'il donne le lieu de la Planete dans le Zodiaque, si elle est ou directe ou stationnaire ou retrograde, & quelle est sa vitesse par rapport aux autres parties de son cours. Au lieu qu'on n'avoit eu jusqu'à present des Ephemerides qu'en nombres & en Tables, on en a presentement en figures, & elles ont l'avantage que les Images plus sensibles ont toujours auprès de nous sur celles qui le sont moins.

SUR LES TACHES

DU SOLEIL.

LE 6 Janvier à Midi, qui est l'heure où l'on observe toujours, il parut sur le disque du Soleil deux Taches, qui étoient trop proches pour n'être pas parties d'une même. M^{re} de la Hire s'attachèrent à observer le mouvement ou la position apparente de la plus grosse, qui étoit aussi la plus Occidentale. Elle avoit déjà passé le milieu du disque, & étoit à peu près au tiers de la partie occidentale, où elle avoit à l'égard du centre apparent du Soleil une déclinaison Meridionale de $3' 35''$. Après le 10, elle passa derriere le Soleil, selon l'hypothese

these de la révolution en 27 jours $\frac{1}{2}$. La déclinaison de la Tache étoit alors de $4^{\circ} 10''$ du même côté.

Selon la même hypothese de la révolution du Soleil , la Tache reparut le 26 presque au bord Oriental , mais avec une déclinaison Septentrionale de $5''$ à l'égard du centre apparent. Cette déclinaison fut le 28 de $40''$, & le 30 elle devint Meridionale & de $10''$, le mouvement de la Tache d'Orient en Occident sur le disque étant toujours tel qu'il devoit être par l'hypothese des 27 jours $\frac{1}{2}$.

Le 3 Février , elle avoit passé le milieu du disque , & étoit dans la partie occidentale , avec une déclinaison meridionale de $3^{\circ} 40''$. Mais le même jour & à la même heure il parut sur le Soleil une nouvelle Tache dans la partie orientale , avec la même position à peu près que si elle en eût déjà parcouru les $\frac{6}{7}$, & avec une déclinaison septentrionale de $25''$. L'ancienne Tache & la nouvelle , qui paroissent en même temps , étoient donc fort différentes , & fort séparées , & voilà encore ce phenomene rare , dont nous avons parlé dans les Hist. de 1705 * & de 1707 *.

*P. 123.

*P. 111.

Le 5 on ne voyoit plus la nouvelle Tache , quoiqu'elle dût être encore vers le milieu du disque , l'ancienne continuoit son chemin vers l'Occident , avec la même déclinaison que le 3 , car vers le milieu des Ellipses que les Taches décrivent la déclinaison doit pendant un temps être sensiblement la même. Après le 5 le Ciel ne permit plus d'observer.

Le 25 Aoust , on aperçût plusieurs Taches séparées en deux amas. La plus grosse de toutes & la plus Orientales étoit dans la partie occidentale du disque , & à plus de la moitié de cette partie ; avec une déclinaison meridionale de $1^{\circ} 30''$. Quoiqu'elle fût si avancée sur le disque , il est certain qu'on n'y avoit rien vu les jours précédents. Le 27 on la vit encore , plus proche du bord occidental , comme elle devoit être , avec une déclinaison meridionale de $2^{\circ} 15''$.

1709.

M

Le 12 Novembre , on aperçût une Tache affés grosse , & toute seule. Elle avoit déjà un peu passé le milieu du disque , & avoit une déclinaison meridionale de $1^{\circ} 45''$. On la vit tous les jours jusqu'au 16 qu'elle étoit fort avancée dans la partie occidentale du disque. Elle avoit alors une déclinaison meridionale de $2^{\circ} 50''$. Le 18 on ne l'a vit plus. Elle pouvoit avoir passé derriere le Soleil.

V. les M.
P. 62.

Nous renvoyons entierement aux Memoires L'Ecrit de M. Cassini le fils sur les Observations faites à Nuremberg des Eclipses de 1708.

V. les M.
P. 91. 92.
& 93.

Les Ecrits de M^{rs} de la Hire & Cassini le fils sur l'Eclipse solaire du 11 Mars 1709.



OPTIQUE.

SUR QUELQUES FAITS

PARTICULIERS D'OPTIQUE.

V. les M.
P. 95.

Si l'Optique n'étoit que Geometrique , il y auroit lieu d'être surpris que l'on se partageât sur l'explication de ses phenomenes , mais ce qui ôte tout sujet d'étonnement , c'est qu'il y entre beaucoup de Phisique , qui y porte son incertitude naturelle.

* p. 12. &
suiv.

On a vû dans l'Histoire de 1704* 1° . que sion plonge un Chat dans l'eau , & que l'on tourne sa tête de sorte que ses yeux soient directement exposés à une grande lumiere , leur prunelle s'ouvre beaucoup , quoique naturellement elle se resserre au grand jour , 2° . que l'on aper-

çoit distinctement le fond des yeux de cet Animal , qu'il est bien certain qu'on ne verroit pas à l'air. Ces deux faits ont été expliqués , mais M. de la Hire en donne ici d'autres explications.

1°. Lorsque le Chat est plongé , les rayons qui entrent dans son œil tombent perpendiculaires sur l'eau , parce-que pour mieux voir cet œil on tient la face de l'Animal parallele à la surface de l'eau. Cela posé , M. de la Hire démontre que ces rayons perpendiculaires à l'eau n'y souffrant point de réfraction , & n'en souffrant qu'assés peu quand ils passent de ce milieu dans les humeurs de l'œil , à cause du peu de difference de ces humeurs & de l'eau , ils ne pourroient se réunir que bien loin au-delà de la Retine , & que par conséquent ils y tombent séparés , & y occupent un plus grand espace qu'ils ne devroient. Delà il conclut que ces rayons agissant plus faiblement sur la Retine , que si l'œil étoit exposé à l'air , ils ne doivent pas causer de retrecissement à l'Iris. Il remarque aussi que le Chat plongé dans l'eau étant fort inquiet , & fort attentif à tout ce qui se passe autour de lui , cette attention & cette crainte tiennent sa prunelle plus ouverte , car M. de la Hire suppose que le mouvement de l'Iris qui est presque toujours nécessaire , & n'a rapport qu'au plus ou moins de clarté , est en partie volontaire dans certaines occasions. S'il l'est , on pourroit peut-être se contenter de cette seule cause du phénomène.

2°. M. de la Hire démontre encore que les refractions qui se font dans l'eau élèvent le fond de l'œil du Chat , & rapprochent cet objet des yeux du spectateur. Si l'on joint à cela que la prunelle de l'Animal est plus ouverte , & par conséquent le fond de son œil plus éclairé , il ne sera pas étonnant qu'on l'apperçoive. Encore une raison , que M. de la Hire ajoute. Un objet est d'autant mieux vû , que dans le temps qu'on le regarde il vient à l'œil moins de lumière étrangere , & qui ne sert point à le faire voir. Quand on regarde à l'air l'œil d'un Chat de

maniere à tâcher d'en découvrir le fond , l'axe de la vision du Spectateur se porte vers ce fond , & s'il vient en même temps des rayons étrangers paralleles à cet axe , ils troublent d'autant la vision. Or il en vient , parceque la Cornée du Chat étant convexe elle reflechit à l'œil du Spectateur des rayons sous toutes sortes d'angles , & ceux qui sont paralleles à l'axe de la vision qui se dirige au fond de l'œil du Chat , la troublent , puisqu'ils viennent d'un autre objet. Mais quand le Chat est plongé dans la situation que nous avons dit , la surface de l'eau qui est plane ne pourroit envoyer à l'œil du Spectateur des rayons étrangers paralleles à l'axe de la vision que ceux qu'elle auroit reçûs perpendiculairement , parce que l'axe de la vision lui est alors perpendiculaire. Or la tête du Spectateur empêche qu'elle ne reçoive des rayons perpendiculaires , & par conséquent le fond de l'œil du Chat en peut être mieux aperçû.

Nous ne parlerons ici ni de la structure du muscle de l'Iris , ni du principal organe de la vision. M. de la Hire tient pour la Retine contre la Choroïde ; mais ces sortes de questions ne peuvent devenir interessantes sans un certain détail , qui fasse voir la grandeur & l'importance de ce qui paroïssoit petit & leger.





ACOUSTIQUE.

SUR LES SONS DES CILINDRES

SOLIDES.

Quand on voit des Cordes d'Instrument pincées ou V. les M.
P. 47.
frapées fremir dans toute leur étendue, & qu'on entend que les tons qu'elles donnent suivent de certaines proportions de leurs longueurs, que par ex. elles donnent l'Octave si ces longueurs sont comme 1 à 2, la Quinte, si elles sont comme 2 à 3 &c, il est fort naturel de croire que les tons dépendent des fremissements ou vibrations que font les cordes entieres dans toute leur longueur, & en effet la plupart des Musiciens, & même des Physiciens sont tombés dans cette pensée. Cependant M. Carré après avoir fort étudié cette matiere est persuadé que ce qui produit les sons immédiatement sont les vibrations particulieres de toutes les petites parties de la corde, ou plus généralement du corps sonore, mises en ressort les unes après les autres par la premiere percussion, & que les vibrations *totales* ne servent qu'à augmenter la force du son, ou sa durée.

Pour s'assurer de cette opinion, il a examiné des corps sonores incapables de vibrations totales, comme des Cylindres de bois, & il les a pris de bois de Merisier parce qu'il a plus de son. Il leur a trouvé des tons differents selon leurs differentes grandeurs, mais dans des proportions bien differentes de celles des Cordes. Afin que deux Cylindres de bois pleins & solides soient à l'Octave, il faut que leurs solidités soient comme 1 & 8, au lieu que es longueurs de deux Cordes doivent être comme 1 & 2,

deux Cilindres qui donnent la Quinte sont comme 8 & 27, & deux Cordes comme 2 & 3, & en général afin que deux Cilindres fassent un certain accord déterminé, il faut que leurs solidités soient comme les Cubes des longueurs des Cordes qui feroient ce même accord. Ainsi l'on voit tout d'un coup que si deux Cordes qui sont comme 3 & 4 font la Quarte, deux Cilindres qui seront comme 27 & 64 la feront aussi.

Mais ce qui est bien à remarquer, il ne suffit pas que les solidités de ces Cilindres qui font l'Octave, la Quinte, la Quarte &c. soient comme 1 & 8, 8 & 27, 27 & 64 &c. des Cilindres de différentes proportions, c'est-à-dire, dont la hauteur & le rayon de la base auront différents rapports, peuvent avoir leurs solidités, par ex. comme 1 & 8, & tous ces Cilindres-là pris deux à deux ne feront pas l'Octave, il n'y aura que les deux dont les hauteurs & les rayons de la base auront le même rapport de 1 à 2, & qui par conséquent seront *semblables*, puisque leurs hauteurs & leurs rayons seront en même proportion. Il en va de même des Cilindres qui font les autres accords. On suppose ici ce qui est connu de tout le monde, que les solidités des Cilindres sont comme les produits de leurs hauteurs par le quarré de leurs rayons.

Cette experience conduit à une Theorie assez agreable, & qui confirme bien la pensée où est M. Carré, que les vibrations des petites parties du corps sonore sont la veritable cause du son. Car cela supposé, il est nécessaire qu'un Cilindre frappé fremisse non seulement selon toute sa longueur, mais encore selon tous les cercles qui le composent, & qu'il ait des vibrations tant *circulaires* que *longitudinales*, en un mot qu'un corps solide en ait selon ses trois dimensions. Si la nature de l'Octave est telle qu'il se doive faire deux vibrations d'un côté tandis qu'il ne s'en fait qu'une de l'autre, il faut, afin que deux Cilindres fassent cet accord, que l'un fasse deux vibrations tant longitudinales que circulaires tandis que l'autre n'en fera qu'une de chaque espece, & si un Cilindre

moins long de moitié qu'un autre employe la moitié moins de temps à faire une vibration longitudinale, il doit aussi avoir une circonférence, ou ce qui revient au même, un rayon la moitié moindre, pour mettre la moitié moins de temps à une vibration circulaire, & par conséquent il faut que les deux rayons aussi-bien que les longueurs ou hauteurs soient dans le même rapport de 1 à 2. C'est absolument la même chose pour les autres accords.

Par-là il est visible que deux Cilindres qui auront la même solidité, mais différents rapports de leur hauteur à leur rayon, feront différents accords avec un même Cilindre, & c'est aussi ce que M. Carré a trouvé par un grand nombre d'experiences dont il rapporte le détail.

Les Cordes doivent être comprises dans la Theorie générale des Cilindres, puisqu'elles en sont elles-mêmes, mais ce sont des Cilindres dont le rayon est presque infiniment petit par rapport à la hauteur ou longueur, & par conséquent la base dispaeroit dans les effets sensibles, & il n'est plus question que de la longueur qui détermine les accords. On peut croire cependant qu'un accord de deux Cordes seroit encore plus juste & plus parfait, si leurs bases étoient comme dans deux Cilindres, & au lieu que pour déterminer les accords des Cordes différentes en longueur on suppose toujours leurs grosseurs égales, on seroit mieux de les supposer inégales selon la proportion marquée.

Tout ceci n'est encore qu'une premiere vûe que M. Carré voudroit suivre, & qui le meneroit sans doute à de nouvelles découvertes par une grande quantité d'experiences différemment tournées. Il a déjà trouvé que les Parallelepipèdes pour faire des accords doivent être semblables entre eux comme les Cilindres, & semblables selon les mêmes rapports, ce qui confirme fort le principe général qui doit également porter sur les uns & sur les autres, & il a appris en même temps une chose qui s'y accommode parfaitement, c'est qu'un Cilindre

de même longueur, mais d'une plus grande solidité qu'un Parallelepipedé peut néanmoins rendre un son plus aigu, si sa solidité ne surpasse qu'à un certain point celle du Parallelepipedé. Cela vient de ce que les vibrations circulaires du Cilindre se font en moins de temps que les vibrations *quarrées* du Parallelepipedé ; car la figure circulaire étant parfaitement uniforme est plus favorable à la transmission du fremissement d'une partie à l'autre, & de plus ce fremissement est lui-même une ondulation circulaire, dont une partie se perd ou se ralentit dans les angles d'un parallelogramme.

Il seroit curieux de voir quels changemens de tons répondent aux changemens de dimensions, ou des Cilindres, ou des Parallelepipedes, ou même de quelques figures comme les Coniques, & s'il y a dans ces variations quelque suite reguliere. Il faudroit aussi éprouver des Cilindres de métal, & de differents métaux, des Tuyaux creux aussi-bien que des Cilindres solides. M. Carré a déjà fait quelques-unes de ces experiences, & resout par avance quelques Problèmes pour faciliter les autres, si on a envie de les faire. Mais tout cela demande du temps. Les Siftêmes ne sont plus des jeux d'esprit, où la liberté d'imaginer tout ce qu'on vouloit eût rendu la lenteur inexcusable.

O B S E R V A T I O N

D' A C O U S T I Q U E.

AL'occasion du Memoire de M. Carré, M. de la Hire fit remarquer que quand on frappe un Cilindre de bois successivement dans toutes ses parties selon sa longueur, il y a toujours vers ses deux bouts deux endroits où le son est considerablement amorti, & presque éteint. Il n'importe de quelles dimensions soit le Cilindre. Ce sont comme deux foyers, non de réunion,
&

& d'augmentation de forces , mais au contraire de *dissipation* & d'affoiblissement.



MECHANIQUE.

SUR LA RESISTANCE

DES MILIEUX AU MOUVEMENT.

M Varignon traitant en 1708 de la Résistance des Milieux aux mouvements primitivement variés, n'avoit encore considéré que ce qui doit arriver dans la premiere des trois hypotheses les plus vrai-semblables qu'on peut faire sur cette Résistance *, & n'avoit pas même entierement épuisé cette premiere hypothese. Il en donne ici une espece de petite suite.

V. les M. p. 69. 193. 267.

* V. l'Hist. de 1707. p. 139. & suiv. & celle de 1708. p. 123. & suiv.

Galilée , & plusieurs autres après lui , ont trouvé par experience que dans des chutes de Corps pesants faites des plus grandes hauteurs qu'il a été possible, les vitesses acquises suivoient assés exactement la raison des temps. Cependant l'Air résistoit à ces Corps, & par consequent les vitesses ainsi réglées ne sont pas les vitesses primitives que la résistance du milieu diminue, mais ce sont au contraire celles qui restent des primitives diminuées. M. Varignon dans tous ses Memoires de 1708 les a prises pour primitives , & il a cherché sur ce pié-là quelle Courbe devoit décrire un Corps jetté obliquement à l'Horison. Maintenant il corrige cette erreur volontaire , il ne prend plus ces vitesses que pour celles qui restent au Corps malgré la résistance du milieu , & par consequent en cherchant la Courbe de projection d'un Corps jetté obliquement, il ne considere plus l'effet de la résistance du mi-

lieu à l'égard de ces vitesses verticales imprimées par la pesanteur, mais seulement à l'égard de la vitesse oblique de projection, imprimée par une force étrangere. La premiere hipothese sur la Résistance subsiste toujours. Il est évident que cette Courbe formée par deux mouvements dont il n'y en a qu'un que la résistance du milieu altere, est differente de celle où ils en sont alterés tous deux, mais elle lui ressemble en d'autres choses, par exemple a par la même raison une amplitude ou étendue horizontale finie avec un cours infini, & par consequent une Asymptote. Nous n'avons rien de nouveau à dire sur cette nouvelle Courbe, le calcul est different, mais l'esprit est le même.

Si les vitesses acquises dans l'air malgré sa résistance suivent la raison des temps, il étoit naturel de chercher quelles étoient les vitesses primitives, dont celles-là étoient les restes. M. Varignon trouve fort aisément par ses principes, qu'elles suivroient une somme faite des temps & de leurs quarrés, de sorte que la vitesse de la 1^{re} Minute seroit 2, celle de la 2^{de} seroit 6, celle de la 3^{me} 12, celle de la 4^{me} 20 &c. c'est-à-dire que ces vitesses croistroient comme la Suite des Nombres triangulaires, 1, 3, 6, 10 &c. Il y a plus; la Pesanteur, que l'on conçoit ordinairement comme constante, ne le seroit plus, & croistroit jusqu'à devenir infinie au bout d'un temps infini. Comme c'est elle qui imprimeroit les vitesses qu'on a déterminées, il est aisé de remonter jusqu'à elle par leur moyen, en suivant les Regles générales de M. Varignon. Il les applique par occasion à un Problème proposé dans le Journal de Trevoux, qu'elles résolvent dans le moment.

La premiere des trois hipothèses les plus apparentes qu'on puisse faire sur la résistance des Milieux étant enfin entierement expédiée, M. Varignon passe à la seconde; c'est celle où la résistance suit les quarrés de la vitesse. On suppose toujours le Système de Galilée pour la chute des Corps pesants. Si l'on suppose d'ailleurs, comme dans

l'Hist. de 1708*, que de la vitesse du 1^{er} instant la résistance en retranche la 10^{me} partie, on trouvera en suivant dans cette seconde hypothese de la résistance le même raisonnement qui a été fait dans la premiere, que la vitesse primitive du 1^{er} instant, qui auroit été 1 ou $\frac{10}{10}$ ayant perdu $\frac{1}{10}$, la vitesse primitive du 2^d qui seroit $\frac{9}{10}$ plus 1, ou $\frac{19}{10}$, perdrait une partie qui seroit à $\frac{1}{10}$, comme le carré de la vitesse $\frac{19}{10}$ est au carré de la vitesse $\frac{10}{10}$, ou 361 à 100. Cette partie seroit donc $\frac{361}{1000}$, qui étant retranchée de la vitesse primitive du 2^d instant $\frac{19}{10}$ ou $\frac{1900}{1000}$ la réduiroit à n'être plus que $\frac{1539}{1000}$, de sorte que les vitesses des 2 premiers instants qui sans la résistance auroient été 1000 & 2000, ne seroient plus que 900 & 1539. Et si l'on veut leur comparer les vitesses 90 & 171, ou 900 & 1710 qui leur répondent dans la premiere hypothese de la résistance, on verra de combien cette seconde diminuë davantage la vitesse.

Si dans la premiere hypothese, où la même vitesse du Corps pesant qui tombe diminuë moins, elle ne peut cependant devenir que finie en un temps infini, & qu'arriver à celle qu'on nomme *terminale*, à plus forte raison ne deviendra-t-elle aussi que finie dans l'hypothese presente, & même il est évident que la terminale y doit être moindre. Pour la trouver, il ne faut que faire ici le même raisonnement qui a été fait dans l'Hist. de 1708*, en observant seulement que la résistance du Milieu croist par rapport à la Pesanteur en quelque instant que ce soit, non plus comme la vitesse de cet instant croist par rapport à la vitesse terminale, mais comme le carré de cette vitesse croist par rapport au carré de la terminale. Le changement d'hypothese rend la necessité de ce changement évidente. Et pour se servir du même Exemple qu'on a apporté, la vitesse terminale qui y étoit de près de 21 Lieues en une seconde, ne fera plus que de 480 Toises, qui ne font pas la 96^{me} partie de 21 Lieues.

Quand M. Varignon vient à chercher par sa Theorie générale quelle doit être la Courbe qui dans l'hypothese

presente representera par ses Ordonnées les vitesses croissantes de chaque instant, & par les sommes de ses Ordonnées ou les espaces curvilignes, les espaces parcourus en ligne droite par le Corps qui tombe, il trouve aussi-tôt qu'elle doit être telle que son Axe étant divisé en parties infiniment petites égales qui représenteront des instants égaux, l'infiniment petit de cet Axe, ou d'une Abscisse quelconque, sera à l'infiniment petit de l'Ordonnée correspondante, comme le quarré de la vitesse terminale est au quarré de cette même vitesse moins le quarré de la vitesse de l'instant quelconque, qu'on a choisi.

Dans cette proportion, qui fait l'Equation de la Courbe, il est visible qu'il y a deux grandeurs constantes, l'infiniment petit de l'Abscisse, & le quarré de la vitesse terminale, & tout le jeu de la variation n'est qu'entre les deux autres grandeurs. Le quarré de la vitesse terminale moins celui d'une vitesse quelconque, est une grandeur qui diminue toujours à compter depuis l'origine de la Courbe, parce que la vitesse croist toujours, & par consequent les differences des Ordonnées diminuent toujours aussi, tandis que les Ordonnées croissent, ce qui prouve par les principes de la nouvelle Geometrie que la Courbe est contraire du côté de son Axe, & tend à lui devenir parallele. Il est clair qu'une droite parallele à cet Axe en sera aussi l'Asymptote, puisqu'il y a une Ordonnée finie representant la vitesse terminale à laquelle la Courbe ne peut arriver qu'après un cours infini. De ce que la vitesse est nulle à l'origine de la Courbe, il s'ensuit évidemment que les deux infiniment petits y sont égaux, & par consequent * la Tangente en ce point où la Courbe y coupe l'Axe sous un angle de 45 degrés. Et de ce que la vitesse du dernier point de la Courbe infiniment éloigné est la même que la terminale, il s'ensuit que l'infiniment petit de la dernière Ordonnée est nul par rapport à celui de l'Abscisse, & par consequent que la Courbe est alors parallele à son Axe,

* V. L'Hist.
de 1706. p.
51. & 52.

Toutes ces conséquences s'offrent d'abord aux yeux d'un Geometre, même mediocre, mais il est moins facile de voir quels sont les espaces compris par cette Courbe, & qui doivent représenter ceux que le Corps parcourt en tombant. M. Varignon trouve que ces espaces curvilignes sont comme les Logarithmes négatifs de la Racine du quarré de la vitesse terminale moins celui de la vitesse correspondante. Ces idées ne sont pas si claires pour tout le monde, qu'il doive être inutile de les développer ici avec quelque étendue.

Les Logarithmes en général sont une suite de Grandeurs telles que la 1^{re} & la 2^{de}, la 2^{de} & la 3^{me} &c. représentent par leurs rapports arithmetiques les rapports geometriques de la 1^{re} & de la 2^{de}, de la 2^{de} & de la 3^{me} &c. d'une autre suite de Grandeurs, que l'on dit alors qui ont les premieres pour Logarithmes. La maniere dont des rapports arithmetiques représentent des rapports geometriques, consiste en ce que les arithmetiques sont ou constants, ou croissans, ou décroissans, lorsque les geometriques le sont. Ainsi tous les termes d'une progression geometrique croissante ayant leur rapport geometrique constant, ils ont pour Logarithmes les Nombres naturels 1, 2, 3 &c. dont le rapport arithmetique est toujours le même. Les Nombres naturels eux-mêmes * considérés selon leur rapport geometrique qui est toujours décroissant, ont pour Logarithmes des nombres dont le rapport arithmetique l'est toujours aussi. Et quand le rapport geometrique d'une suite de Grandeurs seroit tantôt constant, tantôt croissant ou décroissant, cela n'empêcheroit pas qu'elles n'eussent leurs Logarithmes, dont le rapport arithmetique variroit de la même maniere. Il n'y a point de suite de Grandeurs, à laquelle on ne puisse imaginer des Logarithmes.

* V. l'Hist.
de 1709. p.
87.

Une propriété des Logarithmes connue de tout le monde & qui suit immédiatement de la nature des proportions arithmetique & geometrique, c'est que l'addition & la soustraction font pour eux le même effet, que

la multiplication & la division pour les Grandeurs , dont ils sont Logarithmes. Parceque l'unité est une Grandeur qui en multipliant une autre Grandeur ne l'augmente point , & en la divisant ne la diminue point , il faut que son Logarithme soit une Grandeur qui ajoûtée à une autre ou retranchée ne l'augmente , ni ne la diminue , or il n'y a que Zero qui soit de cette espece , & par conséquent o est toujours le Logarithme de 1. Si l'on conçoit au-dessous de 1 des fractions quelconques toujours décroissantes , on verra que puisque ces fractions sont telles qu'en multipliant un nombre entier elles le diminuent , & qu'en le divisant elles l'augmentent , il faut que leurs Logarithmes soient des nombres qui ajoûtés à un autre le diminuent & retranchés l'augmentent , & comme il n'y n'y a que des nombres negatifs qui puissent faire cet effet , ces Logarithmes le seront , au lieu que ceux des Grandeurs au-dessus de 1 sont positifs. Des Logarithmes negatifs sont donc des Logarithmes de Grandeurs moindres que 1 , ou que telle grandeur qu'on aura prise arbitrairement pour l'unité. Plus une fraction est petite , plus elle diminue le nombre qu'elle multiplie , & augmente celui qu'elle divise , & par conséquent plus elle est petite , plus son Logarithme est grand , de sorte que si elle est infiniment petite ou Zero , son Logarithme sera infini. Pour concevoir donc à la fois toutes les suites de Grandeurs possibles , & tous leurs Logarithmes , il faut s'imaginer l'unité qui a d'un côté des Grandeurs croissantes jusqu'à l'infiniment grand , & de l'autre des Grandeurs décroissantes jusqu'à l'infiniment petit ; Zero est le Logarithme de l'unité , au-dessus duquel sont des Logarithmes positifs toujours croissants jusqu'à l'infini , & au-dessous des Logarithmes negatifs , toujours croissants pareillement jusqu'à l'infini , de sorte que la premiere suite dont on considere les rapports geometriques est continuë , & toujours croissante depuis l'infiniment petit jusqu'à l'infiniment grand , & la seconde , qui est la suite arithmetique , ou celle des Logarithmes , est , pour ainsi dire , brisée en son milieu.

Cela étant entendu ; on peut prendre pour l'unité la vitesse terminale, & son quarré toujours diminué de celui de la vitesse de chaque instant, ou la Racine de ce quarré toujours ainsi diminuée, formera une suite de Grandeurs toujours moindres que l'unité. Les Logarithmes de ces Grandeurs seront donc négatifs, & ce sont eux qui représentent les differents espaces parcourus dans les temps correspondants par le Corps qui tombe. A l'origine de la Courbe, & de la chute du Corps la vitesse étant nulle, la premiere Grandeur de la suite que nous considerons ici est 1, dont le Logarithme est 0, & par consequent l'espace parcouru par le Corps est nul, après cela les Grandeurs de la suite toujours moindres que 1 sont toujours aussi décroissantes, par consequent leurs Logarithmes négatifs croissent, & à la fin le Logarithme de la dernière, qui est nulle, est infini, c'est à dire que l'espace parcouru par le Corps croist toujours, & dans un temps infini devient infiniment grand.

Si l'on veut avoir des Logarithmes en lignes, il faut se servir ou d'une Logarithmique, ou d'une Hiperbole. La Logarithmique n'a ni origine, qui soit naturellement déterminée, ni fin, & les infiniment petits de ses Abscisses étant supposés égaux, toutes ses Ordonnées infiniment proches tirées sur son Axe qui est aussi son Asymptote, & terminées à sa convexité, sont en progression geometrique, & par consequent les Abscisses correspondantes sont leurs Logarithmes. Si l'on prend arbitrairement une Ordonnée quelconque pour l'unité, son Abscisse sera Zero, parce que l'on fixe arbitrairement à ce point-là une origine de la Courbe, & toutes les Ordonnées croissantes à l'infini qui seront d'un côté de cette premiere, & les Ordonnées décroissantes à l'infini qui seront de l'autre côté, auront les unes & les autres des Logarithmes toujours croissants, mais les unes les auront positifs, & les autres négatifs, & le dernier des négatifs qui répondra à la dernière Ordonnée infiniment petite sera infini, aussi-bien que le dernier des positifs. Il est vi-

sible que des Ordonnées quelconques prises dans des intervalles inégaux, & qui par conséquent ne seront point entre elles en progression geometrique, n'en auront pas moins pour Logarithmes leurs Abscisses correspondantes, d'où il suit qu'un Logarithmique fournira toujours les Logarithmes de telles lignes qu'on voudra, & quelque rapport qu'elles aient entre elles, car elles seront quelques-unes de ses Ordonnées. Il en va de même de l'Hiperbole. Une des Asimptotes d'une Hiperbole équilatere étant prise pour Axe, dont l'origine est au point de concours des deux Asimptotes, & des lignes parallèles à l'autre Asimptote étant prises pour Ordonnées, on prend pour l'unité l'Abscisse de l'Ordonnée qui se termine au sommet de l'Hiperbole, & si l'on conçoit ensuite que les Abscisses plus grandes que l'unité, & infiniment peu différentes chacune de celle qui la suit, croissent selon leur progression geometrique, il est démontré que les espaces compris entre la difference d'une Abscisse quelconque, le petit Arc Hiperbolique correspondant, & les deux Ordonnées qui s'y terminent, seront tous égaux entre eux, de sorte que les sommes de ces espaces croîtront toujours en progression arithmetique, & qu'elles seront les Logarithmes des Abscisses correspondantes. L'espace asimptotique étant fini, il est le Logarithme d'une Abscisse qui est alors infinie, puisque c'est l'Asimptote même étendue à l'infini. Si de l'autre côté de l'Ordonnée qui se termine au sommet de l'Hiperbole, on prend des Abscisses moindres que celle qui est 1, & toujours décroissantes jusqu'au point de concours des Asimptotes, ce qu'on fera en les prenant toujours égales à 1, moins une Grandeur qui croîtra toujours jusqu'à devenir égale à 1, & si ces Abscisses décroissent en progression geometrique, les espaces hiperboliques infiniment perits qui répondront à leurs differences seront encore égaux entre eux, d'où il suit que les sommes croissantes des espaces seront les Logarithmes des Abscisses décroissantes, jusqu'à ce qu'enfin l'espace devenu asimptotique & infini

soit

soit le Logarithme de la dernière Abscisse devenue Zero. Ainsi celle qui étoit 1 ne pourra avoir aucun espace pour Logarithme, ou, ce qui est la même chose, elle aura Zero, & d'un côté de ce Zero seront tous les Logarithmes positifs, & de l'autre tous les négatifs.

M. Varignon trouve donc par une Logarithmique, ou par une Hiperbole équilatere les Logarithmes qui doivent représenter les espaces parcourus par le Corps tombant, & comme ce rapport des espaces vient essentiellement de l'hipotese qu'on fait ici sur la Résistance, l'une ou l'autre de ces Courbes entre nécessairement aussi dans la construction de celle qui représente les vitesses que la résistance laisse au Corps dans cette hipotese. C'étoient dans la première hipotese la Logarithmique ou l'Hiperbole mêmes qui servoient immédiatement à exprimer ces vitesses. Les différents calculs que demande l'une ou l'autre de ces deux Courbes, les différents tours qu'il faut prendre pour les employer, les comparaisons qu'on en peut faire, les conséquences où M. Newton est arrivé sur cette même matière par d'autres méthodes, & que M. Varignon veut retrouver par la sienne, donnent beaucoup ici à la Geometrie de quoi s'exercer. De tout cela nous n'en apporterons qu'un seul exemple, choisi sur un fort grand nombre.

M. Newton a trouvé que dans l'hipotese présente la force de la pesanteur toujours diminuée par la résistance du Milieu, décroît en progression geometrique, les temps étant pris en progression arithmetique, ou, ce qui est ici la même chose, les espaces parcourus, puisqu'ils peuvent être représentés par des Logarithmes, qui suivent cette progression. Ce que nous avons dit sur les Logarithmes hiperboliques des Abscisses moindres que 1, produit naturellement cette vérité. Car ces Logarithmes étant en progression arithmetique, les Abscisses correspondantes sont nécessairement en progression geometrique. La pesanteur peut être représentée par l'Abscisse qui est 1, & la grandeur toujours croissante qu'il en faut

retrancher , fera ce que la résistance du milieu retranche toujours de la force , ou de l'effet de la pesanteur. Or les Abscisses correspondantes aux Logarithmes supposés ne sont que l'unité toujours ainsi diminuée de plus en plus , jusqu'à devenir enfin Zero , donc les temps ou les espaces parcourus étant pris en progression arithmétique , la force ou l'effet de la pesanteur décroît toujours en progression geometrique , jusqu'à ce qu'au bout d'un temps infini , ou d'un espace infini parcouru , cette force ou plutôt son effet soit entierement détruit par la résistance du Milieu , après quoi , comme nous l'avons
 * p. 126. dit dans l'Hist. de 1708 * , s'il étoit possible que le Corps continuât à tomber , il n'auroit plus qu'un mouvement uniforme.

Il n'a été question jusqu'ici que d'un Corps mû par sa seule pesanteur , mais il pourroit avoir été jetté de haut en bas avec une certaine vitesse initiale constante , à laquelle s'ajouteroit toujours la vitesse variable que la pesanteur produiroit. Ce que nous avons dit sur ce cas-là dans la premiere hypothese de la Résistance , s'applique ici de soi-même , les changements nécessaires à cause du changement d'hypothese , y étant apportés. Ici la Courbe des deux cas sera la même , comme elle l'étoit là , mais au lieu de commencer par une Ordonnée égale à Zero , ce qui arrive quand le Corps n'est mû que par sa pesanteur , elle commencera par une Ordonnée finie qui représentera la vitesse initiale. Cette vitesse sera encore ici comme là , ou plus petite que la terminale , ou égale , ou plus grande , & dans ces trois cas les effets seront les mêmes de chaque côté ; la vitesse du 1^{er} cas sera toujours accélérée , celle du 2^d toujours uniforme , celle du 3^{me} toujours retardée , & les mêmes changements arriveront aux différentes Courbes des deux hypotheses.

Dans l'hypothese presente des Logarithmes représenteront les espaces parcourus , lorsqu'il y a une vitesse initiale , comme ils les representoient lorsqu'il n'y en avoit point , mais ce seront des Logarithmes d'autres Gran-

deurs. M. Varignon les trouve & par la Logarithmique , & par l'Hiperbole , & montre une grande abondance de tours geometriques.

Les mouvements retardés primitivement selon le Siftême de Galilée par l'action de la pesanteur , & de plus retardés encore par la résistance supposée du Milieu , suivant les accelerés. On considere le mouvement d'un Corps jetté de bas en haut , après que l'on a considéré sa chute de haut en bas. On a vû dans la premiere hypothese de la Résistance * que la même Courbe , mais prise de deux sens contraires , representoit les vitesses du mouvement acceleré , & du retardé , mais dans la presente hypothese ce sont deux Courbes differentes. M. Varignon trouve en un moment par sa Formule générale que dans la Courbe qui represente ici les vitesses du mouvement retardé , l'infiniment petit de l'Abscisse supposé constant est à l'infiniment petit d'une Ordonnée quelconque , comme le quarré de la vitesse initiale avec laquelle on fait la projection de bas en haut , est à ce même quarré plus celui de la vitesse representée par l'Ordonnée quelconque qu'on a choisie. Les vitesses sont necessairement ici des Grandeurs toujours décroissantes , & par consequent aussi les sommes faites de leurs quarrés & de celui de la vitesse initiale qui est constante & déterminée. Donc par la proportion fondamentale qui fait l'Equation de la Courbe , les infiniment petits des Ordonnées sont décroissants aussi-bien que les Ordonnées , ce qui rend la Courbe convexe du côté de son Axe. La vitesse variable & décroissante du Corps étant nulle au dernier instant de son mouvement , les deux Grandeurs finies de la proportion sont égales , & par consequent aussi les deux infiniment petits , d'où il suit que la Courbe finit en coupant son Axe sous un angle de 45 degrés. Et comme à l'origine du mouvement la vitesse variable est égale à l'initiale , il s'ensuit évidemment que l'infiniment petit de l'Abscisse n'est alors que la moitié de celui de l'Ordonnée , ce qui donne un angle plus grand que

* V l'Hist.
de 1703. p.
130. & 131.

45 degrés, dont la Courbe à son origine est inclinée à son Axe. On voit par-là combien elle est différente de celle du mouvement accéléré, décrite ci-dessus *.

* p. 100. M. Varignon détermine assez facilement, & par le moyen soit d'une Logarithmique, soit d'une Hiperbole équilatere, les espaces curvilignes quelconques compris par cette Courbe, & heureusement leurs rapports se réduisent ensuite à des rapports de simples lignes droites. Par-là se déterminent les rapports des espaces parcourus en ligne droite de bas en haut par le Corps en des temps quelconques, après quoi on les compare à ceux que le Corps auroit parcourus, soit que son mouvement eût été uniforme, & que sa pesanteur ne l'eût pas retardé, soit qu'il n'eût été retardé que par sa pesanteur seule & n'eût trouvé aucune résistance de la part du Milieu, soit même qu'il fût tombé de haut en bas. On compare aussi les durées de différents mouvements; par ex. la durée du mouvement du Corps jetté de bas en haut dans un Milieu qui résiste en raison des quarrés des vitesses, est plus courte qu'elle n'auroit été dans un Milieu sans résistance, en même proportion qu'un Cercle est plus petit que son quarré circonscrit, ce que M. Huguens avoit déjà avancé, mais sans preuve.

M. Varignon, qui ne veut rien laisser à désirer sur cette matiere, y rassemble, outre plusieurs Propositions nouvelles qui naissent sous ses pas, toutes celles que M.^r Huguens & Newton avoient déjà ou simplement avancées, ou prouvées par d'autres methodes, & quelquefois d'une maniere assez épineuse.

De ce grand nombre de Propositions démontrées par M. Varignon, nous n'en détacherons ici que deux plus remarquables, & plus intelligibles, & d'ailleurs nouvelles.

1. La pesanteur constante qui s'oppose au mouvement du Corps jetté de bas en haut, & la résistance variable du Milieu, toujours décroissante selon les quarrés des vitesses, sont une somme toujours décroissante, & c'est-là

tout ce que le Corps trouve d'opposition à son mouvement. Si l'on divise en parties égales tout l'espace parcouru par le Corps depuis qu'il a commencé à se mouvoir, cette somme prise à la fin de chaque division décroît en progression geometrique.

2. A chaque instant du mouvement, la pesanteur du Corps, la vitesse, & la résistance que lui fait le Milieu, sont trois Grandeurs en progression geometrique. En effet, la pesanteur étant prise pour 1, il faut aux yeux que 1, la vitesse, & le quarré de la vitesse font une proportion geometrique continuë. Et à la fin du mouvement où la vitesse est Zero, cette proportion subsiste encore, car comme la pesanteur où 1 est à la vitesse devenuë Zero ou un infiniment petit du 1^{er} genre, ainsi cet infiniment petit est à son quarré, qui est un infiniment petit du 2^d genre.

Après tout ce qui a été dit dans les Hist. de 1707 & de 1708, on voit assés que quand M. Varignon a une fois la Courbe qui dans l'hypothese presente de la Résistance exprime par ses Ordonnées les vitesses d'un Corps mû soit de haut en bas, soit de bas en haut, il lui est fort aisé de trouver celle qui par ses Ordonnées exprimera les vitesses correspondantes que le Milieu a détruites à la fin de chaque temps, ou les résistances *totales*.

SUR UN PROBLEME

DE STATIQUE.

SI une Corde d'une longueur indéterminée attachée V. les M.
p. 351. par une de ses extrémités à un clou, passe librement sur une Poulie fixe & porte à son autre extrémité un poids, il est clair que si l'on suppose cette corde absolument sans pesanteur, sa partie comprise entre le clou & la poulie sera tenduë en ligne droite. Mais si l'on attache à cette même partie un second poids, comme il la

tirera en embas, il l'allongera en faisant passer de nouvelle corde sur la Poulie, & il lui fera faire un angle à l'endroit où il sera attaché, de sorte que cette partie sera comme brisée en deux. Si ce second poids étoit infiniment petit par rapport au premier, il ne changeroit rien à la premiere position de la corde, mais s'il étoit infiniment grand, il tireroit la corde & en allongeroit la partie comprise entre le clou & la poulie, jusqu'à ce qu'il fût mis dans la ligne verticale tirée par le clou, qui seroit son point de suspension. Dans tous les cas moyens entre ces deux, il allongera d'autant plus la partie supposée de la corde, il descendra d'autant plus bas, & approchera d'autant plus de la verticale tirée par le clou, qu'il sera plus grand par rapport au premier. Le rapport des deux poids étant donné, aussi-bien que le point où l'on attache le second à la corde, on demande jusqu'à quel point il descendra, ou, ce qui revient au même, à quel point il sera en équilibre avec le premier? C'est un Problème de Statique proposé à M. Varignon, & qu'il a résolu très-facilement par les principes de sa *Nouvelle Méchanique* imprimée en 1687.

* p. 108.
& 109.

Nous avons déjà expliqué selon ces mêmes principes dans l'Hist. de 1702*, & comment deux Puissances différentes qui agissent pour mouvoir un même Corps ne peuvent le mouvoir que selon une troisième direction composée & résultante de leurs deux directions particulières, & comment elles demeureroient en équilibre, c'est à dire, sans aucun effet de leurs actions, si l'on présentoit à ce Corps dans la ligne de leur direction composée, un obstacle invincible, un point fixe & inébranlable. C'est-là ce qui fait l'équilibre du Levier, du Plan incliné, &c. mais l'équilibre arrive encore sans qu'il se presente un obstacle de cette nature au mouvement du Corps; par ex. quand deux Puissances soutiennent un Corps pesant suspendu à deux Cordes. C'est cet équilibre dont nous avons besoin présentement.

Un Corps pesant ne peut être soutenu en l'air à moins

qu'on ne lui donne autant de force pour monter, qu'il en a naturellement pour descendre, & deux Puissances qui le tiendront suspendu chacune à une corde ne lui peuvent imprimer cette force pour monter, si leurs deux directions ne concourent à lui en donner une directement opposée à celle que la pesanteur lui donneroit, & en même temps si l'impression composée qu'il reçoit des deux actions qu'elles exercent sur lui n'est égale à celle de cette même pesanteur. Pour le 1^{er} point, il faut, puis-que la direction de la pesanteur est verticale de haut en bas, que les deux Puissances s'accordent à donner au Corps une direction verticale de bas en haut. Cette verticale sera nécessairement posée entre les deux directions simples des deux Puissances, & elle sera la Diagonale d'un Parallelogramme qu'on feroit des lignes de ces deux directions simples, auxquelles nous ne donnons point encore de longueur déterminée. Quant au 2^d point, si l'on détermine à ces deux lignes des directions simples une longueur telle que chacune représente la Puissance dont elle est direction, ou, ce qui est la même chose, qu'elles aient par leurs longueurs le même rapport que les puissances ont par leurs forces, & si de ces deux lignes on fait un Parallelogramme, dont la Diagonale sera, comme nous venons de le dire, la direction verticale du Corps pesant, il est constant que cette Diagonale représentera l'impression composée que font les deux Puissances sur le Corps. Si en même temps la longueur de cette Diagonale a le même rapport aux deux côtés du Parallelogramme, que la pesanteur du Corps aux deux Puissances, l'impression des deux puissances sur le corps sera égale à celle de sa pesanteur, & par conséquent il y aura équilibre.

Deux Puissances étant déterminées avec leurs directions, elles ne peuvent donc soutenir qu'un Corps d'une certaine pesanteur; tout autre Corps, elles le feroient monter, ou le laisseroient descendre. Réciproquement un Corps pesant étant déterminé avec deux Puissances qui

doivent le soutenir, elles ne peuvent le soutenir que sous certaines directions.

Dans le Problème proposé, le second poids doit être soutenu par le premier, & par le Clou. Le Clou étant supposé immobile & inébranlable, il n'a point de force déterminée, & il soutiendra toujours la partie quelconque du second poids, que le premier ne soutiendra pas. Ainsi l'on fait seulement qu'il se fera un Parallelogramme, dont la Diagonale prise sur une verticale, & un des Côtés pris sur la direction inconnue sous laquelle le premier poids tirera le second, auront le même rapport que le second poids & le premier.

Par le moyen de ce seul rapport donné, M. Varignon construit une Courbe, sur laquelle il faut nécessairement que se trouve le point où le second poids est suspendu à la Corde, quelque place que ce poids prenne, car cette Courbe est le *Lieu* de tous les Parallelogrammes possibles formés sous le rapport déterminé. D'un autre côté, le point où le second poids est suspendu à la corde, ou, ce qui est la même chose, la distance du Clou étant déterminée, il faut nécessairement aussi, & quelque place que le poids prenne, que ce point se trouve sur la circonférence d'un Cercle décrit du Clou comme centre, & qui aura cette distance pour rayon. De là il suit évidemment que l'intersection de la Courbe & du Cercle déterminera la place que prendra le second poids. Trouver après cela l'équation algébrique de la Courbe, ou même ses propriétés, ce n'est plus, pour ainsi dire, qu'un jeu géométrique.

M Des Billettes a donné la maniere dont se fait la Préparation des Cuirs,

M. Jaugeon, celle dont se font les Bas soit à l'Aiguille, soit au Métier.

Et M. de la Hire, tout ce qui appartient à la pratique de l'Art de la Peinture.

MACHINES

MACHINES OU INVENTIONS

APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE

PENDANT L'ANNEE 1709.

I.

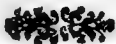
UNE Machine inventée par M. Molard pour faire mouvoir avec une grande facilité les Aiguilles des Cadrans très-éloignés de l'Horloge, sans avoir besoin de longues verges de fer, ni de Molettes, & de Pignons, dont la pesanteur demande un grand poids pour le mouvement des Roües. Cette Machine a paru ingénieuse, quoique ce ne soit qu'une application d'un renvoy, dont on se sert ordinairement pour les Sonnettes.

II.

Le Parasol ou Parapluie de M. Marius dont il a été parlé dans l'Hist. de 1705* & dans celle de 1707*, encore perfectionné. * p. 138.
* p. 136.

III.

Une Methode de tirer la seconde & dernière Séance de la Lotterie de Lorraine. Elle a été trouvée ingénieuse, & l'on a crû qu'elle devoit donner sûrement un Lot à celui qui auroit pris 50 Billets de suite, sans ce qui lui pouvoit venir de hasard.





E L O G E

DE M. DE TSCHIRNHAUS.

ERNFROY WALTER DE TSCHIRNHAUS Seigneur de Kislingwald & de Stoltzenberg nâquit le 10 Avril 1651 à Lislingwald dans la Lusace superieure, de Christophle Tschirnhaus & de N... de Sterling, tous deux d'une ancienne noblesse. Il y avoit plus de 400 ans que la maison de Tschirnhaus qui étoit venue de Moravie & de Boheme possédoit près de la ville de Gorlitz cette Seigneurie de Kislingwald, où nâquit celui dont nous parlons.

Il eut pour les Sciences tous les Maistres que l'on donne aux gens de sa condition, mais il répondit à leurs soins autrement que les gens de sa condition n'ont coûtume d'y répondre. Dés qu'il fût qu'il y avoit au monde une Geometrie, il la faisit avec ardeur, & delà il passa rapidement aux autres parties des Mathematiques, qui en lui offrant mille nouveautés agréables, se disputoient les unes aux autres sa curiosité.

A l'âge de 17 ans son Pere l'envoya achever ses études à Leyde, il y arriva dans le temps d'une maladie épidémique qui le mit en grand danger de sa vie. Il eut bien-tôt malgré sa jeunesse beaucoup de réputation parmi les Savants de Hollande. Mais la guerre ayant commencé en 1672 il devint homme de guerre, & montra qu'il savoit aussi-bien faire son devoir que suivre son inclination. Cette inclination dominante pour les Lettres contribua même à lui faire prendre les armes, elle lui avoit fait lier une étroite amitié avec M. le Baron de Neuland qui avoit les mêmes goûts, & comme ce Baron étoit au service des Etats, il engagea M. Tschirnhaus à

y entrer aussi en qualité de Volontaire , afin qu'ils ne se separassent point l'un de l'autre. M. de Tschirnhaus servit 18 mois , après quoi il fut obligé de retourner en son Païs. Il en repartit quelque temps après pour voyager selon la coûtume de sa nation , qui croit avoir besoin du commerce des autres pour se polir , & qui en doit parvenir d'autant plus aisément à se rendre plus polie qu'elles. Il vit l'Angleterre , la France , l'Italie , la Sicile , Malte. Dans tous les Païs où il passa il s'attacha à voir les Savants & tout ce qui est un spectacle pour les Savants, curiosités de l'Histoire naturelle , ouvrages extraordinaires de l'art, manufactures singulieres. Ce grand nombre de differents faits bien observés ne sont pas dans un bon esprit de simples faits , & d'inutiles ornemens de la memoire, ils deviennent les principes d'une infinité de vûës , où la plus fine Theorie denuée d'experience n'arriveroit jamais. Plus les yeux ont vû, plus la raison voit elle-même.

M. de Tschirnhaus retourna en Allemagne, & alla passer quelque temps à la Cour de l'Empereur Leopold, car le Philosophe peut aller jusques dans les Cours, ne fût-ce que pour y observer des mœurs & des façons de penser qu'il n'auroit pas trop devinées.

Au milieu de cette vie agitée, ou du moins assés mêlée de mouvement, les Siences, & sur-tout les Mathematiques occupoient toujours M. de Tschirnhaus. Il avoit acquis avec art l'habitude de n'être pas aisément troublé, & s'étoit endurci aux distractions. Il vint à Paris pour la troisième fois en 1682 ; il y apportoit des découvertes qu'il vouloit proposer à l'Academie des Sciences, c'étoient les fameuses Caustiques qui ont retenu son nom, car on dit ordinairement les Caustiques de M. de Tschirnhaus comme la Spirale d'Archimede, la Conchoïde de Nicomede, la Cissoïde de Dioclès, les Développés de M. Huguens, & un Geometre ne doit pas être moins glorieux d'avoir donné son nom à une Courbe, ou à une espece entiere de Courbes, qu'un Prince

d'avoir donné le sien à une Ville. M. de Tschirnhaus, quoiqu'il n'eût encore que 31 ans, fut mis par le Roi au nombre de ces mêmes Academiciens qu'il étoit venu consulter, & prendre en quelque sorte pour ses Juges.

Tout le monde fait que les Caustiques sont les Courbes formées par le concours des Rayons de lumière qu'une autre Courbe quelconque a réfléchis ou rompus. Elles ont une propriété remarquable, c'est qu'elles sont égales à des lignes droites connues, quand les Courbes qui les produisent sont geometriques. Ainsi M. de Tschirnhaus trouvoit que la Caustique formée dans un Quart de cercle par des rayons réfléchis qui étoient venus d'abord paralleles à un diametre, étoit égale aux $\frac{1}{4}$ du diametre. Les rectifications des Courbes qui ne sont pas encore aujourd'hui fort communes, l'étoient alors beaucoup moins, & de plus, c'est un grand merite à cette découverte d'avoir précédé l'invention du Calcul de l'Infini, qui l'auroit rendu plus facile. L'Academie la jugea digne d'être examinée en particulier par des Commissaires, qui furent M^{rs} Cassini, Mariotte, & de la Hire. Ce dernier contesta à M. de Tschirnhaus une generation ou description qu'il donnoit de la Caustique par reflexion du Quart de Cercle. M. de Tschirnhaus qui ne montrait pas le fond de sa methode, ne se rendit pas à M. de la Hire, qui de son côté persista à tenir la generation dont il s'agissoit pour fort suspecte. L'Auteur s'en tenoit si sûr qu'il l'envoya au Journal de Leipsic, mais sans démonstration.

Il retourna en Hollande, où il acheva, & laissa entre les mains de ses Amis un Traité intitulé *De Medicina Mentis & Corporis*. Il avoit commencé à composer dès l'âge de 18 ans, & même avec l'intention d'imprimer, presque inseparable du travail de la composition, dont elle est la premiere récompense. Il avoit fait en differents temps des Ouvrages, dont ses amis & lui avoient été fort contents, mais par bonheur l'impression n'en ayant pû être assez prompte, ils lui avoient tellement

déplû , quand il étoit venu à les revoir , qu'il avoit pris une ferme résolution de ne rien imprimer qu'il n'eût 30 ans , & de sacrifier tous les enfans de sa jeunesse , sacrifice d'autant plus rare qu'ils sont nés dans un temps où l'on aime avec plus d'ardeur & moins de connoissance. L'âge qu'il s'étoit prescrit étoit passé , quand son premier Ouvrage , qui a été aussi le seul , parut à Amsterdam en 1687 , dédié au Roi , à qui il marquoit par-là sa reconnoissance d'être entré dans l'Academie. Le titre du livre est , pour ainsi dire , double de celui de *la Recherche de la Verité* , car celui-ci ne veut que rectifier ou guerir l'Esprit , & l'autre entreprend aussi le Corps. Avec une bonne Logique , & une bonne Medecine , les Hommes n'auroient plus besoin de rien.

Pour donner un exemple de la maniere de conduire son esprit dans les Sciences en allant toujours du plus simple au plus composé , & en combinant ensemble les verités à mesure qu'elles naissent , M. de Tschirnhaus propose une génération universelle de Courbes par des Centres ou Foyers , dont le nombre croît toujours , & fait croître en même temps le degré dont est la Courbe. Il prétend tirer delà une methode générale pour les Tangentes , qu'il vante fort , & quantité d'autres Theorèmes ou Problèmes importants , & à cette occasion il insinué qu'il ne croit pas s'être trompé sur la Caustique du Quart de Cercle. M. de la Hire a démontré depuis en 1694 dans son Traité des Epicycloïdes , que cette Caustique en étoit une , qu'à la verité elle étoit de la longueur déterminée par M. de Tschirnhaus , mais qu'elle ne pouvoit pas être décrite de la maniere qu'il avoit proposé. Il n'est pas étonnant que l'on fasse quelque faux pas dans des routes nouvelles , & que l'on s'ouvre soi-même. L'esprit original qui est ardent , vif & hardi , peut n'être pas toujours assez mesuré , ni assez circonspect. On sent dans le Livre de M. de Tschirnhaus cette chaleur , & cette audace , qui appartiennent au genie de l'invention. Si l'Auteur n'avoit beaucoup fait , on croiroit vo-

lonniers qu'il promet trop, & qu'il élève trop haut nos espérances.

Les préceptes de Theorie qu'il donne ne sont pas si singuliers, que de certains préceptes de Pratique, qu'il y ajoute, ou plutôt certains usages dont il s'étoit bien trouvé. Nous les rapporterons ici, parce que rien ne feroit mieux représenter le détail de sa vie particulière, par rapport à l'étude. Il faisoit ses Experiences en Eté, & les mettoit en ordre, ou en tiroit ses conséquences, ou enfin faisoit ses grandes recherches de Theorie pendant l'Hiver, qu'il trouvoit plus propre à la méditation. Sur la fin de l'Autonne, il donnoit quelques soins particuliers à sa santé, & faisoit une espece de revûe de ses forces corporelles, pour entrer dans cette saison destinée aux plus grands travaux de l'esprit. Il relisoit les compositions de l'hiver précédent, s'en rappelloit les idées, se faisoit renaître l'envie de les continuer, & alors il commençoit à se retrancher le repas du soir, & à diminuer même un peu le dîner de jour en jour. Au lieu de souper, ou il lisoit sur les matieres qu'il avoit dessein de traiter, ou il s'en entretenoit avec quelque ami savant. Il se couchoit à 9 heures, & se faisoit éveiller à 2 heures après minuit. Il se tenoit exactement pendant quelque temps dans la même situation où le reveil l'avoit trouvé, ce qui l'empêchoit d'oublier le songe qu'il faisoit en ce moment, & si, comme il pouvoit assés naturellement arriver, ce songe rouloit sur la matiere dont il étoit rempli, il en avoit plus de facilité à la continuer. Il travailloit dans le silence & le repos de la nuit. Il se rendormoit à 6 heures, mais seulement jusqu'à 7, & reprenoit son travail. Il dit qu'il n'a jamais fait de plus grands progrès dans les Sciences, qu'il n'a jamais senti son allûre plus vigoureuse, & plus rapide, que quand il a observé toutes ces pratiques avec le plus de regularité. On y pourra trouver un soin excessif de se ménager tous les avantages possibles, mais toutes les grandes passions vont à l'égard de leur objet jusqu'à une espece de superstition.

Il lui arrivoit souvent pendant la nuit de voir une grande quantité d'étincelles tres-brillantes , qui voltigeoient & jouïoient en l'air. Quand il vouloit les regarder fixement , elles disparoissoient , mais quand il les negligeoit , non-seulement elles duroient presque autant que son application au travail , mais elles redoubloient d'éclat & de vivacité. Ensuite il parvint à les voir en plein jour , lorsqu'il eut acquis un certain degré de facilité dans la meditation. Il les voyoit sur une muraille blanche , ou sur un papier qu'il avoit placé à côté de lui. Ces étincelles , visibles pour lui seul , étoient en même temps & un effet , & une representation des esprits de son cerveau , violemment agités.

Cette passion ardente pour l'étude doit assés naturellement donner l'idée d'un homme extrêmement avide de gloire , car enfin il n'y a point de grands travaux sans de grands motifs , & les Savants sont des ambitieux de Cabinet. Cependant M. de Tschirnhaus ne l'étoit point , il n'aspiroit point par toutes ses veilles à cette immortalité qui nous touche tant , & nous appartient si peu , & il a dit à ses amis que dès l'âge de 24 ans il croyoit s'être affranchi de l'amour des plaisirs , des richesses , & même de la gloire. Il y a des hommes qui ont droit de rendre témoignage d'eux-mêmes. Il aimoit donc les Sciences de cet amour pur & desintéressé qui fait tant d'honneur , & à l'objet qui l'inspire , & au cœur qui le ressent ; la maniere dont il s'exprime en quelques endroits sur les ravissements que cause la jouissance de la Verité , est si vive & si animée qu'il auroit été inexcusable de se proposer une autre récompense,

Le Traité *De Medicina Mentis & Corporis* contient aussi ses principes sur la santé. Il n'étoit pas si sequestre du monde par son goût pour les Sciences , qu'il ne fût quelquefois obligé de vivre avec les autres , & à leur maniere , & par consequent de manger & de boire trop. Il propose plutôt des précautions pour prévenir les maux de ce genre de vie , que des remedes pour les guerir , si

ce n'est que la sueur , dont il fait grand cas , & à laquelle il a toujours recours , est en même temps une précaution & un remede. Du reste il traite de Poison tout ce qui ne peut pas être aliment. Il veut que l'on écoute & que l'on suive ce goût simple , & exempt de toute réflexion , qui nous porte à certaines viandes , ou un dégoût pareil qui nous en éloigne ; ce sont des avis secrets de la Nature , si cependant la Nature a un soin de nous si exact , & auquel on puisse tant se fier. Il dit qu'étant dans l'obligation de manger beaucoup , il mangeoit du moins alternativement des choses fort opposées , chaudes & froides , salées & douces , acides & ameres , & que ce mélange qui paroïssoit bizarre aux autres Convives , & qu'ils prenoient même pour un effet d'intemperance , servoit à corriger les excès des qualités les uns par les autres. On doit dire à son honneur que ces sortes de singularités où le jettoit le soin de sa santé , n'étoient pas si grandes que celles où l'amour de l'étude l'avoit conduit.

Après la publication de son Ouvrage , étant chez lui en Saxe , il commença à songer à l'exécution d'un grand dessein qu'il meditoit depuis long-temps. Il croyoit qu'à moins que l'on ne rendît l'Optique plus parfaite , nos progrès dans la Phisique étoient arrêtés à peu près au point où nous sommes , & que pour mieux connoître la Nature , il la faloit mieux voir. D'ailleurs , lui qui étoit l'inventeur des Caustiques , il prévoyoit bien que de plus grands & de meilleurs verres convexes exposés au Soleil seroient de nouveaux fourneaux , qui donneroient une Chimie nouvelle. Mais dans toute la Saxe , il n'y avoit point de Verrerie propre à l'exécution de ces grandes idées. Il obtint de l'Eleûteur son Maistre , Roi de Pologne , la permission d'y en établir , & comme on s'aperçût bien-tôt de l'utilité que le Pais en recevoit , il y en établit jusqu'à trois. Delà sortirent des nouveautés & de Dioptrique & de Phisique presque miraculeuses. Nous les annonçâmes sur la parole de M. Tschirnhaus dans les

Hist.

Hist. de 1699 * & de 1700 *. Quelques-unes étoient de nature à pouvoir trouver des incredules , car en perfectionnant la Dioptrique elles la renversoient , mais enfin le Miroir ardent que S. A. R. M^{gr} le Duc d'Orleans a acheté de M. de Tschirnhaus , est du moins un témoin irréprochable d'une grande partie de ce qu'il avoit avancé.

* p. 90. & suiv.
* p. 128, & suiv.

Ce Miroir est convexe des deux côtés , & est portion de deux sphères dont chacune a 12 pieds de rayon. Il a 3 pieds Rhinlandiques de diametre , & pèse 160 liv. ce qui est une grandeur énorme par rapport aux plus grands verres convexes qui ayent jamais été faits. Les bords en sont aussi parfaitement travaillés que le milieu , & ce qui le marque bien , c'est que son foyer est exactement rond. Ce Verre est une Enigme pour les habiles gens. A-t-il été travaillé dans des Bassins comme les Verres ordinaires de Lunettes ? a-t-il été jetté en moule ? On peut se partager sur cette question , les deux manieres ont de grandes difficultés , & rien ne fait mieux l'éloge de la mécanique dont M. de Tschirnhaus doit s'être servi. Il a dit , mais peut-être n'a-t-il pas voulu reveler son secret , qu'il l'avoit taillé dans des Bassins , & que la masse de verre , dont il l'avoit tiré , pesoit 700 liv. ce qui seroit encore une merveille dans la Verrerie. Il en avoit fait un autre de 4 pieds de diametre , mais il fut endommagé par quelque accident.

Il presenta un Miroir de cette espèce à l'Empereur Leopold , qui pour reconnoître son present , & encore plus son mérite , lui voulut donner le titre & les prérogatives de libre Baron , mais il les refusa avec tout le respect qu'il doit accompagner un semblable refus , & des graces de l'Empereur il n'accepta que le portrait de S. M. I. avec une chaîne d'or. Pour rendre ce trait moins fabuleux , il est bon d'y en joindre un pareil qui le soutiendra. Il refusa de même les fonctions de Conseiller d'Etat , dont le Roi Auguste le vouloit honorer. On peut soupçonner que qui ne recherche pas les honneurs , veut

s'épargner ou beaucoup de peine, ou la honte de ne pas réussir, mais à qui les renvoye quand ils viennent s'offrir d'eux-mêmes, la malignité la plus ingénieuse n'a rien à lui dire.

Il revint à Paris pour la quatrième fois en 1701, & fut assés assidu à l'Academie. Il y annonça plusieurs methodes qu'il avoit trouvées pour la Geometrie la plus sublime, mais il n'en donna pas les démonstrations, & il se contenta d'exciter une certaine curiosité inquiète, & peut-être des doutes, honorables à ses découvertes, en cas qu'elles fussent bien sûres. Nous avons donné dans
 * p. 89. & 90. l'Hist de 1701 * une liste de ses Propositions. Il prétendoit pouvoir se passer de la methode des Infiniment petits, & donna à l'Academie sur les Rayons des Développées un échantillon de celle qu'il mertoit en la place. Rien ne prouve mieux la grande utilité des Infiniment petits, que l'honneur qu'on se fait de n'en avoir pas besoin en certaines occasions. En général, M. de Tschirnhaus vouloit rendre la Geometrie plus aisée, persuadé que les veritables methodes sont faciles, que les plus ingénieuses ne sont point les vraies dès qu'elles sont trop composées, & que la nature doit fournir quelque chose de plus simple. Tout cela est vrai, reste à déterminer le degré de simplicité, on croit presentement y être parvenu.

Pendant ce séjour de Paris, M. de Tschirnhaus fit part à M. Homberg d'un secret qu'il avoit trouvé aussi surprenant que celui de tailler ses grands Verres, c'est de faire de la Porcelaine toute pareille à celle de la Chine, & qui par consequent épargneroit beaucoup d'argent à l'Europe. On a cru jusqu'ici que la Porcelaine étoit un don particulier dont la nature avoit favorisé les Chinois, & que la terre dont elle est faite n'étoit qu'en leur País. Cela n'est point ainsi, c'est un mélange de quelques terres qui se trouvent communément par-tout ailleurs, mais qu'il faut s'amuser de mettre ensemble. Un premier Inventeur trouve ordinairement un secret par hasard,

& sans le chercher , mais un second qui cherche ce que le premier a trouvé , ne le peut guere trouver que par raisonnement. M. de Tschirnhaus avoit donné à M. Homberg sa Porcelaine en échange de quelques autres secrets de Chimie , qu'il en avoit reçus , & il lui fit promettre que de son vivant il n'en feroit nul usage.

Quand il fut retourné chés lui , il se trouva perpetuellement environné de chagrins domestiques , & sa vie ne fut plus qu'une suite de malheurs. Comme la fanté de l'Ame tient à celle de l'Esprit , sur laquelle il avoit tant medité , & qu'il y a moins de maux pour qui fait raisonner , ou des maux moins douloureux , il soû tint les siens avec constance , & fit voir ce qu'on ne voit presque jamais en cette matiere , l'usage de sa Theorie , & l'application de ses préceptes. Son humeur ne fut pas alterée , ni ses études seulement interrompuës. Il se soumettoit à une Providence , à laquelle il est inutile de résister , & infiniment avantageux de se soûmettre. Enfin après avoir passé 5 ans à combattre & à vaincre le chagrin , il tomba malade , peut-être parce qu'on ne peut le vaincre si long-temps , sans en être fort affoibli. Il ne craignoit point la Fièvre , la Phtisie , l'Hydropisie , la Goutte , parce qu'il se tenoit sûr d'en avoir les remedes , mais il avoit beaucoup de peur de la Pierre , qu'il ne s'assuroit pas de pouvoir prévenir , ou guérir si aisément. Il avoit pourtant trouvé une préparation de petit Lait qu'il croyoit tres-bonne , & qu'il a donné dans une Edition Allemande de son Livre. Mais elle n'empêcha pas qu'au mois de Sept. 1708. il ne fut attaqué de grandes douleurs de gravelle , suivies d'une suppression d'urine. Les Medecins qui ne le trouvoient pas assés obéissant , parce qu'il s'étoit rendu Medecin lui-même , l'abandonnerent bien-tôt. Il se traita comme il l'entendit , il ne perdit jamais , ni sa fermeté , ni sa résignation à la Providence , ni l'usage de sa raison , & enfin il mourut le 11 Oct. suivant. Ses dernieres paroles furent *Triomphe, Victoire*. Apparemment il se regardoit comme vainqueur des maux de la vie hu-

maine. Son corps fut porté avec pompe à une de ses Terres, & le Roi Auguste en voulut faire les frais.

Il avoit destiné cet hiver même où il alloit entrer, à faire de grandes augmentations à son Livre. Il avoit donné une partie considérable de son patrimoine à son plaisir, c'est-à-dire, aux Lettres. Il propose dans son Ouvrage le plan d'une Société de gens de condition & amateurs des Sciences, qui fourniroient à des Savans plus appliqués tout ce qui leur seroit nécessaire & pour leurs Sciences & pour eux, & l'on sent bien avec quel plaisir il auroit porté les charges de cette Communauté. Il les portoit déjà sans l'avoir formée. Il cherchoit des gens qui eussent des talents, soit pour les Sciences utiles, soit pour les Arts, il les tiroit des tenebres où ils habitent ordinairement, & étoit en même temps leur Compagnon, leur Directeur, & leur Bienfaiteur. Il s'est assés souvent chargé du soin & de la dépense de faire imprimer des Livres d'autrui, dont il espiroit de l'utilité pour le Public, entre autres le Cours de Chimie de M. Lémery qu'il avoit fait traduire en Allemand, & cela, sans se faire rendre, ou sans se rendre à lui-même dans des Prefaces l'honneur qui lui étoit dû, & qu'un autre n'auroit pas négligé. Dans des occasions plus importantes, si cependant elles ne le sont pas toutes également pour la vanité, il n'étoit pas moins éloigné de l'ostentation. Il faisoit du bien à ses ennemis avec chaleur, & sans qu'ils le fussent, ce qu'à peine le Christianisme ose exiger. Il n'étoit point philosophe par des connoissances rares, & homme vulgaire par ses passions & par ses foiblesses, la vraie philosophie avoit pénétré jusqu'à son cœur, & y avoit établi cette délicieuse tranquillité, qui est le plus grand, & le moins recherché de tous les biens.

Sa place d'Académicien Associé Etranger a été remplie par M. Sloane, Secrétaire de la Société Royale d'Angleterre,

E L O G E

D E M. P O U P A R T.

FRANÇOIS POUPART nâquit au Mans en d'un bon Bourgeois , allié aux meilleures familles de la Ville , qui n'avoit aucun emploi , & étoit chargé de beaucoup d'Enfants. Il ne s'occupoit que de leur éducation , il en mit un dans la Marine , qui s'y avança par son merite , jusqu'à devenir Capitaine de Vaisseau.

M. Poupart fit ses études chés les Peres de l'Oratoire du Mans, La Philosophie scolastique ne fit que lui apprendre qu'on pouvoit philosopher , & lui en inspirer l'envie. Il tomba bien-tôt sur les Ouvrages de Descartes qui lui donnerent une grande idée de la nature , & une aussi grande passion de l'étudier. Il passa quelques années chés son Pere dans cette seule occupation , encore incertain du parti qu'il prendroit ; enfin il se determina pour la Medecine. Mais comme les secours tant spirituels , pour ainsi dire , que temporels lui manquoient au Mans , il vint à Paris où il est plus facile d'en trouver de toute espece. Il se chargea de l'éducation d'un Enfant pour subsister , mais ayant bien-tôt éprouvé que les soins de cet emploi lui enlevoient tout son temps , il y renonça , & aima mieux étudier que subsister , c'est à dire que pour être entièrement à lui & à ses Livres , il se reduisit à un genre de vie fort incommode , & fort étroit. Nous ne rougissons point d'avouer hautement la mauvaise fortune d'un de nos Confreres , ni de montrer au public le sac & le bâton d'un Diogene , quoique nous soyons dans un siècle où les Diogenes sont moins considerés que jamais , & où certainement ils ne recevroient pas de visites des Rois dans leur tonneau.

Il s'appliqua avec ardeur à la Phisique , & sur-tout à

l'Histoire naturelle , qui après tout est peut-être la seule Phisique à nôtre portée. Un goût particulier le portoit à étudier les Insectes , especes d'Animaux , si different de tous les autres , & si different entr'eux , qu'ils font comprendre en général la diversité infinie des Modeles sur lesquels la Nature peut avoir fait des Animaux pour une infinité d'autres habitations. Il avoit & la patience souvent tres penible de les observer pendant tout le temps necessaire , & l'art de découvrir leur vie cachée , & l'adresse de faire , quand il étoit possible , la délicate anatomie de ces petits Corps. Il portoit ses découvertes aux Conferences de feu M. l'Abbé Bourdelot , dont il étoit un des bons Acteurs , ou les faisoit imprimer dans le Journal des Savans , témoin sa Dissertation sur la Sangsue , qui fut fort approuvée des Phisiciens , & leur fit connoître à eux-mêmes un Animal , que tout le monde croyoit connoître.

Pour se perfectionner dans l'Anatomie , il voulut exercer la Chirurgie dans l'Hôtel Dieu , & se presenta à ceux dont il faloit qu'il subît l'examen. Ils l'interrogerent sur des choses difficiles , & par les réponses qu'il leur fit ils le trouverent déjà fort habile dans l'art de la Chirurgie , & le reçurent avec éloge. Mais il les étonna beaucoup , quand il leur avoua qu'il ne savoit seulement pas saigner & qu'il n'avoit sur la Chirurgie qu'une simple speculation. Ils ne se repentirent pas de l'avoir reçu , ils le jugerent bien propre à apprendre promptement & parfaitement cette pratique , qu'ils ne s'étoient pas apperçûs qui lui manquât , & ils l'instruisirent avec l'affection que les Maîtres ont pour d'excellens Disciples. Il passa trois ans dans ces fonctions , après quoi il ne s'attacha plus qu'à la Medecine , & comme il ne cherchoit pas à en borner l'étendue , il embrassa tout ce qui y avoit rapport , la Botanique , la Chimie. Il se fit recevoir Docteur en Medecine dans l'Université de Rheims.

Son envie de savoir n'étoit pas renfermée dans les limites de cette profession , quoique si vastes. Il ne feroit

pas extraordinaire que la Philosophie de Descartes l'eût engagé à prendre quelque teinture assés raisonnable de Geometrie, mais peut-être aura-t-on de la peine à croire qu'il étudiait jusqu'à l'Architecture. M. de la Hire qui la professe avoit remarqué qu'il étoit assidu à ses leçons, & ne le connoissant point d'ailleurs, il avoit crû que c'étoit un homme qui songeoit à avoir quelque fonction dans les Bâtimens, il n'avoit pas même jugé sur les apparences exterieures que ces fonctions auxquelles il pouvoit aspirer fussent fort relevées, mais il fut extrêmement surpris, lorsqu'au renouvellement de l'Academie en 1699, tous les Academiciens qui n'avoient point d'Eleves en ayant nommé, il le vit paroître aux Assemblées en qualité d'Eleve de M. Mery, & d'Anatomiste.

La Compagnie étant alors remplie d'un tres-grand nombre d'Academiciens nouveaux, qui n'avoient pas des ouvrages prêts à produire dans les Assemblées, ou ne s'en tenoient pas assés sûrs pour les exposer dans un lieu assés redoutable, M. Poupert fut le premier d'eux tous qui se trouva en état de parler, & qui en eut la noble assurance. Il lut un Memoire sur les Insectes Hermaphrodites*, qui fut d'un heureux augure pour la ca-
 pacité de ceux d'entre les nouveaux venus, que la plu-
 part des Academiciens ne connoissoient pas encore beau-
 coup.

On a vû depuis dans les Volumes que l'Academie a donnés pour chaque année son Histoire du *Formica-leo**,
 celle du *Formica-pulex** ses observations sur les Mou-
 les*, & quantité d'autres observations moins impor-
 tantes, ou peut-être seulement plus courtes, repandus
 dans nos Histoires.

Il tomba malade au mois d'Octobre dernier & mourut en peu de jours. On le croit Auteur d'un Livre intitulé *La Chirurgie complete*, qui n'est qu'une compilation commode de plusieurs autres Traités. Si cela est, on doit pardonner ce Livre au besoin qu'il avoit de le

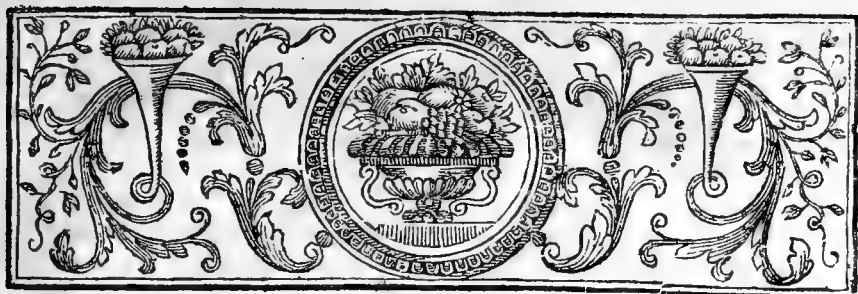
* V. les M.
 de 1669. p.
 145.

* V. les M.
 de 1701. p.
 235.
 * V. les M.
 de 1705. p.
 124.
 * V. les M.
 de 1706. p.
 11.

faire , & lui savoir gré en même temps de ne s'être pas fait honneur d'une compilation. Il a résisté à un grand nombre d'exemples , qui l'y pouvoient inviter.

Sa place d'Eleve de M. Méry a été remplie par M. Engueard , Docteur en Medecine de la Faculté de Paris.





MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE.

TIREZ DES REGISTRES

de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCIX.

OBSERVATIONS

De la quantité de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année dernière 1708, avec les changemens qui sont arrivés au Thermometre & au Barometre par rapport à la chaleur & aux saisons.

PAR M. DE LA HIRE.



IL n'y avoit que la simple curiosité de
 sçavoir la quantité d'eau de pluie qui tom-
 be chaque année sur la terre en ce païs-
 cy, il me semble qu'il seroit inutile que je
 continuasse à donner ce Memoire au com-
 mencement de chaque année, comme j'ai

1709
 9 Janvier.

fait depuis long-tems, puisque l'experience nous a fait

1709

A

connoître qu'il n'y a que peu de différence d'une année à l'autre. Mais plusieurs particuliers ayant été excités par les Memoires que j'ai publiés, de faire de semblables observations en des lieux fort éloignés de ceux-cy, & situés différemment par rapport à la proximité de la mer ou dans des montagnes; j'ai crû qu'ils seroient bien aises de trouver dans nos Memoires, de quoi comparer leurs observations avec les nôtres.

La Machine dont je me fers pour la mesure de la pluie, & la maniere de s'en servir, est toujours la même, & comme je l'ai décrite autrefois dans les premiers Memoires.

Voici les observations de la quantité de pluie en hauteur qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année dernière 1708.

En Janvier.	$28\frac{1}{8}$.	May.	$30\frac{1}{8}$.	Septembre.	12 ¹ .
Fevrier.	15.	Juin	$23\frac{1}{2}$.	Octobre.	15.
Mars.	$15\frac{7}{8}$.	Juillet.	32.	Novembre.	$6\frac{4}{8}$.
Avril.	$17\frac{2}{3}$.	Aoust.	$15\frac{1}{3}$.	Decembre.	$9\frac{2}{8}$.
Somme 219 lignes $\frac{1}{2}$ ou 18 pouces $\frac{1}{4}$.					

Cette quantité d'eau n'est pas beaucoup éloignée des 19 pouces à quoi nous avons fixé les années moïennes, & comme M. Mariotte l'avoit déterminé autrefois par de semblables observations qu'il avoit fait faire à Dijon par un de ses amis.

La plus grande quantité d'eau qui soit tombée en un même jour, n'a été que de 10 lignes environ le 24 May & le 20 Octobre, & avec un vent presque Nord, ce qui est à remarquer; car ce vent ne nous apporte pas ordinairement les plus grandes pluës.

Le vent dominant de toute cette année a été le Sud, & il s'est tourné rarement vers le Nord, & souvent à l'Est & à l'Oüest. Il a fait de gros brouillards tant au commencement qu'à la fin de cette année.

Il est tombé 3 pouces de nege le 14 Fevrier, & environ autant le 14 Novembre, & un peu le 5 Decembre.

Pendant toute l'année il a fait plusieurs orages, mais assez foibles.

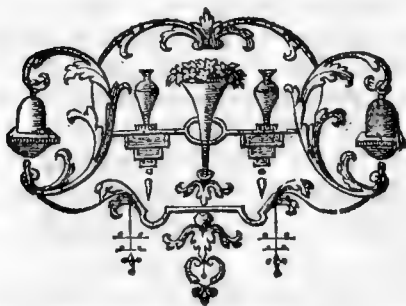
Mon Thermometre qui est à 48 parties de sa division dans l'état moïen de l'air, & au fond des Carrieres de l'Observatoire où il demeure toujours au même état, & lequel est exposé dans un lieu ouvert, mais à l'abri du vent & du Soleil, a été au plus bas au commencement de l'année le 13 Fevrier à 27 parties $\frac{1}{2}$, & il commence seulement à geler dans la campagne quand il est à 32 parties, ce qui marque qu'il n'a pas fait grand froid dans ce tems-là; car avant ce jour-là & ensuite il étoit toujours vers les 35 à 40 parties. A la fin de l'année dès le 29 Octobre il a gelé, le Thermometre étant à 29 parties, mais sans continuer, & tout le mois de Novembre a été assez doux par rapport à la saison. Le Thermometre est aussi descendu à 25 parties le 12 Decembre, & c'est le jour de la plus forte gelée de cette année, laquelle n'a pas été fort considerable, puisque ce Thermometre descend quelquefois jusqu'à 13 parties.

Les plus grandes chaleurs de cette année ont été le 15 & 16 Aoust comme à l'ordinaire, l'esprit de vin du Thermometre s'étant élevé dans son tuyau à 66 parties $\frac{1}{2}$ vers le lever du Soleil, qui est le tems où je fais toutes mes observations, & qui est le plus froid de la journée; & vers les 3 heures après midy, qui est le tems le plus chaud du jour, l'esprit de vin du Thermometre étoit élevé ces mêmes jours à 76 parties. Ainsi la chaleur & le froid de cette année ont été à peu près au même degré par rapport à l'état moïen.

Pour mon Barometre qui est placé à la hauteur de la grande Salle de l'Observatoire, & à 20 toises environ au-dessus de la riviere, il a été au plus bas à 26 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$ le 10 Janvier, & avec un vent Sud-Est mediocre comme les jours précédens & suivans, & il a été au plus haut le 17 Novembre à 28 pouces 1 ligne & $\frac{1}{2}$ avec un vent Nord Nord-Est foible, & les jours aux environs vers le Sud. Ensorte que la difference du plus bas au plus haut

a été de 1 pouce 4 lignes $\frac{1}{2}$ à très-peu près. J'ai encore un autre Barometre dans lequel le mercure se soutient à 3 lignes plus haut que dans celui qui me sert pour marquer tous les jours mes observations ordinaires, quoique ces deux Barometres fassent de la lumiere dans le vuide en agitant le mercure, ce qui est une marque qu'il n'y a point d'air ou très-peu à ce qu'on croit ordinairement. Ainsi cette difference de hauteur ne pourroit venir que de la difference pesanteur des mercures.

J'ai observé la declinaison de l'aiguille aimantée le 27 Decembre de cette année, & je l'ai trouvée de 10 degrés 15 minutes à l'Oüest : Cette aiguille a 8 pouces de longueur, & c'est celle dont je me sers toujours, en appliquant le côté de sa boîte contre le même endroit d'un gros pilier de pierre, qui est bien dressé & placé exactement dans le meridien au bout de la terrasse basse de l'Observatoire vers le midy.



OBSERVATIONS

De la quantité d'eau de pluie & des vents, par M. le Comte du Pontbriand dans son Château à deux lieues à l'Ouest de S. Malo ; communiquées à l'Academie par M. du Torar de l'Academie, & comparées avec celles que nous avons faites à Paris à l'Observatoire Royal pendant les années 1707 & 1708.

PAR M. DE LA HIRE.

QUANTITE D'EAU DE PLUIE.

EN 1707.			EN 1708.		
Au Pontbriand.		A Paris.	Au Pontbriand.		A Paris
J anvier.	$9\frac{1}{2}$.	5 ^l .	35 ^l .	28.	1709. 9. Fevrier:
Fevrier.	$20\frac{1}{2}$.	10.	$18\frac{1}{2}$.	15.	
Mars.	22.	11.	$22\frac{1}{2}$.	16.	
Avril.	$7\frac{1}{2}$.	4.	$36\frac{1}{2}$.	$17\frac{1}{4}$.	
May.	$6\frac{1}{2}$.	$11\frac{1}{2}$.	$26\frac{1}{2}$.	$30\frac{1}{4}$.	
Juin.	$31\frac{3}{4}$.	17.	24.	$23\frac{1}{8}$.	
Juillet.	40.	38.	10.	32.	
Aougt.	38.	$34\frac{3}{4}$.	$6\frac{1}{2}$.	15.	
Septembre.	$20\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{4}$.	$43\frac{1}{2}$.	12.	
Octobre.	32.	41.	$35\frac{1}{2}$.	15.	
Novembre.	$10\frac{1}{2}$.	6.	11.	$6\frac{1}{2}$.	
Decembre.	$57\frac{1}{2}$.	$27\frac{3}{4}$.	$24\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{4}$.	
Somme au Pontbriand,			Somme au Pontbriand,		
$24^{po} 10\frac{1}{4}$.			$24^{po} 6\frac{1}{4}$.		
Somme à Paris, $17^{po} 11\frac{1}{2}$.			Somme à Paris, $18^{po} \frac{1}{4}$.		

Quelques observations semblables que M. le Comte du Pontbriand nous avoit déjà communiquées, nous avoient fait connoître qu'il pleuvoit un peu plus vers

6 MEMOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
S. Malo qu'à Paris , ce qui nous est confirmé par les deux
années que nous venons de comparer.

Sur les vents pendant l'année 1707.

En Janvier les vents ont été presque toujours plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand d'un quart du compas.

En Fevrier à peu près de même.

En Mars tout au contraire des mois précédens.

En Avril comme en Janvier à peu près.

En May les vents ont été differens en ces deux lieux.

En Juin assés semblables , mais quelquefois plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand d'un quart du compas.

En Juillet vent de même à peu près , avec de très-grandes chaleurs le 21 à Paris comme au Pontbriand , le vent étant Sud-Est , Sud & Sud-Oüest.

En Aoust assés souvent plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand.

En Septembre les vents un peu differens en ces deux lieux.

En Octobre quelquefois de même , & quelquefois opposés.

En Novembre souvent de même , mais à Paris quelquefois plus au Sud qu'au Pontbriand.

En Decembre souvent le même , quelquefois opposés , mais souvent à Paris plus au Sud qu'au Pontbriand.

Au Pontbriand la plus grande pluie d'un même jour a été de 10^l le 3 Juillet avec vent Nord-Est : ce jour-là le vent étoit à Paris Sud-Oüest avec tonnerre , mais sans pluie. Dans tout le reste de l'année les plus grandes pluies d'un même jour n'ont monté qu'à 6^l au Pontbriand. Mais à Paris la pluie a été de 16^l le 15 Juillet avec un vent fort vers le Sud : mais au Pontbriand il n'en est tombé que 5^l $\frac{1}{2}$ avec le même vent ce jour-là. A Paris la plus grande pluie a été de 21^l $\frac{1}{2}$ le 12 Aoust avec un vent foible vers l'Oüest , & au Pontbriand 5^l avec un vent Nord. En Octobre à Paris le 4 & 5 ensemble ont donné

24^h avec un vent vers l'Oüest, & au Pontbriand 6^h $\frac{1}{2}$ avec un vent Nord-Oüest.

Sur les Vents en 1708.

En Janvier le vent plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand, & quelquefois de même.

En Fevrier souvent le même.

En Mars presque toujours le même.

En Avril le même, mais dans certains jours un peu differens.

En May au Pontbriand la nuit du 6 au 7 forte gelée qui brûla tous les arbres, mais à Paris assez beau tems: les vents differens.

En Juin les vents differens, & à Paris plus au Sud ordinairement.

En Juillet très-peu d'observations au Pontbriand, ce qui ne donne rien à connoître pour la difference.

En Aoust plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand.

En Septembre comme en Aoust.

En Octobre vents differens en ces deux lieux.

En Novembre un peu differens.

En Decembre de même.

On ne peut pas faire une comparaison bien juste de tous ces vents, car M. de Pontbriand ne marque le rumb que les jours qu'il a plu.

Au Pontbriand la plus grande pluie d'un même jour n'a été que de 9^h, le 20 & le 27 Octobre, le vent étant Sud-Est & Sud-Oüest; & de 8^h le 22 Avril avec un vent Sud-Est. Le 20 Octobre à Paris il a plu 10^h avec un vent fort de Nord. Pour le 27 à Paris, point de pluie, vent de Nord. Le 22 Avril à Paris, point de pluie, brouillard.

A Paris la plus grande pluie d'un même jour a été de 11^h $\frac{1}{2}$ le 24 May avec un vent Nord Nord-Oüest, & à Pontbriand 4^h $\frac{1}{2}$ avec un vent Nord-Oüest. à Paris 9^h le 2 Juillet, vent Sud-Oüest; à Pontbriand point de pluie. à Paris encore 10^h le 20 Octobre, comme on a marqué cy-dessus.

OBSERVATIONS

*De l'Eau qui est tombée à Lyon pendant l'année
derniere 1708.*

PAR M. DE LA HIRE.

1709.
13. Avril. **L**E Pere Fulchiron a observé exactement la quantité d'eau de pluie & de neige fonduë, qui est tombée à Lyon à l'endroit de l'Observatoire des RR. PP. Jesuites, & de la même maniere que je l'observe ici, dont voici le résultat de chaque mois qu'il m'a communiqué.

En Janvier	2 ^{po} .	0 ^l	Juillet	1 ^{po}	6 ^l $\frac{3}{4}$.
Fevrier	3	7 ^l $\frac{1}{8}$.	Aoust	3	6
Mars	2	3 ^l $\frac{1}{2}$.	Septembre	7	7 ^l $\frac{1}{4}$.
Avril	3	9 ^l $\frac{1}{2}$.	Octobre	1	11
May	2	2 ^l $\frac{1}{8}$.	Novembre	0	10
Juin	4	10 ^l $\frac{3}{4}$.	Decembre	2	1 ^l $\frac{3}{4}$.
Somme de toute l'année			36 poudres, 9 lignes.		

On voit par-là que la quantité d'eau de pluie a été à Lyon du double de celle qu'elle a été à Paris; & il n'y a pas apparence, que cela vienne des deux grandes rivières qui y passent, lesquelles ne pourroient tout au plus qu'y former beaucoup de brouillards; mais plutôt des grandes montagnes qui n'en font que peu éloignées, où il tombe toujours beaucoup plus d'eau & de neige que dans les plaines.



SUR UN FOETUS

HUMAIN

MONSTRUEUX.

PAR M. LITTRE.

Monsieur Amand, habile Accoucheur, m'a donné un Foetus mâle, bien nourri, de moyenne taille & à terme, qu'il avoit tiré mort du ventre de la mere. Ce foetus y avoit péri par le détachement du placenta, arrivé au commencement du travail de l'accouchement, l'orifice interne de la matrice n'étant pas encore suffisamment dilaté. J'ai examiné son corps avec beaucoup de soin. Voici les observations que j'y ai faites.

1709.
12 Janvier.

Premiere Observation. Ce foetus, quoique de moyenne taille, avoit le placenta d'une grandeur extraordinaire.

Seconde Observation. Une partie du placenta du côté du chorion étoit déchiré, & on y voïoit plusieurs de ses gros vaisseaux à nud & comme s'ils étoient disséqués.

Troisième Observation. Les membranes de l'arrier-faix, qui sont naturellement séparées & détachées du foetus, tenoient à celui-ci; car depuis le cartilage xiphoïde jusqu'aux os pubis, de la largeur de 2 pouces, elles étoient étroitement unies à la surface extérieure du peritoine, qui en cet endroit étoit entièrement dénué des muscles, de la graïsse & de la peau qui le recouvrent dans l'état naturel. Les inégalités, qu'il y a d'ordinaire à la surface extérieure du peritoine, avoient apparemment donné lieu à cette union.

Quatrième Observation. Le cordon umbilical étoit de 2 tiers plus court que de coûtume, & il n'avoit qu'une artère de deux qu'on y remarque ordinairement. Cet artère partoît de l'iliaque droite, & sortoit du ventre, par la partie moyenne de la region hypogastrique, au lieu de for-

tir par la partie moïenne de la region umbilicale. Etant sortie du ventre , elle ne se joignoit à la veine umbilicale, qu'après avoir fait 2 pouces de chemin ; ensuite elle formoit avec cette veine le cordon umbilical, après quoi elle se terminoit à l'ordinaire dans le placenta par un nombre infini de rameaux & de capillaires,

La veine umbilicale étant parvenuë du placenta jusqu'au bout du cordon qui est du côté du ventre , abandonnoit l'artere du même nom , se portoit à la partie supérieure de l'aîne gauche , & là elle entroit dans le ventre ; puis elle montoit le long du côté gauche de cette cavité , couchée sur le muscle psoas ; ensuite elle traversoit le diaphragme à côté du corps de la dernière vertèbre du dos ; & après avoir parcouru les parties inférieures & moïennes de la poitrine en y formant plusieurs ovales , se terminoit enfin au milieu du tronc supérieur de la veine cave. Dans cette route la veine umbilicale recevoit les 2 iliaques , les lombaires , les 2 émulgentes , la veine de la glande renale gauche , & la diaphragmatique du même côté.

On peut faire quatre Réflexions sur cette dernière Observation :

Première Réflexion. Que le cordon umbilical n'ayant pas sa longueur ordinaire , ce défaut peut avoir donné occasion à trois choses. 1°. Au déchirement du placenta. 2°. A son détachement de la matrice. 3°. A la mort du fœtus. Car ce fœtus n'a pû s'étendre, s'allonger & faire de grands efforts dans la matrice pour concourir avec la mere à sa sortie , sans fortement tirer & ébranler le placenta , & sans le détacher enfin de la matrice.

Or le placenta n'a pû être détaché , le fœtus restant dans la matrice , & les membranes de l'arrière-faix subsistant encore en leur entier , qu'une mort prompte ne s'en soit ensuivie , puisqu'un fœtus ne sçauroit vivre dans la matrice sans y recevoir continuellement de l'air de sa mere. Or celui-ci , après le détachement du placenta , n'en pouvoit plus recevoir de la sienne.

On demandera peut-être pourquoi le peu de longueur du cordon n'a pas causé le détachement du placenta avant le remède du travail pour l'accouchement.

Je réponds, 1°. Que les mouvemens, que le fœtus fait dans la matrice pendant le travail, sont beaucoup plus forts & plus fréquens, que ceux qu'il fait avant le travail.

2°. Que la matrice, le diaphragme & les muscles du ventre sont presque dans l'inaction à l'égard du fœtus avant le travail, & que toutes ces parties sont dans de violentes contractions durant le travail.

3°. Que le placenta de ce fœtus, étant d'une grandeur extraordinaire, comme je l'ai remarqué, son adhérence à la matrice en étoit d'autant plus forte, & par conséquent capable de résister nonobstant le défaut de longueur du cordon, aux mouvemens qui ont précédé le travail, mais non pas à ceux qu'il a faits pendant le travail.

Seconde Réflexion sur la troisième Observation. La veine ombilicale du même fœtus faisoit à l'égard des veines, qu'elle recevoit dans le ventre, la fonction du tronc inférieur de la veine cave, dans lequel elles aboutissent pour l'ordinaire.

Troisième Réflexion. Il paroît par la même Observation, qu'il n'est pas nécessaire, que la veine ombilicale se termine dans la veine porte, & que son sang soit distribué dans le foye, avant que d'arriver au cœur; puisque dans ce fœtus, qui étoit bien nourri & à terme, & qui n'est mort dans le ventre de sa mère que par accident, la veine ombilicale aboutissoit au tronc supérieur de la veine cave, & que par conséquent son sang étoit porté au cœur, sans avoir passé par le foye.

Quatrième & dernière Observation. Si ce fœtus avoit vécu, il auroit dû avoir deux nombrils; parce que les vaisseaux, qui composoient le cordon umbelical, en se joignant ensemble, étoient séparées & fort éloignées l'une de l'autre, l'artere sortant du ventre par le milieu de la re-

gion ombilicale , & la veine y entrant par la partie supérieure de l'aîne gauche.

Cinquième Observation. L'intestin ileon , qui est le dernier des grêles , aboutissoit dans une poche charnuë , qui étoit de la grandeur & de la figure d'un petit œuf de poule. De l'extrémité inférieure de cette poche , il partoit un tuyau de 3 lignes de longueur & de 2 de grosseur , qui se terminoit par un trou rond , d'une ligne & demie de diamètre , à la surface extérieure du ventre , un peu au-dessus de l'endroit où devoit être la symphise des os pubis , & ce trou faisoit la fonction d'anüs , quoiqu'il fût placé à la partie antérieure du ventre.

Il suit de cette Observation , 1^o. Qu'il n'y avoit dans ce fœtus rien qui tint de la forme du cœcum , du colon , ni du rectum. 2^o. Que ce fœtus auroit été difficilement à la selle , quelques molles qu'eussent été les matieres fecales , à cause de la petitesse du conduit par où elles auroient dû passer pour sortir du corps : car j'eus beaucoup de peine à y faire passer le méconium , qui étoit contenu dans l'ileon & dans la poche. Je n'en ferois jamais même venu à bout , si je n'avois eu la précaution de le bien détremper avec de l'eau & d'en faire un corps liquide.

Sixième Observation. Les 2 reins étoient parfaitement ronds , & tout composés de grains comme une meure. Le rein gauche avoit 15 lignes de diamètre , & chacun de ses grains prés d'une ligne & demie. Le droit en avoit 9 , & ses grains environ une.

Septième Observation. La grosseur des ureteres excédoit de beaucoup la naturelle. Ces conduits alloient en serpentant d'un bout à l'autre , & avoient chacun une espèce de mesentere qui les contenoient dans cette disposition.

L'uretere gauche étoit d'un tiers plus gros que le droit , & il se terminoit à la partie moïenne droite d'une vessie de 7 lignes de longueur & de 4 de largeur , située dans le bassin de l'hypogastre du côté gauche.

Le cou de cette vessie étoit fort court, étroit, & s'ouvroit de niveau à la superficie extérieure du ventre, 3 lignes au-dessus de l'endroit où devoit être l'os pubis du même côté, par un trou rond, d'une ligne & demie de diamètre, & qui faisoit la fonction de celui de l'uretere. Enfin ce cou me parut avoir un sphincter, parce que poussant de l'eau dans la cavité de cette vessie, elle n'en sortoit que lorsque je la pouissois avec un peu de force.

L'uretere droit aboutissoit à la surface extérieure du ventre, 4 lignes au-dessus de l'endroit où devoit être l'os pubis du même côté, par un trou qui étoit de figure ovale, d'environ une ligne & demie de longueur, & d'une demie ligne de largeur.

J'ai poussé fort doucement de l'eau dans la cavité de cet uretere, elle en est sortie à mesure par ce trou; d'où j'infere que l'extrémité inférieure de ce conduit n'avoit point de sphincter, & que l'urine filtrée par le rein droit du fœtus, se seroit continuellement écoulée par cette voye. Conséquence qui me paroît d'autant plus vrai-semblable, que j'ai vû 2 Enfans vivans, dont les ureteres se terminoient de même à la surface extérieure du ventre, un peu au-dessus des os pubis, par l'embouchure desquels l'urine sortoit sans cesse goutte à goutte.

Huitième Observation. Les testicules étoient enfermés dans le ventre, l'un dans l'ile droite, & l'autre dans la gauche. Le vaisseau éjaculation du testicule droit se terminoit dans la cavité de l'uretere du même côté, à 3 lignes de son embouchure. L'éjaculatoire du testicule gauche aboutissoit dans la cavité de la petite vessie.

Il paroît par cette Observation, que ce fœtus n'auroit été nullement propre à la génération parce que la semence n'auroit pû être lancée dans le champ de la génération, la vessie & l'uretere droit, où se terminoient les vaisseaux éjaculatoires, n'étant pas continus à la verge, par laquelle seule se fait l'éjaculation. D'ailleurs la semence se seroit trouvée confondue avec l'urine, ce qui sans doute auroit fort altérée ses qualités.

Neuvième Observation. Ce fœtus n'avoit ni postates ni vesicules seminaires. Il avoit une verge, mais point de scroton. La verge étoit longue de 9. lignes, & grosse de 4; sa figure & sa situation étoient naturelles : elle étoit dure, droite & telle qu'elle est dans le tems de l'érection, & composée du gland, de 2 corps caverneux & de l'urètre.

Le gland n'avoit ni prépuce ni trou. Il étoit solide de même que le reste de la verge.

Dixième Observation. Le foye étoit rond & oblong ; gros, uni & continu en toutes ses parties, n'ayant ni scissure ni lobes. Cependant après avoir détaché & levé sa membrane, je trouvai au-dessous la vesicule du fiel & la glande renale droite, qui étoient contenues dans des enfoncemens creusés dans ce viscere, de sorte qu'elles paroissent ne former avec lui qu'un même corps.

Des 3 ligamens qui maintiennent le foye en sa situation naturelle, il lui en manquoit deux; sçavoir, celui qui l'attache au cartilage xiphoïde, & celui qui l'attache au nombril. Ce dernier ligament fait encore la fonction d'une veine qu'on appelle ombilicale, & qui dans ce fœtus ne se terminoit point au foye. Aussi faute de ces deux ligamens, ce viscere étoit si peu stable dans son assiette, qu'il suivoit tous les differens mouvemens du corps.

Onzième Observation. Le diametre de la veine cave inferieure étoit beaucoup plus petit que d'ordinaire, parceque cette veine n'étoit composée que des rameaux, qui reportent le sang de la glande renale droite, de la vesicule du fiel, du foye & de la partie droite du diaphragme; que le sang qui revenoit des extrémités inferieures & de plusieurs parties du ventre, étoit repris par la veine ombilicale, & versé dans le tronc supérieur de la même veine cave. Du reste ce tronc inferieur n'avoit rien de particulier; car il traversoit le diaphragme par l'endroit ordinaire, & se terminoit dans l'oreille du cœur.

Douzième Observation. Les 4 dernieres fausses côtes gauches étoient déprimées & enfoncées dans la cavité

delà poitrine du même côté ; & diminuant cette cavité par leur dépression & leur enfoncement , elles repousoient dans la cavité droite la partie inférieure du cœur ; de sorte que sa situation , d'oblique qu'elle est naturellement , étoit devenue verticale.

Treizième Observation. Le tronc supérieur de la veine cave étoit environ la moitié plus gros que de coutume , parcequ'outre le sang qu'il a accoutumé de recevoir , il recevoit encore par la veine ombilicale , le sang des extrémités inférieures , & celui de plusieurs parties du ventre.

Quatorzième Observation. L'os sacron , le coccyx & les os innominés contre l'ordinaire , étoient caves en dehors & convexes en dedans. La partie postérieure de l'os sacron étoit ouverte d'un bout à l'autre par son milieu de la largeur de 4 lignes. Les 2 os pubis , au lieu d'être joints ensemble , étoient séparés l'un de l'autre par un intervalle de 2 pouces & demi. Enfin les cuisses par leur partie supérieure principalement , étoient tournées en dehors , & fort écartées l'une de l'autre ; cependant le fémur de chaque cuisse avoit sa figure naturelle. Ainsi le grand écartement des cuisses étoit causé par celui des os pubis , & peut-être ce même écartement des os pubis étoit-il aussi la cause des mauvaises conformations que j'ai remarquées dans la partie inférieure du ventre de ce fœtus.

Quinzième & dernière Observation. Il y avoit sur la partie postérieure de l'os sacron , un sac membraneux , de la grosseur & de la figure d'un œuf de pigeon , attaché & intimement uni par un pedicule creux de 5 lignes de longueur & d'une demie ligne de largeur , au second nerf sacré du côté gauche. Ce sac étoit plein d'une liqueur fort claire , beaucoup plus légère que de l'eau commune , & d'une saveur un peu âcre.

Cette Observation semble favoriser l'opinion de ceux qui admettent un suc nerveux dans les nerfs , parceque la cavité du sac & celle du pedicule étant communes ,

& celui-ci étant continu & intimement uni à un gros nerf de l'os sacré, ils pouvoient l'un & l'autre en avoir reçu la liqueur, que j'ai trouvée dans leur cavité. Cela paroît d'autant plus vraisemblable, que les partisans du suc nerveux lui donnent à peu près les mêmes qualités, que j'ai remarquées dans cette liqueur.

R E M A R Q U E S

S U R

UN FOETUS MONSTRUEUX.

PAR M. MERY.

1709.
6. Février.

J'ay reçu depuis peu de M. Bertholomée Seyfar, Medecin Danois, le dessin d'un Fœtus à terme, avec la description de ses parties principales, qu'il a envoyé à l'Academie Royale des Sciences de la part de Sa Majesté Danoise. Tout le corps de ce fœtus, à l'exception de la tête, n'avoit rien d'extraordinaire. Sa tête même, quoiqu'informe, paroissoit plutôt monstrueuse par le défaut des parties qui lui manquoient, & par la situation bizarre de celles qu'on y remarquoit, que par aucun rapport qu'elle eût avec celle de quelque animal. Voici l'extrait des particularités les plus remarquables que cet habile Anatomiste a observées dans ce fœtus.

1^o. Sa tête étoit plus petite qu'à l'ordinaire, & sa face presque toute recouverte de poils. Au milieu du front elle avoit une petite protuberance charnuë longue d'environ un pouce, & grosse à peu près comme une plume de Cigne, dont le centre étoit creux, sa cavité n'avoit qu'environ demi pouce de profondeur, & pouvoit à peine admettre une soie de porc. En la comprimant, on en fit sortir quelques gouttes de liqueur; ce qui donne lieu de croire quelle pouvoit avoir quelques petites glandes qui

qui se dégorgeoient dans sa cavité. Cette protubérance étoit retrouffée en haut , au lieu de prendre en embas.

2°. Directement au-dessous de cette masse charnuë étoit placé un œil de figure triangulaire , revêtu de ses paupieres , garnies de leurs cils ; mais les sourcils manquoient à la supérieure. Ce fœtus n'avoit que ce seul œil, dont on distinguoit parfaitement bien la conjonctive , la cornée transparente & la prunelle. Par la dissection que l'on en fit , on remarqua qu'il avoit tous ses muscles ; cependant quoique sa conformation ait paru parfaite , il est à croire néanmoins que cet Enfant n'auroit jamais pû voir , supposé qu'il eût vécu , parce que son œil n'avoit point de nerf optique , ainsi il ne devoit point s'y trouver de retine ; mais c'est ce qu'on n'a point recherché ; car dans la prescription qu'on nous a envoyée on n'y fait aucune mention ni de ses membranes interieures , ni de ses humeurs.

3°. Ce fœtus n'avoit ni bouche , ni nez ; delà vient , dit-on , qu'il ne pouvoit pas respirer , ce qui lui a causé la mort peu de temps après être sorti du sein de sa mere. Cette consequence me paroîtroit incertaine , parce qu'on a remarqué deux trous au-dessous des oreilles , penetrans à ce qu'on prétend , jusqu'à l'œsophage & à la trachée artère , par lesquels on a introduit de l'air avec un chalumeau ; mais parce que le pœumon qu'on a plongé dans l'eau est tombé au fond , & qu'il auroit dû nager sur sa surface , si l'air soufflé après la mort avoit pû entrer par l'un ou l'autre de ces deux trous dans la trachée artère , il y a bien de l'apparence , les vesicules du pœumon ne s'étant point gonflées , que ces deux trous penetroient dans l'œsophage , ainsi il ne pouvoit pas respirer. Mais ces deux trous répondans dans l'œsophage ; on ne peut pas dire absolument que cet Enfant n'a pû , n'ayant point de bouche , recevoir d'aliment par l'œsophage ; car supposé qu'il fût vrai que le fœtus renfermé dans la matrice prît quelque nourriture par la bouche , ces deux trous pouvoient en faire l'office , puisqu'ils communiquoient dans l'œso-

phage. Cependant avec cet avantage ce fœtus n'auroit pas pû goûter, quand bien même il auroit eu une langue, dont on ne parle point dans la description, parce que les alimens auroient passé, sans toucher la langue, de l'œsophage dans l'estomach.

4°. Les oreilles occupoient la place du menton, mais comme elles n'avoient point de conduit extérieur, elles n'auroient de rien servi; d'ailleurs les nerfs auditifs ne pénétrant point l'apophyse pierreuse, où se trouve le labyrinthe, qui fait la partie principale de l'organe de l'ouïe, ç'auroit encore été une autre cause de surdité, quand même cette partie de l'oreille interne eût eu une structure parfaite; c'est ce qu'on n'a point aussi examiné.

5°. Comme j'ai déjà dit que ce fœtus n'avoit point de nez, je ne dois pas oublier d'ajouter qu'il n'avoit point de nerfs olfactifs, & que l'os éthmoïde étoit sans trous. Tous ces défauts font donc voir clairement qu'il auroit été privé de l'odorat.

Voilà les principales remarques extraordinaires que j'ai extraites de la description de M. Seyfar, avec les réflexions que j'y ai faites. Je passe maintenant à trois questions qu'il me propose dans la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire en particulier. 1°. Sçavoir, si le fœtus renfermé dans la matrice se nourrit par la bouche. 2°. Quelle sorte de liqueur il reçoit de sa mere par l'ombilic. 3°. Si le meconium est l'excrement de la première coction.

Pour répondre à la première question, je dis, 1°. Qu'il n'y a pas d'apparence que le fœtus renfermé dans la matrice, reçoive aucune sorte d'aliment par la bouche pendant la grossesse, parce que la nature n'a pas coutume de prendre en même temps deux voies différentes pour arriver à une même fin.

2°. L'humeur glaireuse qui se trouve dans l'œsophage, l'estomach & les intestins grêles, & qui a fait juger à quelques Auteurs que le fœtus se nourrit par la bouche, ne le prouve nullement; car les glandes qui se dégorgent

continuellement dans la bouche , dans l'œsophage , dans le ventricule & dans les intestins , sont des sources plus que suffisantes pour la fournir.

3°. Enfin ce qui semble décider cette question , c'est qu'on a vû des fœtus à terme fort gras & bien nourris , dont la bouche & les narines étoient tout à fait fermées , sans avoir aucun autre conduit extraordinaire quî communiquât dans le pharinx ou dans l'œsophage , par lequel l'aliment pût être porté dans l'estomach , & d'autres qui n'avoient point de tête. Or s'il étoit vrai que le fœtus eût nécessairement besoin de prendre quelque aliment par la bouche pour se nourrir , comme le prétendent ses Auteurs , il est évident que tous ces fœtus n'auroient jamais pû venir à leur dernière perfection. Ils y sont cependant arrivés. Il est donc clair que le fœtus reçoit seulement par l'ombilic l'aliment dont il se nourrit dans le sein de sa mere. D'ailleurs on sçait certainement que les eaux dans lesquelles il est plongé , ne sont autre chose que ses propres veines. Il n'y a donc pas lieu de croire qu'il puisse tirer de cet excrément quelque nourriture.

Mais cela étant , on me demande si le fœtus ne reçoit que du sang ou du chile par l'ombilic. On trouvera la réponse à cette seconde question dans le Problème que je proposai à l'Académie le 5. May de l'année dernière ; il a été imprimé dans ses Memoires. Il ne me reste donc plus qu'à satisfaire à la troisième question de M. Seyfar ; sçavoir , si le *meconium* est l'excrément de la première coction. Voici sur cela quelle est ma pensée.

Je viens de prouver que le fœtus ne se nourrit point par la bouche , le *meconium* ne peut donc pas être l'excrément de la première digestion ; il faut donc nécessairement que ce soit une matiere formée du mélange des liqueurs différentes des glandes qui se vident dans le canal qui s'étend depuis la bouche jusqu'à l'anus , & par conséquent l'un des excréments de la seconde coction , c'est-à-dire de la masse du sang qu'il reçoit de sa mere par l'ombilic. Comme on peut faire aisément l'applica-

tion de ces consequences aux foetus des animaux , il seroit aussi inutile qu'ennuyeux de m'étendre davantage sur cette matiere , pour prouver qu'ils se nourrissent dans la matrice comme fait le foetus humain , c'est-à-dire , par le cordon ombilical.

C O M P A R A I S O N

*Des Observations du Barometre faites à
Paris & à Zurich, pendant les six premiers
mois de l'année 1708.*

PAR M. MARALDI.

Monsieur Scheuchzer a envoyé à l'Academie un Memoire où sont diverses Observations qu'il a faites à Zurich pendant les six premiers mois de l'année 1708.

Ce sont les Observations du Barometre, du Thermometre, des Vents, de la constitution de l'Air, de la quantité de Pluie qui est tombée, & de l'augmentation & diminution du Limar, qui est une riviere qui passe à Zurich, faites à chaque jour du mois, & souvent deux fois le même jour. A toutes ces Observations il en ajoute d'autres à la fin de chaque mois sur les maladies qui ont regné pendant le mois.

Pour les Observations du Barometre il s'est servi de deux tuyaux, l'un droit, l'autre incliné, dans lequel le mouvement du mercure est le double plus sensible que dans le droit. Ces hauteurs sont divisées en pouces & en lignes du pied de Paris. Ces deux Barometres s'accordent souvent ensemble, mais quelquefois il y a une difference de 4 lignes. Dans la comparaison que nous avons fait de ces Observations avec les nôtres, nous nous sommes servi du Barometre droit. Pour mesurer la pluie, il

dit s'être servi de la methode de l'Academie, & de la mesure de Paris. C'est aussi la même mesure qu'il a employée pour connoître l'augmentation & la diminution de l'eau du Limat.

Le premier de Janvier le Barometre étoit à l'Observatoire à 27 pouc. 5 lign. le vent étant Sud. A Zuric avec le même vent le Barometre étoit à 26 pouc. 3 lign. de sorte que la difference entre l'Observatoire & Zuric étoit de 1 pouc. 2 lign. dont le mercure étoit plus élevé à l'Observatoire. La difference la plus ordinaire & moyenne est 1 p. 4 lign. Après le premier Janvier le Barometre augmenta de part & d'autre jusqu'au 3, & diminua jusqu'au 10, qu'il fut à Paris à 26 pouc. 10 lign. $\frac{1}{2}$, à Zuric à 25 pouc. 11 lig. qui sont à peu près les termes les plus bas où il arrive à Paris aussi bien qu'à Zuric, ainsi il avoit diminué environ de six lignes : le vent étoit dans cette intervalle à Paris Sud ou Sud-Oüest ; à Zuric il étoit en même-temps presque toujours opposé, c'est-à-dire, Nord ou Nord-Oüest. Le Barometre s'éleva dans la suite du mois. A Paris le 19 & le 20, il y eut des vents de Sud-Oüest tres-violens. M. Scheuchzer marque aussi que le 19 il faisoit un vent de Sud-Oüest grand, & il ajoute que le 25 à 10 h du soir, il fit un fort grand vent qui renversa beaucoup de cheminées. Son Thermometre fut le 29 Janvier à 10 degrés, qui est le plus bas où il soit arrivé. Pendant le mois de Janvier il a plu à Zuric 18 lig. $\frac{1}{2}$, à Paris il a plu 34 lig. & davantage. La diminution du Limat a été de 9 pouces, & l'augmentation de deux.

Au commencement de Fevrier le Barometre s'étant trouvé fort bas à Paris & à Zuric, il s'éleva depuis le 6 jusqu'au 9 en trois jours d'un peu plus de 10 lignes à Paris, à Zuric de 8 lignes ; il baissa ensuite jusqu'au 16, & s'éleva après jusqu'au 22, étant comme il avoit été le 9 Fevrier à Paris à 28 pouc. 1 lig. à Zuric à 26 pouc. 8 lig. qui sont à peu près les hauteurs les plus grandes où il a coûtume de monter. Pendant le mois de Fevrier il a regné le plus souvent le même vent de Nord & de Nord-

Oüest à Paris & à Zuric, & il est tombé dans ces deux villes la même quantité de pluie qui est de 19 lignes. La diminution de l'eau du Limat en hauteur a été de 9 pouces $\frac{1}{2}$ & l'augmentation d'un pouce & demi.

Il arriva à la hauteur du Barometre plusieurs variations dans le mois de Mars, & ces variations arriverent les mêmes jours, & furent à peu près les mêmes à Paris & à Zuric. Il resta élevé les deux premiers jours, & baissa le troisième; il haussa les trois jours suivans, & baissa de nouveau jusqu'au 11. Après s'être élevé jusqu'au 16, il baissa pour la troisième fois jusqu'au 22. Le vent étoit Nord à Paris & Nord-Oüest à Zuric. Il plût à Paris & à Zuric 17 lig. L'augmentation du Limat fut de 5 pouces égale à la diminution.

Le 10 d'Avril à Paris le Barometre étoit à 27 pouc. 2 lig. $\frac{1}{2}$ par un vent d'Oüest, à Zuric il étoit à 25 pouc. 11 lig. par un vent de Nord. Le Barometre s'éleva un peu le jour suivant dans ces deux villes, & il baissa de nouveau le 12 à Zuric & à Paris, où il continua de baisser encore le 13 par un vent de Sud violent. Il a plû en Avril 26 lignes à Paris, & 52 lignes $\frac{1}{4}$ à Zuric. Le Limat augmenta 24 pouces, & il ne diminua qu'un demi-pouce.

Les jours que le Barometre resta plus élevé durant le mois de May à Paris & à Zuric, furent le 7, le 8, le 9 & le 28, & les jours qu'il baissa davantage furent le 16 & le 17. Les mêmes à Paris & à Zuric. Il plût à Paris dans le mois de May 27 lig. & $\frac{2}{3}$ à Zuric 21 lig. $\frac{1}{2}$. La diminution du Limat fut 4 pouces, & l'augmentation de 18.

Pendant le mois de Juillet le Barometre resta le plus souvent à une grande hauteur, excepté le 4, le 27 & le 30, qu'il se trouva à Paris à 27 pouc. 5 lig. à Zuric à 26 p. 1 lig. Les jours qu'il resta plus élevé furent le 14 & le 15, étant à Paris à 28 p. o. lig. à Zuric à 26 p. 5 lig. Il plût à Paris 25 lign. $\frac{1}{3}$, à Zuric 66 lign. $\frac{1}{2}$. L'augmentation du Limat de 21 ponce, la diminution de 7.

La plus grande hauteur où soit arrivé le Barometre les six premiers mois de cette année, a été à Paris le 9

& le 22 Fevrier à 28 pouces 1 ligne, & la plus petite hauteur où il soit descendu fut le 1 Fevrier, s'étant trouvé à 26 pouces 18 lignes. De sorte que la variation de la plus grande à la plus petite hauteur a été de 1 pouce 3 lignes à Paris. A Zurich la plus grande hauteur a été de 26 pouces 8 lignes le 9 & 22 Fevrier. La plus petite s'est trouvée de 25-pouces 11 lignes le 1 Fevrier. La difference est de 0. pouc. 9 lignes, plus petite de six lignes que celle qui est arrivée à Paris.

*Comparaison des Observations du Barometre faites à
Paris & à Zurich les six derniers mois de
l'année 1708.*

Dans le dernier Memoire que M. Scheuchzer a envoyé à l'Académie, il y a la continuation des Observations du Barometre, du Thermometre, des Vents de la Pluie pour les six derniers mois de l'année 1708, & d'autres Observations semblables à celles qu'il avoit faites les six premiers mois.

Nous avons comparé ces nouvelles Observations avec celles que nous avons faites en même-temps à l'Observatoire de la maniere que nous avons fait les premieres, & voici ce qui résulte de cette comparaison.

En Juillet le Barometre resta presque toujours à une grande hauteur à Paris & à Zurich; il n'y eut que le 6 & le 7 qu'il se trouva à une hauteur moyenne, étant à Paris à 27 p. 7 lig. à Zurich à 26 p. 2 lig. $\frac{1}{2}$ & 3 lig. de sorte que la difference étoit de 1 p. 4 lig. comme nous avons déjà conclu par d'autres comparaisons. Le vent qui a régné en même temps en ces deux villes, a presque toujours été different, & souvent opposé. Il n'a été le même que pendant quatre jours, qui sont le 11, le 18 & 22, étant de part & d'autre Nord-Est, & le 16 étant Sud-Ouest. Le Thermometre fut plus élevé à Zurich le 23, à Paris

le 29. En Juillet il plût à Paris 28 lignes, à Zurich 48. Les eaux de la riviere du Limat qui passe à Zurich augmentèrent de 10 pouces, & diminuerent de 16; ainsi M. Scheuchzer dit que l'augmentation des rivieres ne répond point à la quantité de pluie, puisque le Limat est diminué plus qu'il n'est augmenté, quoiqu'il soit tombé une grande quantité de pluie durant le mois de Juillet.

Au mois d'Aoust la variation qui arriva à la hauteur du Barometre fut de 4 lignes à Paris, & de 3 à Zurich. Les vents ont été la plûpart du temps fort differens en ces deux villes. Le jour que le Thermometre est monté plus haut a été le 15 à Paris le même qu'à Zurich. Il a plû à Paris 22 lig. $\frac{1}{2}$, à Zurich 35 lig. $\frac{1}{2}$. Les eaux du Limat augmentèrent en hauteur de 3 pouces, & diminuerent de 22 pouces.

En Septembre le jour que le Barometre se trouva plus élevé fut le premier à Paris & à Zurich, & le jour qu'il descendit plus bas fut le 26 le même de part & d'autre. Le 10 il regna un vent de Sud-Est de part & d'autre, le 20 un vent de Sud-Oüest, le 21 un vent de Sud; dans les autres jours les vents furent differens. Il plût à Paris 12 lignes, à Zurich 34. Le Limat diminua de 12 pouces sans avoir augmenté.

En Octobre le Barometre resta plus élevé le 6 & le 7, le 18 & le 19 à Paris de même qu'à Zurich. Il regna pendant presque tout le mois de part & d'autre des vents de Nord, de Nord-Est ou Nord-Oüest, Il plût à Paris 14 lig. $\frac{1}{2}$, à Zurich 27 lig. $\frac{1}{2}$. La hauteur perpendiculaire des eaux & du Limat diminua de dix pouces sans avoir augmenté.

En Novembre les jours que le Barometre resta plus haut furent le 1 & le 19 les mêmes à Paris & à Zurich, & le jour qu'il descendit plus bas de part & d'autre fut le 23. Il n'a regné le même vent que le 24 & le 26. Le jour le plus froid fut le 25 le même à Paris & à Zurich. Il plût à Paris 5 lig. $\frac{1}{2}$, à Zurich 7. La diminution du Limat fut de 6 pouces sans avoir augmenté.

En Decembre le 14^e. fut le jour que le Barometre se trouva plus bas de part & d'autre. Les jours que le Thermometre fut plus bas furent à Paris le 11. & le 14, à Zurich ce fut le 12. & le 29. Il ne s'est point rencontré de jour qu'il ait fait de part & d'autre le même vent. Il a plu à Paris 9 lig. $\frac{2}{3}$, à Zurich il a plu 21 lig. $\frac{1}{2}$. La diminution du Limat fut de 4 pouces sans augmentation.

La somme totale de la pluie qui est tombée à Paris, suivant nos observations, a été de 20. pouc. 1 lig. celle qui est tombée à Zurich est de 30 pouces; desorte qu'il est tombé presque un tiers de pluie plus à Zurich qu'à Paris. M. Scheuchzer croit qu'il pleut davantage en Suisse qu'en France, à cause de la grande quantité des montagnes où les nuages portez par les vents se vont fondre pour l'ordinaire en pluie & en neige. La grande quantité de rivières qui sortent de ces montagnes, font aussi conjecturer que la pluie y tombe en plus grande abondance. Il croit qu'il tombe aussi plus de pluie dans les pays qui sont proche de la mer, que dans les terres. Il dit qu'à Upminster en Angleterre, suivant les observations de M. Derham, il pleut 19 pouces d'eau, lorsqu'à Toconle dans le Lancastre il y tombe 39 pouces d'eau.

Dans les six premiers mois de l'année 1708. l'augmentation des eaux du Limat a été 71 pouc. $\frac{1}{2}$. Les six derniers elle a été de 13, & l'augmentation totale de 84 p. $\frac{1}{2}$. La diminution pendant les six premiers mois a été de 35 pouces, & de 67 les six derniers. La diminution totale de 102 pouc. plus grande de 16 pouc. que l'augmentation.

M. Scheuchzer dit que l'augmentation des eaux dans les rivières de la Suisse vient principalement de la fonte des neiges qui se fait sur les montagnes, ce qui paroît par plusieurs torrens de ce pays-là, & en particulier par celles qu'il appelle Taminna, dont les eaux augmentent tous les soirs pendant l'Esté, souvent à un pied de hauteur, quoiqu'il n'ait point plu durant le jour. Par la diminution des eaux du Limat plus grande que l'augmentation, M. Scheuchzer infera que son pays est plus froid que co-

lui qui est le plus éloigné des Alpes, où l'Hyver regne la plus grande partie de l'année, n'y ayant en Suisse que deux mois d'Esté, qui doit être plutôt appelé un Printemps.

SOLUTIONS ET ANALYSES

*De quelques Problèmes appartenans aux
nouvelles Méthodes.*

PAR M. SAURIN.

IL ny a guere de Problèmes qui aient plus mis en jour le mérite & l'utilité des nouvelles Méthodes, que ceux qui se rapportent à la Question *des plus grandes & des plus petites Quantités*. Il s'en trouve plusieurs de cette nature également curieux, & difficiles dans les Journaux des Scavans de 1697, & dans les Actes de Lipfic de 1698. Les celebres Geometres qui en ont donné la Solution, ont supprimé l'Analyse qui les y a conduits. Je me propose de donner une nouvelle Solution de quelques-uns, & l'Analyse supprimée de quelques autres.

Je commence ici par un des Problèmes qui regardent *la plus vite descente*. Deux points étant donnez sur une ligne droite inclinée à l'horizon, trouver la Ligne qu'un corps en tombant devroit d'écrire pour arriver d'un point à l'autre dans le plus court tems possible : c'est le premier Problème qui parut d'abord sur cette Question. Il fut proposé par M. Jean Bernoulli, alors Professeur de Mathématique à Groningue, & qui l'est présentement à Bâle : on trouva que la Ligne demandée étoit la Cycloïde. M. Jacques Bernoulli mort depuis quelques années, crut encherir sur la difficulté de ce premier Problème, par un second qu'il proposa à l'envi de son Frere. Il demanda de toutes les Cycloïdes celle par laquelle le corps en tombant arriveroit le plutôt à une verticale détermi-

née: c'est celui dont je vais donner une Solution nouvelle. J'exprime le Problème de cette sorte.

Parmi une infinité de Cycloïdes* AGB, AFD. décrite * FIG. I. sur la ligne horizontale AM, & ayant une même origine au point A, déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine A, & la verticale donnée CD est parcouru dans le plus court tems possible.

SOLUT. Je prends pour constante une Cycloïde quelconque AGB, & supposant que AFD une des variables est celle que l'on demande, je mène l'ordonnée BL, & la corde AD que je prolonge jusqu'en B, en sorte qu'elle coupe deux arcs semblables AFD, AGB. MSN est le cercle Generateur de la Cycloïde prise pour constante. Je nomme le diametre de ce cercle, a ; AL, x ; EL, y ; & la donnée AC, b .

Cela posé, on sçait le Theorème démontré par M. Hugheis, que le tems par un arc quelconque AGB de Cycloïde est comme l'arc correspondant MIS du cercle Generateur, divisé par la racine quarrée du diametre. Ici l'arc MIS est égal à $AL + ST (x + \sqrt{ay - yy})$; on aura donc $\frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a}}$ pour l'expression du tems par l'arc AGB; mais ce tems est au tems par l'arc semblable AFD :: $\sqrt{BL} . \sqrt{CD} :: \sqrt{AL} (\sqrt{x}) . \sqrt{AC} (\sqrt{b})$; & par conséquent le tems par l'arc AFD est égal à $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{x}}$; ce qui étant un Minimum par la supposition, doit être différentié, & sa difference égalée à zero.

En laissant la quantité constante $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ qui dispaeroit toujours dans la suite, la différentiation donne $\frac{dx \times \sqrt{x}}{x} + dy \times \frac{a\sqrt{x - 2y\sqrt{x}}}{x \times 2\sqrt{x - yy}} - dx \times \frac{x + \sqrt{ay - yy}}{x \times 2\sqrt{x}} = 0$; mettant à même dénominaison, ôtant ensuite le dénominateur commun, & effaçant ce qui se détruit, il vient $dx \times x \sqrt{ay - yy} + dy \times ax - 2yx - dx \times ay - yy = 0$. Si au lieu de dx on substitue sa valeur $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}}$ donnée par la nature de la Cy

cloïde, on aura $dy \times \frac{\sqrt{y \times a} \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a - y}} (dy \times y \times x) - dy \times ax - yx$
 $- dy \times \frac{\sqrt{y \times ay - yy}}{\sqrt{a - y}} (-dy \times y \sqrt{ay - yy} - y) = 0$; d'où l'on tire

$ax - yx = y \sqrt{ay - yy}$, & en quarrant de part & d'autre
 $aaxx + xxyy = 2axy = ay^3 - y^4$; ou $y^4 - y^3 + xxyy - 2axy = 0$. Cette Egalité se divise par $y - a = 0$,
 & donne par conséquent $y = a$; ce qui fait voir que l'or-
 donnée BL est l'axe même MN du cercle Generateur,
 & que l'arc AGB est la demie Cycloïde entiere; & com-
 me il est semblable à l'arc AFD , ce dernier doit être
 aussi une demie Cycloïde entiere, & le Problème est ré-
 solu par la Cycloïde qui coupe à angles droits la ver-
 ticale donnée.

La division par $y - a = 0$ donne l'Equation à la Cis-
 soïde, $y^3 + xxy - axx = 0$. Il n'étoit pas necessaire de
 quarrer l'Egalité $ax - yx = y \sqrt{ay - yy}$; ou $ax - yx -$
 $y \sqrt{ay - yy} = 0$, pour la diviser; elle pouvoit être divisée
 d'abord par $\sqrt{a - y} = 0$; l'on auroit eu de même $y = a$,
 & l'Equation à la Cissoïde sous les signes radicaux,
 $xx \sqrt{a - y} - y \sqrt{y} = 0$.

Pour concevoir maintenant avec M. Jean Bernoulli le
 * FIG. II. Problème plus generalement; soit* la droite CD , non
 une verticale, mais en général une ligne droite donnée
 de position; faisant un angle quelconque avec l'horizon-
 tale AM ; on demande comme auparavant la Cycloïde
 dont l'arc AFD compris entre le point d'origine A , &
 la donnée de position CD sera parcouru dans un plus
 court tems que l'arc de toute autre Cycloïde compris de
 même entre la droite CD & le point A .

Je prends toujours pour constante la Cycloïde AGB ,
 & tout demeurant de même que dans la Figure précé-
 dente, je mene de plus BQ parallele à CD . La droite
 CD étant donnée de position, AC est donnée de gran-
 deur; l'angle AQB , égal par construction à l'angle ACB ,
 est aussi donné; & par conséquent la raison de BL à LQ
 est donnée; soit cette raison celle de m à n . Nommant

encore MN, a ; AC, b ; AL, x ; BL, y , on aura $LQ = \frac{ny}{m}$, & $AQ = AL + LQ = x + \frac{ny}{m} = \frac{mx + ny}{m}$; & si

le tems par l'arc AFD est appelé, t ; cette Analogie semblable à la précédente, $\frac{x + \sqrt{mx + ny}}{\sqrt{a}} (t \text{ tems par } AGB) : t (t \text{ ems par } AFD) :: \sqrt{BL} \cdot \sqrt{PD} :: \sqrt{AB} \cdot \sqrt{AD} :: \sqrt{AQ} (\sqrt{\frac{mx + ny}{m}}) \cdot \sqrt{AC} (\sqrt{b}) :: \sqrt{mx + ny} \cdot \sqrt{bm}$, donnera

$$t = \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{mx + ny}}{\sqrt{mx + ny}}. \text{ En differentiant cette quantité ;}$$

Substituant la valeur de dx en dy ; & faisant les réductions convenables, il viendra l'Egalité, $my + nx\sqrt{ay - yy} = nyy + amx - myx$, qui étant quarrée produira l'Egalité A , délivrée des signes radicaux;

$$A \dots m^2y^4 - am^2y^2 + m^2xxyy - 2am^2xxy + am^2xx = 0. \\ - + n^2y^4 \quad - + n^2xxyy - an^2xxy$$

Cette Egalité se divisant par $m^2y + n^2y - amm = 0$, donne

$$y = a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2}, \text{ dont voici la construction, qui est fort simple.}$$

Soient* menées dans le cercle *Generator* MSN la * FIG. II. & III.
corde MS parallele à la donnée de position CD , & par le point S , TSB parallele à l'horizontale AM , & qui rencontre la Cycloïde AGB en quelque point B ; je dis que l'ordonnée BL menée de ce point est la valeur de y , & que si l'on décrit un arc de Cycloïde AFD compris entre le point d'origine A , & la donnée de position CD , & semblable à l'arc AGB , cet arc AFD satisfera à la question. Car dans le cercle MSN , MS étant parallele par construction à la donnée de position CD , & MT étant aussi parallele à BL , on a, $MT : TS :: m : n$; & par la propriété du cercle, $MS^2 (m^2 + n^2) \cdot MT^2 (m^2) :: MN (a) \cdot MT = a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2} = TL = y$.

Il est évident que CD sera perpendiculaire au point D à l'arc AFD ; car si du point B on mene BQ parallele à CD , elle sera aussi parallele à la corde correspondante MS du cercle *Generator*, & par la nature de la Cy-

cloïde elle sera perpendiculaire à l'arc AGB au point B ; donc aussi CD parallèle à BQ sera perpendiculaire au point D à l'arc AFD , qui est semblable à l'arc AGB : ainsi dans ce cas comme dans le précédent de la verticale, la Cycloïde dont l'arc AFD tombe perpendiculairement sur la ligne donnée de position, est celle qui résout le Problème.

Il est fort aisé de déterminer le diamètre du cercle Generateur de cette Cycloïde: on n'a qu'à faire BQ ou MS . $MN :: CD$. $\frac{MN \times CD}{MS}$ ce 4^e. terme est le diamètre du cercle requis.

La division de l'Egalité $A..$ par $m^2y - + n^2y - amm = 0$, laisse l'Equation à la Cissoïde $y^2 - + xxy - axx = 0$, qui étoit venue dans le cas de la verticale: & de même si l'on divise par m^2 . l'Egalité $A..$ & qu'ensuite on fasse $-\frac{m}{n} = 0$, on aura, $y^2 - ay - + xxy - 2axxy - + axx = 0$, qui est l'Egalité trouvée dans le cas de la verticale, & qui divisée par $y - a = 0$, devient l'Equation de la Cissoïde.

Les figures 2 & 3 représentent la donnée de position CD faisant un angle aigu avec l'horizontale AM du côté du point d'origine A , & c'est à cette position que convient le calcul précédent: mais on peut donner à CD une position différente qu'il faut encore considérer. Soit donc * la position de CD changée en celle de $C\Delta$ qui est en sens contraire; c'est-à-dire, soit fait l'angle MCD égal à l'angle ACD des Fig. 2 & 3: il est évident, ou du moins il est aisé de démontrer que de tous les arcs de Cycloïde compris entre le point d'origine A , & la donnée de position $C\Delta$, il y en a un qui doit être parcouru dans le plus court tems.

Si pour déterminer cet arc on suit la même méthode que nous avons suivie, l'expression du tems par l'arc cherché, qui étoit $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{a_1 - y}}{\sqrt{mx + ny}}$, sera $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{a_1 - y}}{\sqrt{mx - ny}}$; où il n'y a d'autre différence que celle de $-ny$ dans le dénominateur, au lieu de $+ny$. Cette Fraction étant diffe-

* FIG. IV.

rentiée, & réduite, donnera l'Egalité, $my - nx \sqrt{ay - yy} + nyy + myx - amx = 0$, qui quoique différente dans quelques signes $+$, $-$, de l'Egalité $my + xxx \sqrt{ay - yy} - nyy + myx - amx = 0$, donnée par l'autre position de CD , ne laisse pas, quand on la délivre des signes radicaux, de rendre la même Egalité $A..$ qu'on a trouvée;

$$A... m^2y^4 - am^2y^3 + m^2xxyy - 2am^2xxy + am^2xx = 0.$$

$$+ n^2y^4 \quad + n^2xxy - an^2xxy$$

Ainsi l'on a pour y la même valeur $a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2}$, & la même construction, mais avec cette différence que la corde MS du cercle parallèle à CD , étant de l'autre côté de l'axe MN à l'égard du point d'origine A ; il faut aussi mener TSB de ce côté-là, & prendre y dans la demie Cycloïde qui est ici à droite; de sorte que dans cette Figure, ce n'est pas BL , mais son égale bl qui est y ; & ce n'est pas aussi $A\Phi\Delta$ qui est l'arc du plus court tems, mais l'arc $A\Phi\delta$ qui est semblable à l'arc ANb . Il est clair que bq parallèle à MS , parallèle à la donnée de position $C\Delta$, est perpendiculaire au point b , à l'arc ANb , & par conséquent la donnée de position $C\Delta$ est aussi perpendiculaire à l'arc $A\Phi\delta$ au point δ . Il est donc généralement vrai dans toutes les positions de la droite CD ou $C\Delta$ que l'arc de Cycloïde qui la coupe perpendiculairement est celui qui satisfait au Problème.

* Si dans le calcul on avoit pris bl , & non pas BL , en nommant toujours Al , x ; bl , y ; &c. l'arc de cercle MNS qui mesure le tems par ANb , étant égal à $Al - ST$ ($x - \sqrt{ay - yy}$), l'expression de ce tems auroit été $\frac{x - \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a}}$; & ce tems étant au tems par l'arc semblable

$A\Phi\delta :: \sqrt{A\Phi} \left(\frac{\sqrt{mx - ny}}{m} \right) \cdot \sqrt{AC} (\sqrt{b})$; on auroit eu pour l'expression du tems par $A\Phi\delta$, $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x - \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{mx - ny}}$. En différenciant cette Fraction, & prenant garde que dans cette demie Cycloïde le dy est négatif, on seroit encore venu à l'Egalité A déjà trouvée, qui donne $y = a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2}$.

* FIG. V.

Pour voir clairement que l'arc de Cycloïde $AF\Delta$ n'est pas celui du plus court tems, il ne faut * que tirer la corde AN de la demie Cycloïde ; & par le point H , où elle coupe la donnée de position CD , mener la verticale KHR . L'arc de Cycloïde qui passe par le point H étant une demie Cycloïde entiere qui coupe en ce point perpendiculairement la verticale KH , est celui du plus court tems pour arriver à cette verticale ; le tems par l'arc AFR est donc plus long ; mais le tems par l'arc $AFR\Delta$ est plus long encore ; cet arc n'est donc pas celui du plus court tems ; puisque le tems par la demie Cycloïde qui rencontre au point H la donnée de position CD est beaucoup plus court.

J'avois dessein de résoudre ce Problème élevé encore à un nouveau degré de generalité ; & embrassant toutes les Courbes semblables, de tirer de mon Analyse les constructions qu'en ont données les deux Messieurs Bernoulli ; mais renvoyant cela à un autre Memoire, je vais finir celui-ci par une Solution pour les Cycloïdes, generale pour toutes les positions de la droite CD , courte & sans calcul.

* FIG. VI.

Je prends * pour constante la Cycloïde ANa , dont la base Aa est égal à deux fois AC distance donnée entre le point d'origine A , & la donnée de position CD ; par le point S où CD coupe le cercle Generateur, je mene TSB parallele à AC , & du point B je mene BL ordonnée à la Cycloïde, & BQ parallele à la donnée de position CSD ; ensuite je raisonne ainsi ; La raison de MT à TS étant donnée dans le cercle MNS pris pour constant, les droites MT , TS , CS , & l'arc CIS sont des grandeurs données ; & par conséquent aussi BL , LQ , BQ , & AQ qui leur sont égales. Le tems par l'arc AGB , mesuré par l'arc de cercle CIS est donc aussi donné ; donc aussi le tems par AFD est donné, puisque ces deux tems sont entr'eux dans la raison des données, \sqrt{AQ} , \sqrt{AC} : ce tems le seul de tous qui soit un constant & dont la difference soit égale à zero, est donc le *Minimum* cherché, & l'arc AFD

AFD l'arc qu'il falloit trouver. Il est clair que lorsque *CS* devient verticale, elle tombe sur *CN*; les trois points *S*, *B*, & *D*, se confondent tous trois avec le point *N*; on a $BL(y) = a$, & la demie Cycloïde même *ABN* est la requise.

Quelque autre Cycloïde que l'on prenne pour constante, le même raisonnement aura lieu; & je n'ai pris celle dont *AC* est la demie base que pour la facilité, & pour la remarque qui suit. Toutes choses demeurant les mêmes; si l'on conçoit que la donnée de position *CSD* se meuve autour du point fixe *C* de *a* en *A*, elle prendra toutes les positions qu'elle peut recevoir. Je dis que la Courbe qui passe par tous les points *D* où la coupent dans chaque position les arcs du plus court tems est, une * Spirale * FIG. VII. *ADNdC*, dont le rayon *MD* est toujours à *AC*, comme la corde *CS* à son arc *CIS*, ou toujours à la corde *CS*, comme la demie circonference *CSN* du cercle Generateur à l'arc *CIS*; ce qui se voit clairement, puisqu'on a par tout $AQ(CIS).AC(CSN) :: BQ(CS).CD.$

OBSERVATION DU RETOUR
DE L'ETOILE CHANGEANTE
DE L'HYDRE.

PAR M. MARALDI.

L'Etoile de l'Hydre dont nous avons découvert les changemens, ayant été invisible pendant quelque temps, a paru de nouveau l'année dernière 1708. dans la même situation où elle étoit auparavant. 1709.
13. Février.

Nous avons cessé de la voir vers la fin de Février de l'année 1706. avec une Lunete de 12. pieds, par laquelle nous l'observions depuis le mois de Novembre précédent. Après le mois de Février de 1706. elle n'a pû être

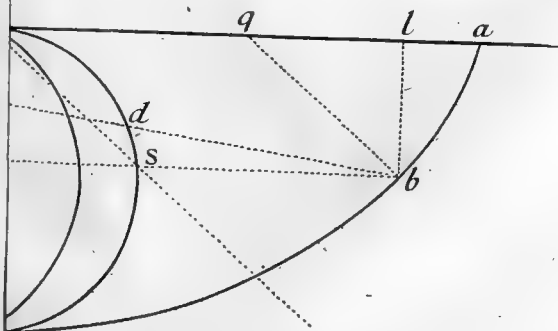
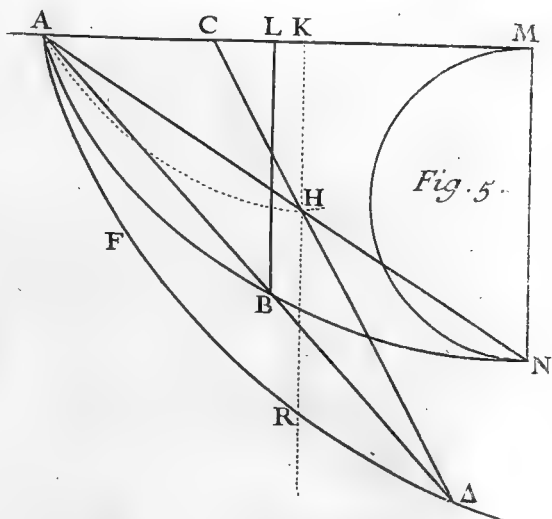
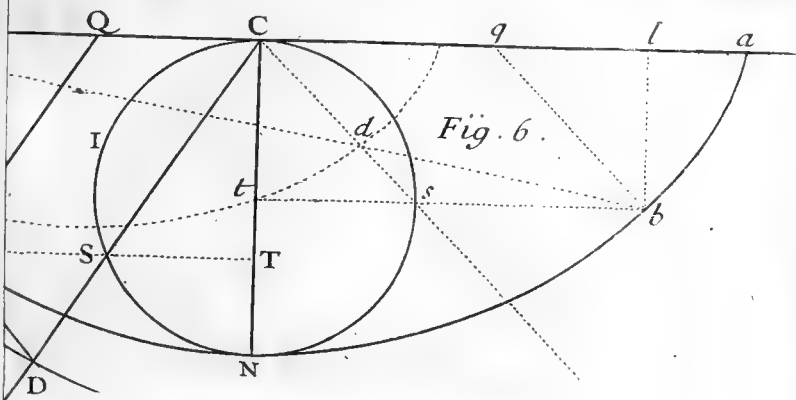
1709.

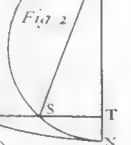
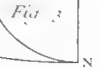
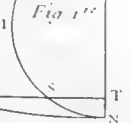
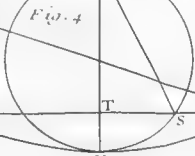
E

34 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
apperçûë qu'au mois d'Avril de l'année 1708. quoiqu'on ait été souvent attentif à regarder la partie du Ciel où elle devoit se trouver. Nous commençâmes de la voir le 18. du même mois d'Avril lorsqu'elle étoit déjà assez sensible, & plus grande que les Etoiles de la sixième grandeur; ce qui nous fit juger qu'on l'auroit pû remarquer auparavant à la vûë simple, si le temps eût été favorable, ou qu'on y eût fait attention. Néanmoins il n'y avoit pas long-temps qu'elle pouvoit être visible; car vers le milieu de Mars ayant considéré cet endroit du Ciel, nous ne pûmes encore appercevoir l'Etoile, quoiqu'on distinguât fort bien toutes les autres qui lui sont proches.

Le 24. Avril, six jours après que nous l'eûmes apperçûë, on reconnut qu'elle étoit un peu augmentée; mais elle étoit encore un peu plus petite que l'antepenultième de l'Hydre, qu'elle égala le 11. May. Le 16. & le 20. du même mois elle étoit encore augmentée, ayant paru belle que l'antepenultième de l'Hydre.

Le 5. Juin, après plusieurs jours de temps couvert & de clair de Lune, nous reconnûmes qu'elle étoit un peu diminuée, & la trouvâmes à peu près égale à l'antepenultième de l'Hydre, comme elle l'avoit été au commencement de May lorsqu'elle augmentoit; d'où l'on peut conclure qu'elle est arrivée à sa plus grande clarté entre le 11. May & le 5. Juin. Dans la suite elle continua à diminuer; mais à cause du crépuscule du soir qui empêchoit de voir non seulement l'Etoile que nous observions, mais les autres Etoiles prochaines, nous la perdîmes à la vûë simple. On en continua néanmoins les observations jusqu'à la fin de Juin avec la Lunete, en la comparant à l'antepenultième de l'Hydre, qui est composée de deux Etoiles inégales, une plus grande que l'autre, peu de minutes éloignées entr'elles, lesqu'elles étant proches du parallèle de la changeante & de la plus claire des trois, passaient toutes dans la même ouverture de la Lunete, ce qui donnoit la commodité de les comparer ensemble.





Les derniers jours que nous la vîmes, elle parut égale à la plus claire des deux qui composent l'antepenultième de l'Hydre, & suivant cette apparence il y avoit lieu de croire qu'on l'auroit pû voir encore pendant quelque temps avant que la foiblesse de sa lumiere l'eût fait disparaître; mais nous cessâmes enfin de la voir à la fin de Juin par la Lunete dans les vapeurs de l'horizon, où les autres Etoiles cessent aussi de paroître.

L'apparition que nous venons de rapporter de cette Etoile, est la troisième que nous observons depuis sept ans. Dans ces trois differens retours il y a eu des inégalitez, tant à l'égard des intervalles de temps échûs entre un retour & l'autre, qu'à l'égard de la grandeur apparente où l'Etoile est arrivée dans le temps qu'elle a été visible. Nous la vîmes la premiere fois au commencement de Mars de l'année 1704. ainsi qu'il a été rapporté dans les Memoires de l'Academie, elle continua de paroître jusqu'à la fin de May à la vûë simple, & jusqu'à la fin de Juin avec la Lunete. Elle ne parut ensuite qu'au mois de Novembre de l'année 1705. & continua d'être visible avec la Lunete jusqu'à la fin de Février de l'année 1706. Elle n'a point paru depuis jusqu'au mois d'Avril de l'année 1708. qu'on commença de la voir.

Entre l'apparition de l'année 1704. & la suivante qui arriva au mois de Novembre de l'année 1705. il y a un intervalle de 19. mois; & depuis ce second retour jusqu'au troisième, il y a un intervalle de 30. mois beaucoup plus grand que le premier.

Sa grandeur apparente a été aussi sujette à des inégalitez. L'an 1704. dans sa plus grande clarté, elle fut égale aux Etoiles de la quatrième grandeur: elle est arrivée à la même clarté l'an 1708. mais elle a été fort foible pendant l'année 1708. n'ayant été visible qu'avec la Lunete. Elle ne parut point depuis le mois d'Avril jusqu'à la fin de l'année 1702. dans lequel temps on fut attentif pour l'observer.

L'Etoile n'est donc pas arrivée à sa plus grande clarté

36 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dans l'espace de sept ans qu'aux années 1704. & 1708.
éloignées de quatre ans l'une de l'autre ; ce qui pourroit
donner lieu de croire que le retour à sa plus grande
phase est de quatre années , au lieu de deux comme nous
l'avions supposé.

Mais l'observation que Montanari fit de cette Etoile
ne s'accorde pas avec la période de quatre ans. Cet Astro-
nomel'observa au mois d'Avril de l'an 1670. lorsqu'elle
étoit de la quatrième grandeur.

Suivant les observations que nous avons fait jusqu'à
présent, elle n'arrive à ce degré de lumiere que vers le
milieu de son apparition. On peut donc supposer qu'elle
étoit alors à sa plus grande phase.

Par les observations de l'an 1704. que nous avons rap-
porté , elle arriva aussi à sa plus grande clarté au mois
d'Avril ; ainsi la même phase est arrivée assez précisément
dans le même mois de l'année après trente-quatre années
échuës depuis 1670. jusqu'en 1704. entre lesquelles il y a
un nombre entier des révolutions de l'Etoile.

Dans cet intervalle il n'y a pas un nombre entier de
périodes de quatre années , mais il peut y avoir dix-sept
périodes de deux années chacune , ce qui se confirme
aussi par la comparaison de nos observations avec celles
d'Hevelius.

Nous avons déjà remarqué dans les Memoires de
1706. que cet Astronome a observé l'Etoile de l'Hydre.
Voici comme nous l'avons reconnu. Il prit la distance
entre l'Etoile qui est dans le genou du Serpentaire , &
une troisième qui est dans la queue de l'Hydre , & trouva
cette distance de $46^{\circ}. 20'. 45''$. Il observa aussi la distan-
ce entre la même Etoile de l'Hydre & la Luifante du col
du Serpent de $44^{\circ}. 14'. 15''$. Par le moyen de ces deux di-
stances , & de celle que nous avons calculé entre les deux
Etoiles du Serpentaire & du Serpent , en supposant la
longitude & la latitude de ces deux Etoiles telle qu'elle
résulte de nos observations , nous avons calculé la lon-
gitude de la troisième Etoile de l'Hydre pour l'année

1701. en $25^{\circ} 17'$. de Libra , & sa latitude Meridionale de $12^{\circ} 41'$. Par nos observations nous avons trouvé la longitude de l'Etoile changeante de l'Hydre pour la même année 1701. en $25^{\circ} 32'$. de Libra , & sa latitude Meridionale de $12^{\circ} 49'$. Ces deux différentes observations donnent la même latitude de l'Etoile à 8. minutes près , quoique la longitude differe de $15'$. Cette difference peut venir en partie de la différente maniere dont on s'est servi pour déterminer cette situation ; c'est pourquoi elle ne doit pas empêcher de supposer que ce soit la même Etoile , d'autant plus qu'il n'y en a point d'autres en cet endroit du Ciel qu'on puisse prendre pour celle-ci.

Hevelius l'observa le 18. & le 19. Avril de l'an 1662. & la trouva de la cinquième grandeur. Comme nous n'avons que cette observation faite dans la même année , & que l'on ne sçait point si l'Etoile augmentoit ou si elle diminuoit , on peut supposer qu'elle n'étoit pas éloignée du milieu de son apparition , puisqu'elle approchoit de la grandeur où elle a coûtume d'être dans son plus grand éclat. Il est à remarquer que cette observation tombe aussi dans le mois d'Avril , comme il est arrivé à celle de Montanari & aux deux nôtres faites en 1704. & en 1708. ce qui est une nouvelle preuve que la période de l'Etoile qui doit ramener ces phases est composée d'années entieres.

Entre l'observation d'Hevelius qui est la plus ancienne que nous ayons , & celle de Montanari de 1670. il y a un intervalle de 8. années qui peut également comprendre quatre périodes de deux années chacune , ou deux périodes de 4. Mais on vient à exclure cette dernière par la comparaison de nos observations avec celle d'Hevelius, comme nous avons trouvé par l'observation de Montanari. Car entre celle de 1662. & les nôtres de 1704. & 1708. il y a deux intervalles dont le plus court est de 42. l'autre est de 46. ans , lesquels ne comprennent pas un nombre entier de périodes de quatre années ; mais le

38 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
même intervalle de 46. ans est divisible par deux ans, qui est la période que nous supposons de l'Etoile.

Nous n'avons point trouvé d'autre période plus propre que celle - cy à représenter toutes les observations que nous avons jusqu'à présent : elle accorde ensemble les observations d'Hevelius, celle de Montanari & les nôtres, en supposant qu'entre celle d'Hevelius & de Montanari il y ait 4. périodes de deux années chacune ; qu'entre celle de Montanari & les nôtres de 1704. il y ait 17. périodes, & entre celle d'Hevelius & la nôtre de 1708. il y ait 23. périodes chacune de deux ans. Il est vrai que cette hypothèse représente deux fois l'Etoile dans sa plus grande phase, lorsque par nos observations elle n'étoit pas visible : car elle ne parut point au mois d'Avril de l'année 1702. lorsque par l'hypothèse elle devoit être de la quatrième grandeur. En 1706. elle ne fut visible qu'avec la Lunete, & nous cessâmes de la voir avec cet instrument dans le temps auquel suivant la révolution de deux ans, elle devoit augmenter.

Ces différences que nous trouvons entre l'hypothèse & les observations ne sont pas sans exemple dans les deux Etoiles de la Baleine & du Cigne, qui sont sujettes à changer tous les ans de grandeur apparente. On a observé que l'Etoile de la Baleine dans sa plus grande clarté est égale quelquefois aux Etoiles de la seconde grandeur. On a remarqué aussi que lorsqu'elle est plus belle, elle n'est guère plus grande que les Etoiles de la quatrième grandeur. L'Etoile qui est dans le col du Cigne paroît le plus souvent dans sa plus grande phase de la quatrième grandeur, & quelquefois elle n'a paru que foiblement. L'Etoile de l'Hydre peut être sujette à des variations semblables & encore plus grandes, qui la rendent invisible dans le temps que suivant la période ordinaire elle devoit paroître plus belle.

Quoiqu'après un grand nombre de révolutions l'Etoile retourne à la même phase dans le même mois de l'année,

cela n'arrive pas si précisément que dans un retour à l'autre il n'y ait eu quelque différence. En 1704. au commencement du mois de Mars lorsque nous aperçûmes cette Etoile, elle paroissoit déjà de la quatrième grandeur; au lieu que vers la fin de Mars de 1708. elle n'étoit pas encore visible, ce qui fait voir que ce dernier retour avoit retardé de plus d'un mois l'apparition de 1704.

Les changemens que nous observons dans l'Etoile de l'Hydre, & dans celles du Cigne & de la Baleine, peuvent servir à expliquer des observations anciennes de quelques Etoiles qu'on rapporte avoir paru en differens temps.

Leoviccius dit qu'on trouve dans les Histoires qu'en 945. du temps d'Oton premier Empereur, on observa dans la Constellation de Cassiopée une nouvelle Etoile semblable à celle qui parut de son temps en 1572. & qui est si celebre par les observations & les écrits de tant d'Astronomes. Il ajoute qu'on trouve un témoignage encore plus authentique, qu'en 1264. on vit dans la partie Septentrionale du Ciel autour de la Constellation de Cassiopée, une Etoile grande & luisante sans chevelure, & qui n'avoit point de mouvement propre. Reisfarcherus qui ne doute point de la verité de ces observations, est porté à croire que l'Etoile qui parut dans le treizième siecle, est la même que la celebre de l'an 1572. qui parut de son temps, & il est du sentiment de ceux qui supposent que l'Etoile de Cassiopée n'est pas nouvelle, mais qu'elle étoit aussi ancienne que les autres, & qu'elle se faisoit voir de temps en temps, & disparoissoit dans la suite.

Tycho n'est pas du sentiment que l'Etoile ait paru plusieurs fois: Une des raisons qu'il apporte est qu'on auroit observé plusieurs retours de cette Etoile depuis tant de siecles, si elle avoit été aussi ancienne qu'on la suppose. Il dit aussi qu'on auroit pû voir plusieurs fois cette apparition & occultation en quelques autres Etoiles. Mais ce qui ne s'étoit pas encore aperçû du temps de Tycho paroît présentement tous les ans, & si ce grand Astronome

40 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
avoit eu comme nous l'exemple de ces Etoiles qui changent de grandeur apparente, & qui paroissent & disparaissent, peut-être qu'il auroit été plus porté à suivre ce sentiment, & à croire que l'Etoile de Cassiopée pouvoit avoir paru en d'autres temps, & se rendre encore visible.

Cuspinien rapporte que l'an 339. de J. C. il parut une Etoile de la grandeur de Venus dans la Constellation du Cigne, qui disparut trois semaines après. C'est aussi dans la même Constellation qu'on a vû le siecle passé paroître & disparaître deux fois les celebres Etoiles de la poitrine & du bec, outre celle qui varie tous les ans dans le col de la même Constellation du Cigne.

On observe depuis quelque temps un grand nombre d'autres Etoiles qui sont sujettes à des changemens, quoiqu'on ne sçache point encore si ces changemens ont des periodes réglées. Outre celles dont nous avons déjà parlé à l'Academie, nous en avons remarqué d'autres depuis, dont nous répéterons ici les plus considerables.

On ne voit point l'Etoile de la fixième grandeur que Bayer marque dans la poitrine du Lion par la lettre (*i*).

Immédiatement au-dessous de la main australe de la Vierge, Bayer place deux Etoiles, une de la cinquième grandeur, l'autre de la fixième. Celle de la cinquième grandeur se trouve dans le même état; mais on ne voit plus même avec la Lunete celle de la fixième grandeur, qui étoit un degré plus Méridionale.

Riccioli donne la situation d'une Etoile de la fixième grandeur, qui la place dans la cuisse boreale de la Vierge. Elle n'avoit point été marquée par Bayer, & elle ne paroît plus présentement.

On ne distingue plus depuis quelques années aucun vestige de l'Etoile de la fixième grandeur, que Bayer avoit marqué dans la Balance Occidentale au 12. degré, & un tiers du Scorpion avec une latitude Septentrionale de trois degrés.

Tycho & Bayer avoient trouvé une Etoile de la quatrième

trième grandeur dans le bassin Oriental de la Balance. Hevelius ne la marque point, & dit qu'elle avoit disparu; cependant nous l'avons apperçûe depuis près de 15. ans, moindre à la verité que Tycho & Bayer ne l'avoient trouvée, mais plus belle que les deux plus prochaines qu'Hevelius marque un degré & demi plus à l'Occident.

L'Etoile de la quatrième grandeur que M. Cassini découvrit proche de la Constellation du Lièvre, paroît encore dans le même état.

M. Cassini & M. Halley avoient observé que l'Etoile de la troisième grandeur qui est dans la cuisse postérieure du Sagitaire avoit disparu. Quoique nous l'ayons cherchée plusieurs fois, nous n'avons pû l'appercevoir que depuis dix ans qu'elle paroît à la vûe simplé de la sixième grandeur; & étant vûe avec la Lunete, elle est composée de deux Etoiles éloignées entr'elles de 35. minutes en latitude.

On pourra verifiser dans la suite des temps si ces changemens & ceux que l'on observe depuis plusieurs années dans un grand nombre d'Etoiles fixes, ont quelque période réglée. On pourra aussi remarquer s'il n'y a point d'autres Etoiles sujettes à des variations.

Il seroit nécessaire d'avoir des Cartes celestes faites sur des nouvelles observations, où toutes les Etoiles visibles à la vûe simples fussent marquées. Il faudroit comparer souvent ces Cartes avec le Ciel, reconnoître chaque Etoile en particulier, & en marquer la conformité ou la différence.

Il y a apparence que l'Etoile de l'Hydre a toujours eu les mêmes changemens qu'on y observe présentement. On peut dire la même chose des Etoiles de la Baleine & du Cigne. Cependant le grand nombre de siècles qui se sont passez avant qu'on les ait apperçûs nonobstant les observations de tant d'Astronomes, fait assez voir la difficulté de les découvrir,

REFLEXIONS ET EXPERIENCES
SUR LE SUBLIME CORROSIF.

PAR M. LEMERY.

1709.
53. Février.

LA méthode ordinaire de préparer le Sublimé corrosif est, comme tout le monde le sçait, de faire un mélange exact de parties égales de mercure, de vitriol desséché, & de sel décrepité : de pousser le mélange par le feu dans un matras, jusqu'à ce qu'il se soit élevé une belle matiere très-blanche & très-cristaline, qui est le Sublimé corrosif.

Le mercure de lui-même n'est point corrosif, il faut que le Sublimé ait pris sa corrosion des pointes acides du sel & du vitriol qui s'y sont attachées. Ces pointes pour bien exercer leur corrosion, doivent s'être attachées autour de chacune des petites boules du mercure, & former comme autant de petits herissons, qui excitez par la chaleur de la chair où ils ont été portez, roulent & déchirent ce qu'ils rencontrent.

Il me semble donc indubitable que la corrosion du Sublimé ordinaire vient des acides du sel & du vitriol ; je crois l'avoir démontré dans mon cours de Chimie : Mais il y a plusieurs années qu'en travaillant sur le mercure, je m'appercûs qu'on pouvoit faire du Sublimé corrosif avec du mercure & du sel seul, sans y ajouter de vitriol. Je n'eus pas le temps alors de faire toutes les experiences necessaires pour reconnoître les différences que ce Sublimé pourroit avoir avec le commun ; mais j'ai trouvé à propos présentement d'y travailler, & pour cet effet j'ay commencé par la préparation du Sublimé corrosif sans vitriol.

J'ay mêlé exactement quatre onces de mercure crud avec huit onces de sel décrepité & bien pulvérisé : j'ay mis le mélange dans un matras, & je l'ay poussé par un feu de charbon assez fort pendant quatre heures, il s'y est fait un Sublimé : j'ay laissé refroidir les vaisseaux, & je l'ay séparé du matras en le cassant : le Sublimé pesoit quatre onces, il étoit plus matte & moins blanc que le commun, il n'y paroïssoit aucunes aiguilles, & il approchoit plus en figure du Sublimé doux, que du Sublimé corrosif, il étoit aussi moins volatil ; car il ne s'élevoit point si fort au nez, & ne faisoit point éternuer comme l'autre quand on le remuoit : d'ailleurs pour son action sur les chairs, il m'a paru un peu moins corrosif que le commun, & il n'y a point fait une si grande douleur : la raison en est apparemment, parce qu'étant privé de l'acide sulphureux du vitriol, ses parties ont moins de mouvement & d'activité.

La masse restée au fond du matras étoit dure, compacte, pesante, de couleur rougeâtre. J'ai fait sur ce Sublimé préparé sans vitriol les expériences qu'on fait sur l'autre : j'y ay mis une goutte d'huile de tartre, il a jauni d'abord : j'en ay fait dissoudre dans de l'eau, & j'ay divisé la dissolution en plusieurs portions : sur une j'ay versé un peu d'esprit de sel armoniac volatil, il s'est fait du précipité blanc : sur une autre j'ay versé de l'huile de tartre, il s'y est fait du précipité rouge. J'ai divisé cette dernière liqueur en deux portions : sur une j'ay versé de l'esprit de sel armoniac, le précipité qui étoit d'un rouge orangé est devenu blanc : sur l'autre j'ai versé de l'eau forte, le précipité a disparu parce qu'il a été dissous, & la liqueur est redevenue claire & transparente comme elle étoit avant les précipitations : j'ay fait aussi de l'eau jaune ou phagedénique, en mêlant un peu de ce Sublimé corrosif avec de l'eau de chaux.

J'ay mis en distillation un mélange de deux onces de ce Sublimé avec une once & demie d'antimoine ordinaire, j'en ay retiré par un petit feu cinq dragmes d'un

beure d'antimoine plus condensé & plus dur que le commun : j'en ay fait dissoudre une partie dans de l'esprit de nitre, il s'y est fait une grande ébullition, & j'en ay fait un bezoard mineral semblable au commun.

J'ay mis tremper l'autre partie de ce beure d'antimoine dans de l'eau tiède, il s'y est fait une poudre d'Algaroth bien blanche, & la lotion a été aussi acide que l'esprit de vitriol philosophique ordinaire : je n'ay pas pû même distinguer entre les deux aucune difference pour le goût.

J'ay fait dulcifier une autre partie de mon Sublimé fait avec le mercure & le sel seul sans vitriol : j'ay pulvérisé ce Sublimé dans un mortier de verre, & j'y ay voulu incorporer ou faire recevoir les trois quarts de son poids de mercure crud, comme on a coûtume de faire quand on veut préparer le Sublimé doux ordinaire ; mais il n'a pû en prendre guère davantage que la moitié de son poids, le reste est demeuré coulant, ou s'est séparé dans les sublimations, ce qui vient apparemment de ce que ce Sublimé ne contient pas tant d'acides que l'autre ; car ce sont les acides qui envelopent le mercure crud en cette occasion, & qui le rendent en poudre grise. Quoiqu'il en soit, j'ay saoulé mon Sublimé de mercure, & je l'ay fait sublimer trois fois dans des matras, j'ai eu un Sublimé fort doux & semblable au commun, excepté qu'il est un peu moins blanc. Il a été aussi bien adouci par une médiocre quantité de mercure crud qu'il a prise ou absorbée, que le Sublimé corrosif ordinaire l'est par une plus grande, parce qu'il en a reçu autant qu'il en pouvoit contenir ; car c'est cette addition de mercure qui fait la dulcification du Sublimé.

J'ay trouvé au fonds du matras après chaque sublimation, une petite quantité de matiere légère rougeâtre salée ; ce n'étoit qu'une portion de sel marin que le Sublimé corrosif avoit élevée avec lui, & qui s'est séparé.

Selon ces experiences il semble assez inutile d'employer le vitriol dans la composition du Sublimé, puisqu'on en

fait bien avec le sel & le mercure seuls, & que ce Sublimé réussit à toutes les opérations qu'on fait sur l'autre : mais quand on a besoin particulièrement d'une forte corrosion dans le Sublimé, il vaut mieux le faire en la manière ordinaire.

J'ay voulu voir par curiosité si le sel resté au fond du matras après la sublimation du Sublimé corrosif, telle que je viens de la décrire, seroit encore capable de servir à faire d'autre Sublimé : mais auparavant que de procéder à cette expérience, j'ay purifié ce sel par la manière ordinaire, qui est la dissolution, la filtration & la cristallisation : on en a séparé beaucoup de terre, il a paru étant cristallisé semblable au sel marin, de la même figure & du même goût. Je l'ay calciné, le jettant peu à peu dans un creuset rougi au feu, il n'a fait aucun petillement ni décrepitation. Il n'a point été alkali avec l'esprit de vitriol, mais il a bouillonné comme le sel marin ordinaire avec l'huile de vitriol. J'ai mêlé trois onces de ce sel bien pulverisé dans un mortier de verre avec une once & demie de mercure crud, remuant exactement le mélange jusqu'à ce qu'il ne parût plus aucunes boulettes du vis-argent : j'ay eu une poudre grise brune que j'ay mise dans un matras, & que j'ay essayé de faire sublimer par un grand feu comme la précédente ; mais il n'est monté qu'un peu de poudre noirâtre mêlée avec des petites boules de vis-argent, & tant soit peu d'une matière blanche qui ne m'a point paru assez âcre pour être appelée Sublimé corrosif. Le sel qui est demeuré au fond du matras étoit d'un blanc grisâtre.

Je conclus de cette dernière expérience que le sel qui a une fois servi à la préparation du Sublimé, n'est plus en état de servir à en faire d'autre. La raison qu'on en peut donner, & qui me semble probable, est que les acides les plus volatils & les plus aisez à détacher de la masse du sel ayant été mêlez & enlevez avec le mercure dans la première sublimation, il n'en reste plus assez pour une seconde, ou bien ceux qui y restent sont trop pesants pour

être acrochez avec le mercure. Quoiqu'un pareil raisonnement m'eût fait prédire avant l'opération ce qui arriveroit, je n'ay pas laissé de faire l'expérience afin d'être plus assuré du fait; car les raisonnemens seuls trompent souvent.

Pendant que j'étois sur cette matiere j'ay pris occasion de faire sublimer une préparation de mercure, qui approche en composition du Sublimé dont je viens de parler, car elle est principalement composé de mercure & de sel; c'est le Précipité blanc, qui a été précipité par de l'eau salée en la maniere ordinaire. Il est à remarquer qu'encore qu'on ait bien lavé ce Précipité avec de l'eau douce après l'avoir séparé de l'eau-forte, il a retenu toujours une portion des sels avec lesquels on a fait la précipitation, ce que j'ay prouvé ailleurs: ainsi ce Précipité blanc tient envelopée une portion de sel marin, qui lui donne une disposition propre à être Sublimé en la maniere du Sublimé doux.

J'ay donc mis sublimer dans un petit matras au feu de sable, deux onces de mercure précipité blanc, il s'est élevé avec facilité, & j'ay eu un Sublimé doux par cette seule sublimation; mais pour l'adoucir encore davantage, j'en ay fait une seconde: j'ay cassé le vaisseau, & j'ay remis la matiere sublimer comme devant dans un autre matras, j'ay eu un Sublimé fort doux semblable au commun, & qui n'a rien retenu de la qualité vomitive du Précipité blanc. Il a pesé une once cinq dragmes & demie, & il s'est séparé dans les deux sublimations au fond des matras une poudre légère, jaune, salée, pesant une dragme: il ne s'est donc dissipé qu'une dragme & demie de la matiere dans toute l'opération. La poudre légère qui étoit tombée au fond du matras provenoit du sel qui étoit demeuré dans le Précipité blanc; c'étoit apparemment ce sel qui contribuoit à exciter son action vomitive, puisqu'étant détaché, le mercure n'a plus été vomitif.

Comme il est démontré que le Sublimé corrosif peut être préparé avec le sel seul sans vitriol, on pourroit soup-

onner qu'il s'en pourroit faire aussi avec le vitriol & le mercure seuls sans addition de sel. J'en ay tenté l'expérience, j'ai mêlé exactement dans un mortier de marbre quatre onces de mercure avec huit onces de vitriol bien desséché en blancheur : j'ay mis le mélange dans un matras, & je l'ay poussé par un grand feu de charbon en la maniere ordinaire, & même plus long-temps, car j'y ay employé sept ou huit heures : il ne s'en est élevé qu'une très-petite quantité de fleurs jaunâtres qui ont tapissé le haut du matras, & qui ne procedoit que de la partie sulfureuse du vitriol. Il m'est demeuré au fond du vaisseau une masse pesante rouge comme du Colcothar ordinaire; elle contient encore le mercure que j'y avois mis, je le revivifieray quand je voudray. Il me paroît donc impossible de faire du Sublimé corrosif avec du vitriol & du mercure seuls.

DE LA PROPORTION

Que doivent avoir les Cilindres pour former par leurs sons les accords de la Musique.

PAR M. CARRE'.

PROPOSITION GENERALE.

LEs Cilindres pleins ou solides dont les sons forment des accords de la Musique, sont en raison triplée & inverse de celle des nombres qui expriment ces accords.

Soient par exemple deux Cilindres, dont les diametres des bases & les longueurs soient comme 3. à 2. il est clair que leurs soliditez seront dans la raison de 27. à 8. qui est la raison triplée de 3. à 2. Je dis que les sons de ces deux Cilindres formeront la Quinte qui s'exprime par ces deux nombres, & que le plus gros & le plus long fera le son

1709.
16. Février

48 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
grave, & le plus petit fera le son aigu. Il en est ainsi des
autres.

Ce n'est que par l'expérience & en tâtonnant que j'ay
découvert ce rapport, qui est fort éloigné de celui que
gardent les cordes entr'elles pour faire les accords de la
Musique. Ce qui m'a donné occasion de le chercher,
c'est que je suis dans ce sentiment, que la cause immédia-
te du son se tire des tremblemens de chaque petite partie
dont les cordes sont composées, & du mouvement d'on-
dulation de la partie frappée jusqu'aux extrémités de ces
cordes; & que leurs vibrations totales ne servent qu'à
augmenter la force du son & sa durée, ainsi que je croi
l'avoir prouvé dans le Traité du Son que j'ai lû à l'Aca-
demie. Or considérant que la tension des cordes doit faire
beaucoup de changement dans les tremblemens de leurs
parties ou dans leurs sons, il me paroissoit que les Cilind-
res, qui n'étoient pas susceptibles de cette tension, ne
devoient pas garder le même rapport entr'eux pour for-
mer les mêmes accords que les cordes. J'ay donc fait faire
avec le plus d'exaëtitude qu'il m'a été possible, plusieurs
Cilindres qui gardent des rapports réglez tant dans leurs
grosseurs que dans leurs longueurs, & après en avoir fait
plusieurs expériences, j'ay toujours trouvé que lorsque
leurs soliditez étoient dans le rapport proposé, ils for-
moient assez exactement les accords de la Musique: ce
qui s'accorde avec le raisonnement, comme on le va voir.
Mais auparavant il est bon de remarquer qu'il y a plu-
sieurs manieres de faire des Cilindres dont les soliditez
soient en raison triplée. Car, par exemple, si l'on veut fai-
re que deux Cilindres soient en raison triplée de 3 à 2. 1°.
L'on peut faire les diamètres de leurs bases comme $\sqrt{3}$ à
 $\sqrt{2}$, & leurs longueurs comme 9 à 4; donc leurs soliditez
seront comme 27 à 8; d'où l'on voit que leurs surfaces
seront en raison composée de $\sqrt{3} \times 9$ à $\sqrt{2} \times 4$ ou comme
 $\sqrt{243}$ à $\sqrt{32}$, qui est un rapport incommensurable. 2°. Si
leurs bases sont égales, & que leurs longueurs soient
comme 27 & 8, qui sera aussi le rapport de leurs surfaces.
3°. Si

3°. Si leurs longueurs étant égales, les diametres de leurs bases sont comme $\sqrt{27}$ à $\sqrt{8}$, qui sera aussi le rapport de leurs surfaces, qui est encore incommensurable. 4°. Enfin si les diametres de leurs bases & leurs longueurs sont dans la raison de 3 à 2; donc leurs surfaces seront comme 9 à 4. Or comme il n'y a que les Cilindres qui sont dans ce dernier rapport qui forment des accords justes, on peut prendre pour regle generale que leurs surfaces doivent être dans la raison doublée & inverse des sons, & leurs longueurs dans la raison simple de ces mêmes sons.

Afin donc de prouver par le raisonnement cette Proposition generale, je considere que le *grave* & l'*aigu* des sons dans les corps de même matiere, se tire du mouvement d'ondulation qui se fait dans toute la surface du corps sonore, comme je croi l'avoir fait voir clairement dans mon Traité du Son : D'où il semble d'abord que les Cilindres de même grosseur, & doubles en longueur devroient faire l'Octave, c'est-à-dire qu'il devroit y avoir dans le petit deux mouvemens d'ondulation, tandis qu'il n'y en a qu'un dans le grand, puisqu'il faut une fois plus de tems pour parcourir la longueur du grand, que pour parcourir celle du petit : mais si l'on considere que ce n'est pas seulement à la longueur des Cilindres qu'il faut avoir égard, pour juger des sons qu'ils doivent rendre, mais aussi à leur grosseur; l'on verra que cela ne doit pas arriver : car quand on frappe une partie dans la surface d'un Cilindre, le mouvement qu'on lui imprime se communique non-seulement en longueur jusqu'aux extremités de ce Cilindre, mais aussi en parcourant circulairement toute la surface, comme l'experience le fait connoître, puisque si l'on suspend horizontalement un Cilindre par le moïen de deux épingles mises à ses extremités, & qu'on pose de petits morceaux de papiers sur differens endroits de sa surface, on les verra trembler tres-sensiblement, dans quelque point qu'on frappe le Cilindre : ce qui confirme le sentiment que l'on a, que ce ne sont pas

les vibrations totales des corps sonores qui sont la cause immédiate du son, mais les tremblemens de leurs petites parties, & le mouvement d'ondulation. Il faut donc que les circonferences de deux Cilindres qui forment un accord de Musique soient dans le même rapport que leurs longueurs, afin que leurs ondulations se fassent dans le même tems, autrement l'ordre des tremblemens ou sons seroit troublé. C'est ce qui arrive par exemple lorsque les Cilindres sont de même grosseur & de longueur inégale: car alors les ondulations circulaires se font en tems égal, & celles qui se font suivant la longueur, s'achèvent dans des tems qui sont comme les longueurs: Il en est de même des Cilindres égaux en longueur, mais dont les diametres sont inégaux; puisque les ondulations suivant la longueur se font en tems égal, & que les circulaires se font dans des tems qui sont comme les circonferences; ainsi ces tremblemens ne s'accordant pas, l'ordre des sons doit être troublé. Il est donc évident qu'afin que les Cilindres fassent les accords de la Musique, il faut que leurs soliditez gardent le rapport proposé. *Ce qu'il falloit prouver.*

L'on pourroit demander ici pourquoi les cordes qui forment des accords, ne sont pas dans le même rapport que les Cilindres, puisqu'elles sont elles-mêmes de petits Cilindres: Mais la réponse est facile; c'est que pour faire sonner les cordes, il faut les bander; ce qui cause de grands changemens dans leurs tremblemens & ondulations: car non-seulement cela rend ces tremblemens plus prompts, parce que leurs parties sont plus en ressort; mais aussi en les sonnant, on leur fait faire des vibrations totales qui ne se rencontrent pas dans les Cilindres, ce qui doit encore faire beaucoup de changemens dans leurs sons. A quoi l'on pourroit ajouter que le diametre des cordes est si petit par rapport à leur longueur, que l'oreille ne sçauroit s'apercevoir de cette difference qui se trouve dans les Cilindres: & peut-être que le son seroit beaucoup plus beau, si les cordes qui forment des ac-

cords avoient leurs diametres ou circonferences dans la raison de leurs longueurs.

D'où il faut conclure que l'on ne doit point comparer les cordes aux Cilindres, puisqu'ils ne sont point susceptibles d'extension ; & afin de connoître si l'on en doit faire quelque comparaison, il m'a paru, après avoir examiné les sept différentes manieres dont deux cordes peuvent se combiner pour faire un accord de la Musique par rapport à leur longueur, grosseur & tension, & dont je donne des démonstrations dans mon Traité des cordes ; il m'a paru, dis-je, que ce ne doit être qu'entre celles qui sont de même grosseur ou de même diametre, parce qu'étant bandées par des poids ou des forces égales, elles doivent avoir leurs longueurs dans le rapport des nombres qui expriment l'accord qu'elles forment, & que ce rapport est le plus simple. Et si l'on vouloit sçavoir à peu près les changemens que la tension peut apporter aux sons des cordes, il faudroit prendre la plus grosse corde de métal qui se puisse faire, & la bander seulement jusqu'à ce qu'elle rende un son dont on puisse juger : ensuite faire un Cilindre de même métal, & d'égale longueur & grosseur, & voir quel est l'accord qu'ils forment ensemble. mais cela seroit difficile à exécuter, parce que le Cilindre seroit d'un si petit diametre, qu'on auroit de la peine à juger du son qu'il rendroit.

Ces raisonnemens sont confirmez par les expériences suivantes. Je ne me suis pas contenté de mon oreille, n'étant pas assez exercé dans ces sortes de matieres ; mais je les ai faites avec M. Blanchet Façteur de Clavecin & d'Epinettes, qui passe pour un de ceux qui accorde le mieux ces sortes d'Instrumens.

I. J'ai fait faire quatre Cilindres de bois de Hestre *A*, *B*, *C*, *D* pris du même morceau, & qui ne different qu'en longueur ; car les diametres de leurs bases sont de 15 lignes chrcun, & leurs longueurs sont entr'elles comme ces nombres 4, 3, 2, 1 ; c'est à dire que *A* est de quatre pieds, *B* de trois, *C*, de deux, & *D* d'un pied de long. Or

files rapports des sons de ces Cilindres étoient les mêmes que ceux des cordes : qui gardent la raison inverse des longueurs, *A* & *B* feroient la Quarte ; *B* & *C* la Quinte ; *C* & *D* ou *A* & *C* l'Octave ; *B* & *D* la Douzième ou la replique de la Quinte ; *A* & *D* la Quinzième ou la double Octave. Mais voici ce que l'expérience a donné.

Ayant accordé un Clavecin , & mis le son fondamental au ton ordinaire qui est celui de l'*Opera* ; on a sonné le Cilindre *A*, & l'on a trouvé qu'il étoit à l'unisson avec le *G Re Sol* du Clavecin, qui est une Quarte plus bas que le *C Sol VT* fondamental de l'accord : Ensuite sonnant le Cilindre *B*, on a trouvé qu'il étoit à l'unisson de la touche ou corde *A Mi La* en dessus ; de sorte que ces deux Cilindres faisoient entr'eux le ton mineur *SOL LA*, ce qui est fort éloigné de la Quarte.

L'on a trouvé le Cilindre *C* à l'unisson du *C Sol VT* fondamental ; d'où l'on voit que *A* & *C* faisoient la Quarte *SOL VT*, & *B* & *C* faisoient une Tierce mineure *LAVT*.

Pour le Cilindre *D*, on l'a trouvé à l'unisson avec la corde *F Vt Fa*, qui est la Quarte au-dessus de l'*VT* fondamental : Donc *A* & *D* font une Septième majeure *SOL FA* ; *B* & *D* une Sixte mineure *LA FA* ; & *C* & *D* la Quarte *VT FA*. Et quoique *A* & *C*, *C* & *D* qui sont dans le même rapport, fassent la quarte ; on ne voit pas que ces Cilindres gardent aucune regle certaine pour former des accords.

II. J'ai fait trois autres Cilindres *E*, *F*, *G* du même morceau de bois que les quatre premiers, chacun de deux pieds de longueur ; lesquels étant joints au Cilindre *C*, ont leurs grosseurs en même raison que ces nombres 4, 3, 2, 1. Ce qui est facile à faire : car si l'on prend par exemple le rayon du Cilindre *E* égal à la soutendante du quart de cercle qui sert de base au Cilindre *C*, il est clair que la grosseur du Cilindre *E* fera double de celle du Cilindre *C*, dont le diametre est de 15 lignes : Donc le diametre de *E* est d'un pouce neuf lignes, ou de 21 lignes & un peu

plus. Il en est ainsi des autres. D'où l'on peut tirer cette conclusion, que si le rapport des sons de ces Cilindres étoit le même que celui des cordes qui ne diffèrent que par leurs grosseurs, ils ne devroient faire aucun accord, puisque ces sons seroient en raison réciproque des diamètres, & que les nombres qui expriment ce rapport sont incommensurables. Voici ce qu'on a trouvé par l'expérience.

Ayant sonné d'abord le Cilindre *E*, on l'a trouvé à l'unisson de la corde *VT* *dieſe* du son fondamental du Clavecin : mais par ce qu'on a dit ci-dessus, le Cilindre *A* faisoit la Quarte en dessous de l'*VT* fondamental, qui est un son beaucoup plus grave. Donc ces Cilindres font entr'eux la Quinte diminuée, qui est un faux accord. Car quoique leurs soliditez soient en raison d'égalité, la longueur de l'un récompensant la grosseur de l'autre, leurs surfaces sont incommensurables. Que si l'on compare le Cilindre *E* avec *C* qui étoit à l'unisson de l'*VT* fondamental, on trouvera que leurs sons font un semi-ton mineur, qui est aussi un faux accord. Sur quoi l'on peut remarquer que quoique ces deux Cilindres soient dans le même rapport que *A* & *C* qui sont entr'eux comme 2 à 1, ils font cependant des accords fort differens ; mais aussi les uns different par leurs longueurs seulement, & les autres par leurs grosseurs.

Si l'on compare le Cilindre *E* au Cilindre *B*, on verra qu'ils font le faux accord *LA* *VT* *dieſe* en montant, qui diffère de plusieurs tons de celui que *A* & *B* font ensemble, quoiqu'ils soient dans le même rapport de 4 à 3 : mais ceux-ci ne different que par leurs longueurs ; au lieu que *E* & *B* different par leurs longueurs & grosseurs.

Les Cilindres *E* & *D* font encore un faux accord *VT* *dieſe* *FA*, qui est fort different de la septième majeure *SOL* *FA* que *A* & *D* font ensemble, quoique ces Cilindres soient dans le même rapport de 4 à 1. Mais *E* & *D* different par leurs longueurs & grosseurs ; au lieu que *A* & *D* ne different que par leurs longueurs.

On a ensuite sonné le Cilindre *F*, & on l'a trouvé à l'unisson avec la touche *FVTFA diese* distant du son fondamental de l'*VT* au *FA diese*: D'où l'on voit qu'il doit faire avec le Cilindre *A* le faux accord *SOLFA diese* en montant qui est une Septième majeure & un Semi-ton; on suppose que l'on commence par le son de *A*. Or ces Cilindres ont leurs soliditez en raison de 4 à 1, parce que le rayon du Cilindre *A* est égal à la sous-tendante du quart de cercle qui sert de base au Cilindre *F*, & ce rapport est le même que celui des Cilindres *A* ou *E* au Cilindre *B*; cependant leurs accords sont fort differens, car on a trouvé que *A* & *D* faisoit une Septième majeure *SOLFA*, & *E* & *D* une Tierce & un Semi-ton mineur *VTDieseFA*; mais aussi *A* & *D* ne different que par leurs longueurs, au lieu que *A* & *F*, *E* & *D* different par leurs longueurs & grosseurs.

Si l'on compare le Cilindre *F* avec ceux dont on a parlé, on trouvera, 1°. Qu'il fait avec *B* le faux accord *LAFADiese* qui est une Sixte mineure plus un Semi-ton, ce qui est un peu different de l'accord que *B* & *D* ont fait entr'eux, quoique leurs soliditez soient dans le même rapport de 1 à 3; mais c'est qu'ils ne different que dans leurs longueurs, au lieu que *F* & *B* different aussi dans leurs grosseurs.

2°. Que ce Cilindre fait *C* avec le faux accord *VTFADiese* qui est une Quarte plus un Semi-ton mineur. Leur rapport qui est de 1 à 2, est le même que celui des Cilindres *C* & *A*, ou *C* & *E*, quoique leurs accords soient assez differens; mais les uns different par leurs grosseurs, au lieu que les autres different par leurs longueurs.

3°. Que ce même Cilindre *F* fait avec *D* un Semi-ton mineur *FAFADiese*: & quoiqu'ils soient dans le même rapport que *E* & *A*, leurs accords sont tres-differens, puisque ces deux derniers sont une Quinte diminuée; ce qui vient des differens rapports qui composent leurs soliditez

4°. Il fait avec *E* une Quarte *VTDieseFADiese*: ce qui

est encore different des accords de $F \& A$, de $D \& A$, & de $D \& E$ qui sont dans le même rapport de 1 à 4 que $F \& E$, dont la raison est la même que ci-dessus.

L'on a enfin sonné le Cilindre G qui est au Cilindre F comme 1 à 2, parce que le rayon du Cilindre F est égal à la soutendante du quart de cercle qui sert de base à G , & on a trouvé qu'il étoit à l'unisson avec le *SOL diese* du Clavecin au-dessus de l'*VT* fondamental : Donc ces deux Cilindres F, G font un ton *FA diese SOL diese*; & cet accord est fort different de ceux que font entr'eux A, C ; C, F ; E, C qui sont dans le même rapport de 2 à 1.

D'où l'on voit, 1°. Que $A \& G$ font l'accord *SOL SOL diese* qui est plus d'une Octave, qui devroit se trouver juste, puisqu'ils sont dans le rapport exprimé dans la Proposition générale; mais il y a des cas où il est bien difficile de déterminer exactement les sons des Cilindres, sur tout lorsqu'ils sont fort longs, comme A .

2°. Que $E \& G$ qui sont dans le rapport de 8 à 1 aussi bien que les deux precedens, font l'accord *VT diese SOL diese* qui est une Quinte, quoique leurs surfaces soient dans le rapport de $\sqrt{8}$ à 1, qui est incommensurable.

3°. Que $B \& G$ font l'accord *LASOL diese*, qui est près d'une Octave. Leurs soliditez sont dans la raison de 6 à 1; & leurs surfaces comme 3 à 1.

4°. Que $G \& C$ qui sont comme 1 à 4, font l'accord *VT SOL diese*. Les Cilindres $F \& E$, $F \& A$, $D \& E$, $D \& A$ font des accords fort differens, quoiqu'ils aient leurs soliditez dans le même rapport.

5°. Que $D \& G$ qui sont dans le rapport de 2 à 1, font l'accord de *FA SOL diese*, qui est encore different de ceux que forment entr'eux les Cilindres F, G ; C, E ; C, A ; G, F , quoiqu'ils soient aussi dans le même rapport.

III. J'ai fait faire cinq autres Cilindres H, I, K, L, M de bois de Merisier qui est un des plus sonores, dont le premier H a pour base un cercle de 16 lignes de diametre, & qui a 16 pouces de longueur. Le second I a pour base un cercle de 12 lignes de diametre, & sa longueur est de 12 pouces, Le troisieme K a pour base un cercle de 10 lignes $\frac{2}{3}$ de

diametre, & il a de longueur 10 pouces $\frac{2}{3}$. Le quatrième a 8 lignes de diametre, & 8 pouces de long. Le cinquième *M* a le même diametre que le Cilindre *I*, mais sa longueur est de 24 pouces. Ces choses étant ainsi posées,

Il est évident, 1°. Que si l'on compare le Cilindre *H* avec le Cilindre *L*, on trouvera que leurs soliditez sont entr'elles comme 8 à 1 : car leurs diametres étant comme 16 à 8 ou 2 à 1, aussi-bien que leurs longueurs, leurs bases & leurs surfaces, seront comme 4 à 1. Or la raison de 8 à 1 est triplée de celle de 2 à 1, qui est le rapport des sons de l'Octave; donc par la Proposition générale ces Cilindres doivent faire l'Octave. Ayant donc sonné les Cilindres *H* & *L*, on les a trouvez l'un à l'unisson du *Sol* qui est la Quinte du *C Sol VT* fondamental, & l'autre à l'unisson du *Sol* en dessus; donc, &c.

2°. Que le Cilindre *H* est au Cilindre *K* comme 27 est à 8 : car leurs diametres & leurs longueurs étant comme 16 à 10 $\frac{2}{3}$ ou 3 à 2, donc leurs bases & leurs surfaces seront comme 9 à 4. Or comme 27 à 8 est la raison triplée de 3 à 2 qui exprime la Quinte, donc ces Cilindres doivent former cet accord. En effet aiant sonné *K*, on la trouvé à l'unisson avec la touche *D La Re*, ce qui fait la Quinte avec le *G Re Sol* qui étoit le son du Cilindre *H*. Il faut cependant remarquer que cette Quinte differe de la veritable d'un comma, ce qui est peu de chose, surtout dans l'accord du Clavecin.

3°. Que le Cilindre *H* est au Cilindre *I* comme 64 à 27, puisqu'ils ont les diametres de leurs bases & leurs longueurs comme 16 à 12 ou 4 à 3. Donc leurs sons doivent être à la Quarte qui s'expriment par ces nombres $\frac{3}{4}$. C'est ce que l'experience a donné; car le son du Cilindre *I* faisoit l'Octave de l'*VT* fondamental, ce qui fait la quarte avec le *G Re Sol* du Cilindre *H*.

4°. Si l'on compare les Cilindres *I* & *L*, on verra qu'ils doivent encore faire la Quinte, puisqu'aiant leurs diametres & leurs longueurs comme 3 à 2, leurs soliditez sont comme 27 à 8. C'est aussi ce qui arrive, car le Cilindre *L* sonne

sonne le *G Re Sol* en dessus du *C Sol Ve* du Cilindre *I*.

Il est évident, 5°. Que les Cilindres *K* & *L* doivent faire la Quarte; car aiant leurs diametres & leurs longueurs comme $10\frac{2}{3}$ à 8 ou 4 à 3, ils sont entr'eux comme 64 à 27: ce qui est visible, puisque *RE SOL* qui marquent leurs sons, sont une Quarte plus un comma.

6°. Que *I* & *K* doivent faire le ton majeur $\frac{1}{2}$: car aiant leurs diametres & leurs longueurs dans la raison de 12 à $10\frac{2}{3}$ ou de 9 à 8; donc leurs soliditez seront en raison triplée de ces nombres ou comme 729 à 512. C'est aussi ce que leurs sons *VT RE* expriment.

L'on a ensuite sonné le Cilindre *M*, & on a trouvé qu'il faisoit la Quinte avec le son fondamental du Clavecin. Donc si on le compare avec le Cilindre *I*, on trouvera qu'ils sont une Quarte: ce qui s'accorde fort bien avec les experiences des premiers Cilindres, puisque *A* & *C*, *C* & *D* qui sont précisément dans le même rapport de 2 à 1, sont aussi une Quarte. D'où l'on voit que *M* fait l'unisson avec le Cilindre *H*, quoiqu'ils aient leurs soliditez dans la raison de 27 à 32; car leurs bases sont comme 9 à 15, & leurs longueurs comme 3 à 2; donc leurs surfaces sont comme 9 à 8. Ils devraient cependant faire un faux accord; mais apparemment que la grosseur de l'un recompense la longueur de l'autre. Que si l'on veut comparer ce même Cilindre *M* avec *K* ou *L*, on verra qu'il fait avec le premier une Quinte moins un comma, & avec le second une Octave; cependant *M* est à *K* comme 729 à 256, qui est la raison composée des bases qui sont comme 81 à 64, & des longueurs qui sont comme 9 à 4. Et est à *L* comme 27 à 4, puisque les bases sont comme 9 à 4, & les longueurs comme 3 à 1.

IV. J'ai encore fait faire quatre Parallelepipèdes *N*, *O*, *P*, *Q* du même bois de Merisier, & qui ont pour bases des quarrés, qui sont dans les rapports suivans.

1°. Le solide *P* a pour sa base un quarré dont le côté est de 6 lignes, & le solide *O* a pour côté de sa base la diagonale de la base de *P*, qui est égale à $\sqrt{72}$, ou à $6\sqrt{2}$;

ils ont chacun 16 pouces de longueur, donc ils sont entr'eux comme leurs bases, c'est à dire comme 2 à 1. Aiant sonné ces deux Parallelepipèdes, on a jugé que *O* faisoit l'unisson avec la corde *FA* *dieſe* qui est à la Quarte plus un Semi-ton en dessus de l'*VT* fondamental, & que *P* faisoit l'Octave avec ce même *VT*; d'où l'on voit que ces deux solides font un faux accord *FA dieſe VT*.

2°. Le solide *Q* a la même base que *P*, mais sa longueur n'est que de 8 pouces; donc ils sont entr'eux comme 2 à 1. Sonnant donc le solide *Q*, on l'a trouvé à l'unisson du *FA*, qui est éloigné de onze tons du son fondamental; donc ces deux solides *P* & *Q* sont une Quarte *VT FA*; ce qui s'accorde fort bien avec ce que l'on a trouvé dans les Cilindres qui avoient ce même rapport. Que si l'on compare le solide *O* avec le solide *Q*, on verra qu'ils font encore un faux accord *FA dieſe FA* qui est une Octave moins un Semi-ton: dont la raison est que quoique leurs soliditez soient dans le rapport de 4 à 1, leurs surfaces sont incommensurables.

3°. Le Parallelepipède *N* a pour base un carré quadruple de celui du solide *P* ou *Q*, & sa longueur est de 16 pouces, qui est la même que celle de *P*. Donc *N* est à *Q* comme 8 à 1, qui est la raison triplée de 2 à 1. Donc ces deux solides doivent faire l'Octave, puisque leurs bases & leurs surfaces sont comme 4 à 1; & leurs longueurs comme 2 à 1. En effet aiant sonné *N*, on l'a trouvé à l'unisson du *Fa* qui est à la Quarte de l'*VT* fondamental, mais *Q* sonne le *Fa* en dessus; donc, &c.

Si l'on compare le solide *N* aux solides *O* & *P*, on verra qu'il fait avec le premier un Semi-ton mineur *FA FA dieſe*, & avec le second une Quinte *FA VT*. Or *N* est à *O* comme 2 est à 1, car leurs longueurs sont égales, & leurs bases comme 2 à 1; donc &c. Et *N* est à *P* comme 4 à 1, qui est aussi le rapport de *O* à *Q*, quoique leurs accords soient differens; ce qui vient de ce que ces deux derniers different en longueur & grosseur, au lieu que *N* & *P* different en grosseur seulement.

D'où l'on peut conclure que les Parallelepipedes ne gardent aucune regle pour faire les accords de la Musique, à moins qu'ils ne soient dans la même raison triplée que celle des Cilindres, dont la cause est la même.

Il est bon de remarquer que quoique le Cilindre *H* qui est de même longueur que le Parallelepipedes *N*, ait sa surface plus grande, ayant le diametre de sa base égal à la diagonale de la base du solide *N*, il rend néanmoins un son plus aigu d'un ton entier que le Parallelepipedes. Il en est précisément de même du Cilindre *L*, & du Parallelepipedes *Q*; d'où l'on doit conclure que le mouvement d'ondulation se fait plus promptement dans les Cilindres que dans les Parallelepipedes.

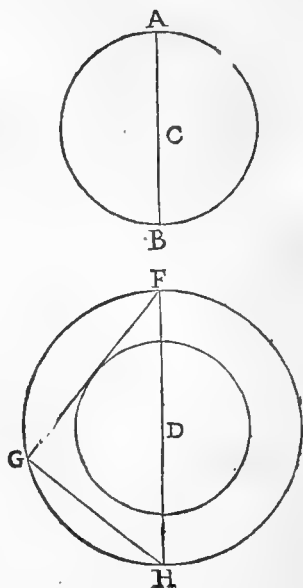
Il seroit maintenant à souhaiter que ces Instrumens qu'on nomme *Claquebois* ou *Orgues de Barbarie* fussent plus agreables, puisque l'on peut par le moïen de cette Proposition générale en fabriquer dans toute l'exacritude & la perfection possible, autant néanmoins que la matiere le peut permettre.

Mais afin de pousser cette matiere plus loin, il faudroit avoir des Cilindres de differens métaux, afin de connoître si cette raison triplée est toujours constante, comme il paroît que cela doit être. Il faudroit aussi en faire de creux, en forme de tuyaux, qui fussent tels, qu'étant de même longueur que les pleins, ils fussent composez d'une égale quantité de matiere, & déterminer le rapport de leurs sons tant entr'eux qu'entre les pleins & les creux. Ce qui pourroit servir non-seulement à éclaircir cette matiere, mais encore celle du son en général, qui est environnée de beaucoup de difficultez, aussi bien que la plupart des Questions les plus curieuses de la Physique. Et comme j'ai dessein d'en faire des expériences, afin d'y proceder d'une maniere géométrique, j'ai résolu ces petits Problèmes.

PROBLEME I.

Un Cilindre solide & plein étant donné, trouver un Cilindre creux de même matiere & de même longueur qui contienne ou soit formé par une égale quantité de matiere.

Soit le cercle de la base du premier Cilindre dont le diametre est AB , que j'appelle r , & sa circonference c ; que la longueur de ce Cilindre soit $= a$; donc sa solidité sera $= \frac{acr}{4}$. Soit un autre cercle plus grand que le premier, qui a pour diametre la ligne FH , que je nomme s , & qui soit la base du Cilindre que l'on demande; & faisant $rr.ss::\frac{cr}{4}.$ $\frac{css}{4r}$, ce dernier terme sera la valeur de ce cercle. Nommant donc x le diametre du vuide que l'on cherche, son cercle sera $\frac{cxx}{4r}$: Donc la zone renfermée entre ces deux cercles sera $\frac{css-cxx}{4r}$, laquelle étant



multipliée par a , donnera $\frac{acss-acxx}{4r}$ égale à la solidité du Cilindre creux; l'on aura donc par l'hypothèse $\frac{acss-acxx}{4r} = \frac{acr}{4}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{ss-rr}$. Soit donc menée la corde $FG = AB = r$, & du point G à l'autre extrémité du diametre soit menée la corde GH , elle sera le diametre du cercle que l'on cherche; ce qui est évident à cause du cercle; donc, &c. Il est facile de résoudre la converse.

Il est évident, 1°. Que s doit être plus grande que r

comme on l'a supposé : car si $s=r$, donc $x=0$; c'est à dire que le point G tomberoit en H , & que $FH=AB$.
 2°. Que si l'on prend s égale à deux fois la soûte dante du quart de cercle AB , le diametre du vuide sera égal à AB . 3°. Que l'on peut trouver des Cilindres tant vuides que pleins qui soient dans tel rapport que l'on voudra dans leurs grosseurs & dans leurs longueurs.

PROBLEME. II.

Deux Cilindres de même base & de différentes matieres & hauteurs comme AF, EH étant donnez, les transformer en un Cilindre égal & semblable aux deux pris ensemble AH, de telle maniere que le plus petit se trouve précisément au milieu de ce Cilindre composé des deux.

Ayant supposé la chose faite, les lignes tirées comme on les voit dans la Figure : soit

$AE=m$, $EG=n$; donc $AG=m+n$; & prenant pour la base com-

mune de ces Cilindres $\frac{cr}{2}$, donc le

Cilindre EH sera égal à $\frac{n \times cr}{2}$.

Aiant pris le point C pour le centre de la Figure, donc CI que je nomme x sera la moitié de la hauteur du petit Cilindre interieur que l'on cherche: Et pour avoir le rayon de sa base, on fera CD

$\left(\frac{m+n}{2}\right)$. $DA(r) :: CI(x) : IM$

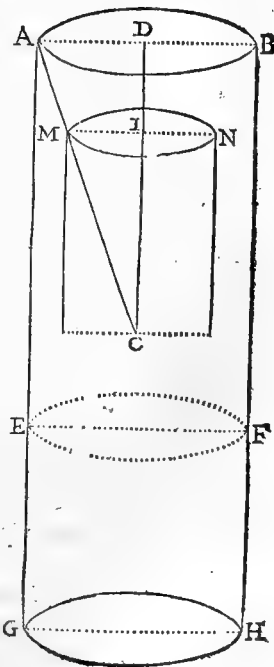
$= \frac{2rx}{m+n}$; donc la base de ce Ci-

lindre sera $\frac{2cx \times rx}{m+n}$, & la so-

lidité sera $= \frac{2cx \times rx}{m+n} \times 2x =$

$\frac{4crx^3}{m+n^3}$. L'on aura donc par l'hy-

pothèse $\frac{4crx^3}{m+n^3} = \frac{n \times cr}{2}$; d'où l'on



tire $8x' = \frac{m^2}{m + n} \times n$. Ce qui fait connoître que la hauteur du Cilindre intérieur que l'on demande, est la première des deux moyennes proportionnelles entre AG & EG , ce qui est évident. Et cette ligne servira aussi à déterminer son rayon IM .

L'usage de ce Problème seroit de connoître si les impressions que l'on fait sur la surface des corps sonores en les frappant, font trembler leurs parties les plus intérieures : car aiant, par exemple, les sons des deux Cilindres dont l'un seroit d'or & l'autre d'argent, qui sont fort differens en degrez, & en aiant formé un seul Cilindre, on découvreroit si le son qu'il rendroit seroit fort different de ceux que l'on avoit entendu auparavant.

O B S E R V A T I O N S

Des Eclipses de la Lune & du Soleil faites à Nuremberg pendant l'année 1708.

PAR M. CASSINI le fils.

1709.
2. Mars.

Messieurs Wurtzelbaur & Muller ont envoyé à l'Académie l'Observation qu'ils ont faite de l'Eclipse de Lune du 29 Septembre 1708. Le mauvais temps nous empêcha de l'observer exactement à Paris, & nous en rapportâmes deux Observations qui avoient été faites à Marseille & à Gènes. Il paroît par l'Observation de M. Wurtzelbaur que l'ombre n'étoit pas bien terminée, puisqu'il douta du commencement de l'Eclipse pendant l'espace de près de deux minutes. Il détermina aussi de même que M. Muller l'Immersion & l'Emerision de plusieurs Taches. Voici l'extrait de leurs Observations.

A $8^h 41' 30''$ A Nuremberg commencement de l'Eclipse douteux observé par M. Wurtzelbaur.
8 43 15 Commencement de l'Eclipse plus certain.

A 11^h 6' 15" Fin de l'Eclipse douteuse observée par M. Wurtzelbaur.

7 36 Fin plus exacte.

8 43 36 Commencement de l'Eclipse observé par M. Muller.

11 6 34 Fin de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de 5 doigts & un sixième.

M. Wurtzelbaur rapporte aussi l'Observation de l'Eclipse du 5 Avril 1708, dont il détermina le commencement à 5^h 0' 30" du matin; mais les nuages qui survinrent couvrirent la Lune qui s'approchoit de l'horizon.

Le temps ne fut pas propre à Nuremberg pour l'Observation de l'Eclipse du Soleil. M. Muller l'aperçut entre les nuages à 8^h 25' lorsqu'il étoit éclipsé de 7 doigts & demi, & M. Wurtzelbaur détermina à 8^h 34' la grandeur de l'Eclipse de 7 doigts.

M. Wurtzelbaur a aussi observé à Nuremberg la déclinaison de l'éguille aimantée, qu'il trouve de près de onze degrez, & il remarque qu'elle n'a pas augmenté depuis l'année 1703, qu'il l'observa aussi de onze degrez.

*Comparaison des Observations de l'Eclipse de Lune
du 29 Septembre 1708 faites à Nuremberg,
à Genes & à Marseille.*

A 8^h 43' 36' Commencement de l'Eclipse à Nuremberg.

8 33 49 Commencement de l'Eclipse à Genes.

8 20 45 Commencement de l'Eclipse à Marseille.

9 47 Diff. des merid. entre Genes & Nuremberg.

22 51 Diff. des mer. entre Marseil & Nuremberg.

11 6 34 Fin de l'Eclipse à Nuremberg.

10 57 21 A Genes.

10 41 26 A Marseille.

9 13 Diff. des merid. entre Genes & Nuremberg.

25 8 Diff. des mer. entre Marseille & Nuremberg.

OBSERVATIONS

Sur quelques végétations irrégulières de différentes parties des Plantes.

PAR M. MARCHANT.

1709.
6. Mars.

LEs objets qui semblent aujourd'hui le plus attirer les yeux des Physiciens Botanistes, sont ordinairement les Plantes étrangères; leur beauté, leur bizarrerie, ou pour mieux dire leur nouveauté, font souvent qu'on les regarde par préférence aux Plantes vulgaires, qui cependant fournissent de fréquentes occasions de faire des réflexions sur les différentes manières dont la nature se sert pour faire ses productions; & parce qu'il y a autant de merveilles à admirer du côté de la Physique dans la plus chetive de toutes les plantes que dans le plus gros Arbre, je n'hésiterai point de me servir de l'occasion qui se présente, de faire une remarque sur une Plante des plus communes & des plus viles, mais en même tems des plus en usage, tant dans les alimens, que dans la Médecine.

J'observai dans le mois de Juillet de l'année dernière, qu'il avoit crû par hazard dans du terreau exposé au frais, une Plante nommée par Casp. Bauh. *Raphanus minor oblongus*, vulgairement appelée en François Rave; laquelle étoit devenue fort haute & fort branchuë, portant quantité de fleurs & de siliques, & qu'au bout d'une des branches située vers l'extrémité de la tige, il paroissoit une espece de tuberosité oblongue, qui en general avoit quelque ressemblance à une silique de cette Plante, mais qui étoit beaucoup plus grosse, & bizarrement courbée.

Environ quinze jours après; je remarquai que cette croissance avoit beaucoup augmenté de volume, & qu'en-
fin

fin elle étoit parvenue à la grandeur qu'elle est représentée dans la partie marquée 1 dans la Figure.

Cette tuberosité étoit longue de deux pouces, ronde courbée en arc, & de huit à dix lignes de grosseur, ayant une surface raboteuse & inégale, & elle étoit garnie dans sa longueur de quelques pedicules de fleurs de cette Plante, ainsi que la branche dont elle sortoit. L'extrémité de ce corps étoit un peu plus gros & plus lisse que son origine, & cette extrémité se renversoit tout à coup en embas, & se divisoit en trois parties d'inégale longueur, qui se relevoient par le bout.

La plus longue de ces trois parties marquée 2 formoit à sa pointe une fleur verte, cartilagineuse, & de même substance que le corps qui la produisoit. Elle étoit composée de quinze parties principales, ainsi que le sont les fleurs du genre de *Raphanus* : à sçavoir, de quatre feuilles *A* qui tenoient la place du calice, & au-dessus de ces feuilles étoient placés quatre autres petits corps *B* qui tenoient lieu des feuilles de la fleur. Six autres plus petites parties *C* occupoient le milieu de cette même fleur, & figuroient les étamines qui environnoient un pistile *D* situé au milieu de cette fleur, & qui avec les autres parties dont on vient de parler, représentoient par analogie & en grand, toutes les parties de la fleur de ce genre de Plante, excepté les sommets; sçavoir, les feuilles qui composent le calice, les feuilles de la fleur, les six étamines, & le pistile plus élevé que les autres parties, toutes ces parties étant d'ailleurs d'un verd brun, lisses, cartilagineuses, épaisses & charnuës, de la grandeur & de la figure qu'elles sont représentées, & enfin d'une nature toute différente des parties, dont la fleur de la Rave est naturellement composée, ainsi que l'on peut voir dans les Figures de la Planche où le calice de cette fleur est marqué *B*, les feuilles de la fleur *F*, les étamines *G*, & le pistile *H*.

La plus petite des trois divisions de ce corps monstrueux chiffrée 3 étoit terminée par une autre fleur de même na-

66 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ture, & composée d'autant de parties que celle qu'on
vient de décrire, mais elles étoient généralement plus
petites.

La partie moïenne située entre les deux dont on vient
de parler marquée 4 étoit un autre corps de même sub-
stance contourné en demi cercle, aiant l'extrémité re-
courbée en enhaut, garni de plusieurs cornichons, diffé-
rens en grosseur & en longueur, dont les pointes étoient
aussi relevées en enhaut. Cette production dura ver-
doïante jusqu'au mois d'Octobre, après quoi elle com-
mença peu à peu à se faner, & enfin se dessécha entie-
rement aubout de la branche. On ne trouva nulle appa-
rence de graines dans aucune de ces productions.

Il y a long-tems que j'ai remarqué que la Rave produit
quelquefois des filiques tortuës & herissées de pointes,
surtout lorsqu'elles sont piquées par des pucerons, ou au-
tres insectes; mais je n'y avois point observé ces sortes de
fleurs cartilagineuses & extraordinaires, dont personne,
que je sçache, n'a encore parlé.

Il est difficile de rendre raison de ce phenomene, quoi-
qu'il soit certain qu'on en doit attribuer la cause aux pi-
queures que les insectes font à ces sortes de filiques, ainsi
qu'il a été dit; d'où il s'ensuit un épanchement du suc
nourrissier de la Plante: mais comment se pourroit-il
faire qu'un suc extravasé pût produire quelque partie de
Plante, qui eût une figure aussi régulière que l'ont ces
deux fleurs extraordinaires, si en même-tems ce suc n'é-
toit reçu dans des couloirs propres à distribuer les li-
queurs spiritueuses, qui par leur fermentation excitent
une dilatation dans les parties des Plantes?

Pour expliquer ce fait il faut de plus admettre, que
toutes les parties organiques qui composent les Plantes,
contiennent une infinité de semences invisibles, capables
de produire des especes semblables à celles dont elles ont
tiré leur origine & leur naissance. Les Observations sui-
vantes fourniront des exemples fort familières de ce que
l'on avance.

Les grêfes qu'on applique fur les arbres, lesquelles produifent d'un feul bourgeon ou écuffon, un arbre tout différent de celui fur lequel il eft enté, en font des preuves, puifque le Sauvageon ne fert fimplement qu'à fournir le fuc nourriffier neceffaire à la grêfe pour la développer, & qu'effectivement elle produit un arbre de même nature que celui dont elle eft sortie.

On fçait par experience qu'il y a des racines charnuës, qui étant coupées par roüelles de l'épaiffeur de trois ou quatre lignes, ou verticalement fenduës en quatre parties, multiplient fort bien leur efpece : Ces roüelles & ces morceaux de racines ne font pourtant que des parties tronquées affez minces, qui étant replantées, produifent à leur circonference quantité d'autres racines fibreufes, dont il s'éleve dans la même année des Plantes qui viennent à leur perfection, & tout à fait femblables à celles d'où on les a prifes ; d'où il s'enfuit qu'il faut que la vapeur humide de la terre dilate d'abord les femences qui font dans ces petites parties tronquées, & que la matiere qui fert à la formation des racines s'y rencontre, pour produire les nouvelles racines qui paroiffent quelques jours après, & qui enfin donnent naiffance à ces nouvelles Plantes.

Quelques Plantes à racines bulbeufes & écailleufes, outre qu'elles fe feparent, produifent encore d'une feule écaille & le long de leurs tiges, des cayeux qui portent des fleurs au bout de trois années, ce qui eft un effet des femences contenuës dans ces tiges.

Rien n'eft plus ordinaire que de voir des boutures d'Arbres ou de Plantes jeter des racines & des branches, quoiqu'elles foient plantées à contre-fens, & qu'il y ait quelques-unes de ces boutures qui n'aient point de bourgeons fur le bois quand on les plante, ce qui doit faire conjecturer que toutes les Plantes peuvent fe multiplier par des boutures : mais pour y bien réuffir en ce païs-cy, il faut mettre les boutures fur des couches de fumier chaud pour leur faire pouffer des racines, autre-

ment elles n'en poufferoient pas toujours.

Il y a tout au contraire d'autres Plantes, qui venant des pais froids, veulent simplement être piquées en terre fraîche & humide pour pousser des racines; cependant la chose examinée en general, on voit que les Plantes ligneuses de quelque pais qu'elles soient vegetent beaucoup plus sur couche qu'en pleine terre, parce que les semences dont ces Plantes sont remplies germent aussi plus promptement sur couche qu'ailleurs.

On sçait encore que certaines Plantes jettent d'elles-mêmes des racines le long de leurs branches, les unes lorsqu'elles touchent contre quelque corps solide, & d'autres sans toucher à rien.

Il y a quantité de feuilles charnuës, soit entieres ou même coupées en plusieurs lambeaux, qui étant piquées en terre, produisent des racines & se multiplient; ainsi que font quelques feuilles herbacées & fort minces, qui de plus jettent de leur sein des bouquets d'autres feuilles, & enfin d'autres portent des fleurs sur leur contour.

Pour prouver l'immense fécondité des Plantes, on pourroit icy rapporter quantité de manieres de les cultiver, qui aident beaucoup à cette fécondité, dont les unes sont en usage & réussissent eu égard à la saison, à la nature du terrain, ou au climat, & dont les autres manieres dépendent de quelque tour ingenieux d'Agriculture; mais les exemples qu'on vient de donner, peuvent suffire pour établir des conjectures raisonnables, sur un principe de totalité de parties, contenu dans les parties des Plantes, par le moien des semences, & pour expliquer comment se font les productions extraordinaires, qu'on rencontre si souvent dans tant de differentes Plantes; ce qui ne doit pas paroître fort surprenant, puisqu'une petite partie d'une Plante contient en abrégé une infinité de Plantes toutes entieres. C'est ce qu'on espere plus amplement prouver dans un autre Memoire touchant la nature des Plantes: mais on a besoin pour cela de réiterer quelques experiences, qu'on ne peut faire que dans de

certaines saisons de l'année, lesquelles expériences serviront beaucoup à soutenir ce Systême, & à découvrir ce qu'il y a de plus caché dans la Botanique, l'interieur des Plantes étant ce qu'on connoît le moins, quoique cette connoissance soit une des plus curieuses & des plus à désirer dans cette Science,

COURBE DE PROJECTION.

Décrite en l'air dans l'hypothèse des résistances de ce milieu en raison des vitesses actuelles du mobile, nonobstant lesquelles résistances les accélérations des chûtes se fassent en raison des tems, ainsi que quelques Philosophes disent l'avoir observé.

Et (par occasion) des projections faites dans un milieu sans résistance avec des accélérations quelconques des chûtes : desquelles projections on donne ici une Regle générale, d'où résulte la Solution d'un Problème de Balistique proposé dans les Mem. de Trevoux du mois de Janvier 1706. art. XI. pag. 176.

PAR M. VARIGNON.

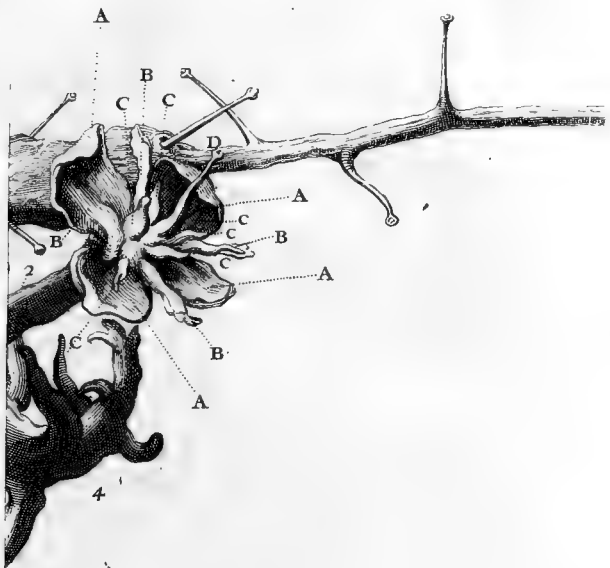
DAns les Mem. de 1708. pag. 250. 419. &c. j'ay déterminé la Courbe de projection qui dans un milieu résistant en raison des vitesses du corps jetté, résulteroit du concours des restantes de celle de projection & d'une verticale primitivement accélérée en raison des tems. Mais comme la composition de mouvement, qui a servi à déterminer cette Courbe, n'a lieu que dans cette hypothèse des résistances, & dans le vuide, ainsi que je le ferai voir quelque jour ; voici encore une autre Courbe qu'on peut chercher dans cette même hypothèse des résistances, conformément au sentiment de quelques Philosophes qui après les expériences de Galilée, du Pere

1709.
9. Mars.

Riccioli, & de quelques autres, sur la chute des corps, croient que dans l'air, nonobstant la résistance de ce milieu, les corps qui tombent en lignes droites, du moins de hauteur où les projections ordinaires ne sçauroient atteindre, y parcourent des espaces qui sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir depuis le commencement de leurs chûtes. De sorte que suivant ces Philosophes la vitesse verticale ou de pesanteur, qui dans la Courbe des Mem. de 1708. p. 250. 419. &c. n'étoit que primitive, & telle seulement qu'elle auroit été dans le vuide; seroit ici l'actuelle verticale du corps jeté, restante malgré les résistances supposées; & c'est la Courbe résultante du concours de cette vitesse verticale & de la restante de projection, qu'il s'agit de trouver ici. cela étant, il est visible que nous ne devons plus avoir ici d'égard à la résistance que le milieu fait à la pesantier du corps jeté, puisque (*hyp.*) la voilà déjà comptée; mais seulement à ce qu'il en fait au mouvement de projection, lequel étant primitivement uniforme, le Probl. 1. pag. 391. des Mem. de 1707. nous suffira seul avec ce qu'on connoît des projections dans le vuide, pour déterminer ici la Courbe cherchée.

Je suppose donc ici avec les Philosophes dont je viens de parler, que *dans l'air, nonobstant sa résistance, les corps qui y tombent en lignes droites, parcourent des espaces qui sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir depuis le commencement des chûtes.*

Les Courbes décrites par les corps jetés, seront appellées *Courbes de projection*, ainsi qu'on les vient de nommer; appellant *Lignes de projection* les droites suivant lesquelles les corps seront jetés, lesquelles seront aussi nommées *Directions des jets* ou *des forces projectrices*. Cela supposé, soit.



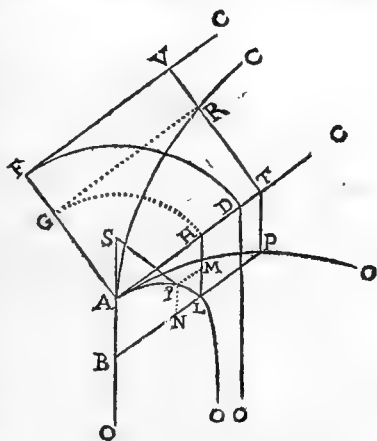


PROBLEME.

Trouver la Courbe de projection d'un corps jeté dans l'air suivant une direction qui fasse un angle quelconque avec la verticale, dans l'hypothèse des résistances de ce milieu en raison des vitesses auxquelles il résiste à chaque instant, & dans la précédente hypothèse des espaces parcourus en vertu de la pesanteur de ce corps malgré ces résistances.

SOLUTION.

Soit AC une direction quelconque non verticale suivant laquelle un corps soit jeté de A vers C de quelque force ou vitesse que ce soit, exprimée par AF perpendiculaire sur AC . Soit AO une verticale qui soit le diamètre en A de la parabole APO que le corps ainsi jeté de la vitesse AF suivant AC , décrirait (comme on le sçait) si le mouvement de projection y demeurait uniforme, & celui de pesanteur tel qu'on le suppose



ici. Après avoir fait une ordonnée quelconque BP au diamètre AO de la parabole APO , ou parallèle à sa tangente AC ; & PT parallèle à ce diamètre AO , laquelle rencontre AC en T ; soit TV parallèle à AF , & qui rencontre en V la droite FC parallèle à AC , & en R une logarithmique ARC , dont cette FC soit l'asymptote, & dont la sous-tangente (sur FC) soit $= AF$. Du point R soit RG parallèle à FC , & qui rencontre AF en G ; par lequel point G , du centre A , soit le quart de cercle GH , qui rencontre AC en H . Enfin par ce point H soit HL

72 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 parallele à AO , & qui rencontre BP en L .

Je dis que la ligne ALO qui passera par tous les points L ainsi trouvés à l'infini, sera la Courbe cherchée de projection.

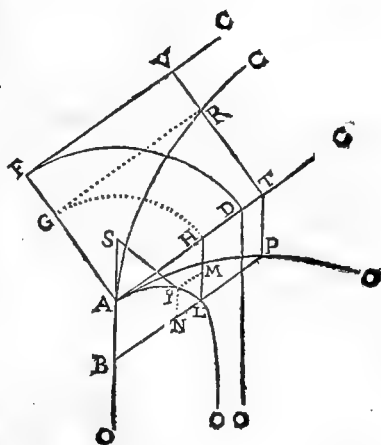
DEMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) APO est la parabole que le corps jetté de A vers C suivant AC décriroit, si le mouvement ou la vitesse AF de projection en demeurait uniforme, & celui de pesanteur ou de chute tel qu'on le suppose ici; il est manifeste que AT & TP seroient alors parcourus en même tems, la premiere en vertu du premier de ces mouvemens, & la seconde en vertu du second. Or en prenant AT pour ce tems quelconque, on voit dans les Mem. de 1707. Probl. 1. Corol. 3. pag. 392. que l'espace parcouru de la vitesse uniforme AF de projection pendant ce tems AT , seroit à ce que le mobile en parcourroit en pareil tems avec cette vitesse retardée par des résistances du milieu, lesquelles fussent en raison des vitesses actuelles VR restantes de celles-là :: $ATVF$. $ARVF$:: AT . AG . Donc AG , ou son égale AH , sera aussi parcouruë de cette vitesse AF de projection ainsi retardée, pendant le même tems AT , que TP ou HL l'est en vertu de l'accélération que le mobile reçoit (*hyp.*) de sa pesanteur malgré de pareilles résistances. Donc par le concours de ces deux vitesses à la fois le mobile doit ici se trouver en L à la fin du tems AT , pendant le dernier instant duquel ces résistances en raison (*hyp.*) des vitesses auxquelles elles s'opposent, permettent (comme dans le vuide) aux vitesses, en vertu desquelles séparées ce corps parcourroit alors les codifferentielles NL , ML , de lui faire parcourir par leur concours la diagonale IL du parallelogramme infiniment petit MN ; & ainsi de tous les autres points L qui répondent de même à tous les autres tems AT marqués de A vers C sur la droite AC . Donc enfin la ligne ALO , qui passera par tous les points L ainsi trouvés, sera la Courbe cherchée de projection. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL.

COROLLAIRE. I.

L'espace AH décrit en vertu du mouvement retardé de projection, étant toujours moindre que l'espace AT que le mobile auroit décrit en pareil tems AT en vertu de la premiere vitesse AF de ce mouvement, si elle fût demeurée uniforme; il est manifeste que la Courbe de projection ALO doit être toute entière au dedans de la parabole APO , & la toucher seulement en A , sans la rencontrer ailleurs.



COROLLAIRE.

Non-seulement la Courbe de projection ALO doit être (*Corol. I.*) toute entière au dedans la parabole APO ; mais encore, si du centre A par F , on fait le quart de cercle FD , lequel rencontre AC en D , & que de ce point D on fasse DO parallele à AO ; cette droite DO sera ici une asymptote de la Courbe de projection ALO , laquelle s'en approche toujours sans y pouvoir jamais arriver. Pour qu'elle y arrivât il faudroit que HL tombât sur DO ; & par conséquent l'arc GH sur FD , la droite GR sur FV , & R en V , enforte que RV fût aneantie; ce que la logarithmique ARC ne permettant qu'à une distance infinie de AF du côté de C , il faudroit pour cela un tems AT infini. Donc la Courbe ALO de projection n'arrivera jamais jusqu'à DO , quoiqu'elle en approche toujours à l'infini; & par conséquent DO en sera une asymptote.

74 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
COROLLAIRE III.

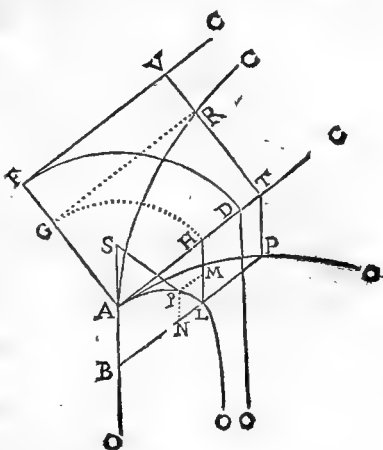
Pour trouver presentement l'équation qui exprime la nature de cette Courbe *ALO* de projection, il faut considérer que sa construction (*Solut.*) donne $BL = AH = AG = AF - RV$; & que la parabole *APO*, dont p soit le parametre en A , donne aussi $AB = \frac{AT \times AT}{p}$. Cela (dis-je) considéré, si l'on appelle BL , y ; AB , x ; AF , a ; AT , t ; & RV , u ; l'on aura premièrement $y = a - u$, ou $u = a - y$, $dy = -du$; & conséquemment $\frac{dy}{a-y} = -\frac{du}{u}$. Secondement l'on aura de même $x = \frac{t^2}{p}$, ou $t = \sqrt{px}$, $dt = \frac{t dx}{2\sqrt{px}}$; & conséquemment aussi $\frac{dt}{a} = \frac{p dx}{2a\sqrt{px}}$. Mais la logarithmique *ARC* (*Solut.*) donne $\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$ pour son équation. Donc on aura ici $\frac{dy}{a-y} = \frac{p dx}{2a\sqrt{px}}$, ou $\frac{ady}{a-y} = \frac{p dx}{2\sqrt{px}}$, pour l'équation de la Courbe *ALO* de projection.

Mais l'intégrale de cette équation différentielle est $\sqrt{px} = -la - y = axl \frac{a}{a-y}$ en prenant a pour l'unité. Et si l'on prend n pour le nombre dont a est le logarithme, en sorte que l'on ait $ln = a = 1$, ou $\sqrt{px} = \sqrt{px} \times ln$; l'intégrale précédente se changera en $\sqrt{px} \times ln = axl \frac{a}{a-y}$, ou (par l'évanouissement des logarithmes) en la parcourante $n\sqrt{px} = \frac{a^a}{a-y^a}$. Donc cette parcourante-ci, & cette intégrale-là, exprimeront encore chacune la nature de la Courbe *ALO* de projection, de même que l'équation différentielle $\frac{p dx}{2\sqrt{px}} = \frac{ady}{a-y}$ de laquelle on voit qu'elles résultent l'une & l'autre. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

1°. Pour déterminer presentement la valeur du para-

marquer que la ligne AF (a) qui a servi jusqu'ici à exprimer la première vitesse de projection suivant AC , vaut la moitié ($\frac{1}{2}p$) de ce parametre au point A de la parabole APO . Car on sçait que cette vitesse de projection, qui uniforme & concourante avec l'accélérée en raison des tems par la pesanteur du corps jetté, lui feroit décrire dans le vuide la parabole APO , est égale à ce qu'il en aquireroit en vertu



de la seule pesanteur alors constante, en tombant de la hauteur du quart du parametre en A de cette parabole; on sçait aussi que cette premiere vitesse de projection doit être à ce que la pesanteur de ce corps lui en donneroit en P suivant TP , s'il décriroit effectivement cette parabole APQ par le concours de ces vitesses, comme la racine quarrée du quart du parametre en A de cette même parabole, seroit à une pareille racine de TP . Mais p est (*hyp.*) ce parametre en A . Donc la premiere vitesse de projection $AF(a)$ faite ici suivant AC , est ce que la pesanteur du mobile (constante dans le vuide) lui en auroit donné en P suivant TP , ou (*hyp.*) à ce que la véritable pesanteur lui en donne en L suivant $HL(x)$ malgré les résistances supposées: $\sqrt{\frac{1}{4}p} \cdot \sqrt{x} :: \sqrt{\frac{1}{4}pp} \cdot \sqrt{px} :: \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{px}$. Donc aussi en prenant \sqrt{px} pour cette vitesse acquise en L suivant HL , l'on aura de même $\frac{1}{2}p$ pour la premiere vitesse de projection suivant AC . Mais on a pris jusqu'ici $AF(a)$ pour cette premiere vitesse de projection. Donc enfin $a = \frac{1}{2}p$, ou $p = 2a$: c'est-à dire que le parametre en A de la parabole APQ doit être ici double de $AF(a)$. Ce qu'il falloit démontrer.

K ij

2°. Cela étant, il n'y a plus qu'à substituer $2a$ en la place de p dans les trois équations qu'on vient de trouver (Coroll. 3.) exprimer chacune la courbe ALO de projection; & elles se changeront en autant d'autres dont chacune exprimera encore la même courbe ALO . En effet la première $\frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \frac{ady}{a-y}$ se changera ainsi en $\frac{dx}{\sqrt{2ax}} = \frac{dy}{a-y}$; la seconde $\sqrt{px} = a \times l \frac{a}{a-y}$, en $\sqrt{2ax} = a \times l \frac{a}{a-y}$, ou en $\sqrt{\frac{2x}{a}} = l \frac{a}{a-y}$; & la troisième $n\sqrt{px} = \frac{a^a}{a-y^a}$, en $n\sqrt{2ax} = \frac{a^a}{a-y^a}$, ou en $n\sqrt{\frac{2x}{a}} = \frac{a^a}{a-y^a}$. Et chacune de ces nouvelles équations exprimera, dis-je, la Courbe ALO de projection dont il s'agit ici.

3°. Si l'on imagine une Tangente LS de cette même Courbe en un de ses points quelconque L , laquelle Tangente rencontre en S le diamètre OA prolongé de ce côté-là; la première $\frac{dy}{a-y} = \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$ de ces nouvelles équations, donnant $a-y(HD) \cdot \sqrt{2ax}(AT) :: dy \cdot dx :: y(AH)$. $BS = \frac{AT \times AH}{HD}$. On trouvera que la sous-tangente (BS) de cette Courbe ALO de projection, sur son diamètre AO , sera par tout quatrième proportionnelle à HD , AH , AT . Ce qui soit seulement dit en passant pour ne nous pas arrêter davantage à cette Courbe, dont voici seulement les vitesses primitives verticales avec la pesanteur requise au mobile pour les lui donner dans le vuide, ou pour lui donner dans le plein supposé les mêmes qu'une pesanteur constante lui auroit données dans le vuide.

REMARQUE I.

On vient de supposer avec quelques Philosophes, que les hauteurs des chutes causées par la pesanteur des corps qui tombent dans l'air malgré sa résistance, sont entr'elles en raison des carrés des tems employés à les y par-

courir dès le commencement des chûtes, ou (ce qui revient au même) que les vitesses de ces corps en tombant ainsi à travers l'air ; sont à la fin de leurs chûtes en raison des tems employés à les aquerir en vertu de leur pesanteur malgré les résistances de ce milieu ; & que ces résistances y sont en raison de ces vitesses actuelles , & conséquemment aussi en raison de ces tems. Delà il est aisé de trouver les vitesses primitives dont celles-là restent malgré les résistances supposées , c'est-à-dire , ce que les corps en tombant devroient en avoir dans un milieu sans résistance , pour avoir celles-là de reste dans le milieu de résistances supposées ; & quelles pesanteurs il leur faudroit pour avoir de telles vitesses primitives en tombant dans le milieu sans résistance.

I. Pour commencer par ces vitesses primitives, si on les appelle v ; qu'on appelle aussi u , les actuelles qui en restent malgré les résistances supposées ; t , les tems employés à les aquerir ; r , tout ce que le milieu supposé leur fait de résistance pendant chacun de ces tems ; & conséquemment dr , ce qu'il leur en fait à chaque instant dt ; & qu'on suppose z par tout proportionnelle à ces résistances instantanées dr : le Corol. 1 de la pag. 115 des

Mem. de 1708. , donnera ici $\frac{dt}{u} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$ en y prenant dt constante de même que la grandeur finie quelconque a . Mais la précédente hypothese des résistances instantanées (dr) en raison des vitesses actuelles (u) restantes des primitives (v) à chaque instant (dt) malgré ces résistances, donne $z = u$ proportionnelle aussi (*hyp.*) à ces résistances dr : De sorte que la supposition faite ci-dessus de ces vitesses actuelles (u) en raison des tems (t) , donnant de même $u = t$; l'on aura non-seulement ici $du = dt$, mais encore $z = t$. Donc on y aura aussi $\frac{dt}{u} = \frac{dv - dt}{t}$, & conséquemment $t dt = a dv - a dt$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2} tt = av - at$, ou $tt + 2at = 2av$, d'où résulte $v = \frac{tt + 2at}{2a} = \frac{t}{2a} + t$. Ce qui fait déjà voir que les vitesses primiti-

78 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 ves (v) des chutes devroient être ici en raison de gran-
 deurs $\frac{tt + 2at}{2a}$ ou $\frac{t^2}{2a} + t$ correspondantes : c'est à dire (en
 prenant $2a$ pour l'unité , ou $a = \frac{1}{2}$) en raison des som-
 mes faites des tems qu'il faudroit pour les aquerir dans
 le milieu sans résistance , & des quarrés de ces mêmes
 tems.

Or la Parabole APO vient de donner (*corol. 3, & schol.*)
 $t = \sqrt{2ax}$, en appellant x les hauteurs TP ou HL des
 chutes faites pendant les tems $AT(t)$. Donc on aura pa-
 reillement ici $v \left(\frac{tt + 2at}{2a} \right) = \frac{2ax + 2av \sqrt{2ax}}{2a} = x + \sqrt{2ax}$: c'est
 à dire (en prenant encore ici $a = \frac{1}{2}$) les vitesses primiti-
 ves (v) pareillement entr'elles comme les sommes faites
 des hauteurs $TP(x)$ ici parcourues malgré les résistances
 supposées pendant les tems $AT(t)$ correspondans , & des
 racines quarrées de ces mêmes hauteurs : c'est à dire aussi
 en raison des sommes faites des vitesses (u) restantes de
 ces primitives (v) à la fin de ces tems malgré ces résistan-
 ces , & des quarrés de ces mêmes vitesses restantes.

II. Voilà pour les vitesses primitives (v) propres à four-
 nir des vitesses effectives (u) en raison des tems (t) malgré
 les résistances supposées. Voïons présentement quelles de-
 vroient être les pesanteurs des corps pour leur donner de
 telles vitesses primitives (v) dans un milieu sans résistance,
 tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide , ou bien pour leur
 donner les actuelles supposées en raison des tems malgré
 des résistances supposées aussi en cette même raison.

On voit par la premiere des deux Regles de la page
 268 des Mem. de 1707 , qu'en appellant les pesanteurs,
 f , l'on aura ici $f = \frac{dv}{dt}$. Mais (*art. 1.*) l'on y a aussi $v = \frac{tt + 2at}{2a}$
 & conséquemment $dv = \frac{tdt + adt}{a}$. Donc on aura pareille-
 ment ici $f = \frac{tdt + adt}{adt} = \frac{a + t}{a}$: c'est à dire , les pesanteurs
 (f) en raison des grandeurs ou sommes $a + t$ correspon-
 dantes ; & par conséquent variables comme les tems (t)

en croissant comme eux également en tems égaux ; mais avec cette différence que ces tems commencent à zero au commencement des chutes, & que ces pesanteurs y devroient commencer par une force $f = \frac{a + dt}{a} = \frac{a}{a} = 1$, de même genre que la pesanteur constante qu'on suppose d'ordinaire dans l'hypothese de Galilée, laquelle donnant $v = t$, donneroit aussi $p \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{dt}{dt} = 1$, en l'appellant p : cette premiere force $f(1)$ toujours agissante comme la constante $p(1)$, augmenteroit (dis-je) également en tems égaux jusqu'à devenir infinie par rapport à cette pesanteur p après un tems infini, & à se trouver ainsi pour lors du genre des forces finies de projection ou de rotation, qu'on a vûës dans la page 231. des Mem. de 1706 ; être effectivement infinies par rapport à cette même pesanteur constante p de l'hypothese de Galilée.

III. Il suit des deux articles précédens, que si au lieu des vitesses effectives $u = t$ des corps qui tombent, supposées dans le Problème précédent, on suppose leurs vitesses primitives $v = \frac{2at + t^2}{2a}$, ou leurs pesanteurs $f = \frac{a + t}{a}$, la Courbe de projection en sera précisément la même dans un milieu résistant en raison de vitesses actuelles restantes de ces primitives ou de l'action de ce pesanteurs : Voici comment on l'auroit trouvé si le Problème eût été proposé de l'une ou de l'autre de ces deux manières.

1^o. Puisque (hyp.) $v = \frac{2at + t^2}{2a}$ sont ici les vitesses primitives, telles qu'elles seroient dans un milieu sans résistance ; l'on y aura $tt = 2av - 2at$, & conséquemment $t dt = a dv - a dt$, ou $\frac{dt}{a} = \frac{dv - dt}{t}$. Mais la Regle générale $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{z}$ du Corol. 1 de la pag. 115 des Mem. de 1708, dans laquelle z exprimant en général les rapports des résistances instantanées, qu'on suppose ici en raison des vitesses effectives (u) restantes de ces primitives (v) mal-

80 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 gré ces résistances, y devient $z = u$; se réduit ici à
 $\frac{dz}{dt} = \frac{dv - du}{u}$. Donc $\frac{dv - du}{u} = \frac{dv - du}{u}$; & par conséquent
 $u = t$. Ainsi il n'y a plus qu'à procéder comme dans la
 solution du Problème précédent pour avoir ici la même
 Courbe de projection qu'on y a eue. *Ce qu'il falloit pre-*
mierement trouver.

2^o. Puisque (*hyp.*) les pesanteurs des corps jettés sont
 ici $f = \frac{a+t}{a}$, la premiere des deux Regles generales de
 la pag. 268 des Mem. de 1707, y donnant $f = \frac{dv}{dt}$, l'on y
 aura aussi $\frac{a+t}{a} = \frac{dv}{dt}$, ou $adt + tdt = adv$, & conséquem-
 ment $at + \frac{1}{2}tt = av$, ou $v = \frac{2at + tt}{2a}$. Ainsi il n'y a plus
 qu'à procéder comme dans le nomb. 1. pour avoir la mê-
 me Courbe de projection ici que là; & que dans la solu-
 tion du Problème précédent. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

REMARQUE II.

Les noms demeurant les mêmes que dans le Corol. 3 de
 la Solution précédente, la même composition de mou-
 vement qui y a donné la Courbe ALO de projection dans
 l'hypothese des résistances du milieu en raison des vitesses
 auxquelles ils s'opposent, donneroit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1x + \sqrt{2ax}}$
 pour l'équation de la Courbe d'une projection faite dans
 un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses; &
 $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{2ax}} \times \sqrt{\frac{a}{2x}}$ pour l'équation de la Courbe d'une
 projection faite dans un milieu résistant en raison des
 sommes faites des vitesses & de leurs quarrés: le tout en
 supposant toujours les accelerations des chutes rectilignes
 dans l'air en raison des tems nonobstant ces résistances.
 Mais (comme j'ai déjà dit) cette composition de mou-
 vement n'a lieu que dans la premiere de ces trois hypo-
 theses des résistances; parce que cette premiere hypo-
 these est la seule où la diminution du mouvement retardé
 dans

dans la diagonale, soit proportionnelle aux diminutions par les côtes du parallélogramme, qui exprime le concours des vitesses composantes. Nous prendrons donc un autre tour dans la suite pour avoir les courbes de projection résultantes des deux autres hypothèses dont il nous reste encore à parler par rapport aux mouvemens primitivement variés : ce sera pour d'autres Memoires. en attendant voici ce qui m'est venu à l'occasion de la parabole employée ci-dessus, laquelle on sçait être la Courbe de projection qui résulteroit de l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur regardée comme constante dans un milieu sans résistance; ou plus généralement, voici ce qui m'est venu à cette occasion touchant les projections qui y seroient faites quelles qu'y fussent les pesanteurs des corps ou les vitesses qui en résulteroient.

A P P E N D I C E.

Des Projections supposées à l'ordinaire comme dans un milieu sans résistances, quelles qu'en soient les vitesses issues des pesanteurs des corps jetés, & conséquemment aussi quelles qu'y soient ces pesanteurs elles-mêmes.

A V E R T I S S E M E N T.

La lettre *d* qui va être ici employée pour exprimer la longueur de la ligne de but en blanc d'un des deux corps jetés dont on va comparer les projections entr'elles, c'est-à-dire, qui va signifier ici la distance du point de projection de ce corps à son but, ne pouvant plus y servir de caractéristique qui marque les différentielles qui s'y vont trouver; ces différentielles seront marquées dans la suite à la manière de M. Newton, par des points placés au dessus des lettres qui exprimeront les grandeurs dont elles seront différentielles : ainsi au lieu de marquer à notre ordinaire, avec M. Leibnitz, par *dt*, *aθ*, *du*, *dv*, les premières différentielles ou élémens des grandeurs appelées *t*, *θ*, *u*, *v*, nous les marquerons par *ṫ*, *θ̇*, *u̇*, *v̇*.

82 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
Quant aux sommes ou Intégrales, nous les marquerons
par leur caractéristique ordinaire \int .

NOMS GÉNÉRAUX.

Corps jettés	$P, \Pi.$
Leurs masses	$m, \mu.$
Leurs pesanteurs	$p, \pi.$
Leurs forces projectrices	$f, \varphi.$
Sinus total,	$c, c.$
Sinus des angles de la verticale avec les di- rections de jets,	$e, e.$
Sinus des angles de l'horizontale avec ces di- rections.	$g, \gamma.$
Sinus des angles de ces mêmes directions avec les lignes de but en blanc.	$a, \alpha.$
Sinus des angles de ces lignes de but en blanc avec la verticale	$b, \beta.$
Lignes de but en blanc, ou distances des points de projection aux buts	$d, \delta.$
Efforts ou forces verticales dont les corps jettez frapent ces buts	$l, \lambda.$
Temps qu'ils emploient à y arriver	$t, \theta.$
Vitesse verticales issues des pesanteurs p, π , pendant ces tems	$u, u.$

REGLE GÉNÉRALE

$$\frac{a\overline{c\pi\pi} + b\overline{g}\times f\overline{u\pi}}{mab\delta\lambda\mu} \times e f p t = \frac{a\overline{c\pi\theta} + b\overline{g}\times f\overline{u\theta}}{\mu\alpha\beta\delta\lambda\upsilon} \times e\varphi\pi\theta.$$

Cette Regle suit si naturellement de la générale des
Mem. de 1707, pag. 226, & de celles qui y en ont été
dédites pour la comparaison des mouvemens entr'eux,
qu'il ne paroît pas nécessaire de s'arrêter ici à la démon-
trer. Les signes — superieurs dans $\overline{+}$ sont pour les
projections de bas en haut; & les inférieurs $\overline{+}$, pour les
projections de haut en bas.

On se servira de cette Regle à peu près de même

qu'on a fait de la générale des Mem. de 1707 dans les trois exemples qui la suivent; par exemple, si l'on suppose. $u. v :: t^n. \theta^n$. en sorte qu'en prenant $u = t^n$, l'on ait aussi $v = \theta^n$: cette supposition donnant $\dot{u} = n t^{n-1} \dot{t}$, $\dot{v} = n \theta^{n-1} \dot{\theta}$, $\int u \dot{t} = \int t^n \dot{t} = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, & $\int v \dot{\theta} = \int \theta^n \dot{\theta} = \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$; la substitution de

ces valeurs de u , v , $\int u \dot{t}$, $\int v \dot{\theta}$, dans la précédente Regle générale, la réduira ici à $\frac{n+1 \times ac + bg}{nn + n \times mabld} \times efp t t = \frac{v + 1 \times ac + \beta y}{vv + v \times \mu \alpha \beta \lambda d}$ $\times e \phi \pi \theta \theta$; & ainsi d'une infinité d'autres Corollaires, qui (les intégrations supposées) se pourroient tirer de même de cette Regle générale, selon la variété arbitraire d'autres hypotheses qu'on y pourroit encore faire.

Il est ici à remarquer que si l'on suppose de plus $n = v$, cette Regle générale, ou celle qu'on en vient de tirer pour le cas des valeurs de $u. v :: t^n. \theta^n$. se réduira encore à $\frac{n+1 \times ac + bg}{mabld} \times efp t t = \frac{n+1 \times ac + \beta y}{\mu \alpha \beta \lambda d} \times e \phi \pi \theta \theta$, qui seule satisfait au Problème de Balistique proposé dans les Mem. de Trevoux du mois de Janvier 1706, art. 11, pag. 167, en ces termes.

PROBLÈME ENVOYÉ DE PROVINCE.

Deux corps P, Q, dont les pesanteurs sont A, B, ont été jetés de deux points à deux autres points, dont les distances sont C, D, par les puissances E, F, suivant les directions qui faisoient avec les lignes C, D, des angles dont les sinus sont G, H. Ils sont parvenus à leurs termes dans les tems I, K, ont frappé avec de forces R, S, ont fait précision de la résistance du milieu, & l'on suppose que les vitesses des graves croissent en général comme les puissances M des tems écoulés. Il s'agit de trouver une Regle générale renfermée dans une ou plusieurs équations qui expriment tous les rapports possibles entre A, B; C, D; E, F; G, H; I, K; R, S.

SOLUTION.

Pour avoir cette Regle dans une seule équation, il n'y

§4 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 a plus qu'à prendre ici $m = P$, $\mu = Q$, $p = A$, $\pi = B$;
 $d = C$, $\delta = D$, $f = E$, $\varphi = F$, $a = G$, $\alpha = H$, $t = I$, $\theta = K$,
 $l = R$, $\lambda = S$, $n = M$; & en substituant ces valeurs proposées
 dans la dernière équation $\frac{n+1 \times ac + bg}{mabld} \times efpit = \frac{n+1 \times a + \beta y}{\mu \alpha \beta \lambda \delta}$
 $\times \varepsilon \varphi \pi \theta \theta$, elle se changera en $\frac{M \times c + c \times G + bg}{PGRC} \times \frac{e}{b} \times E A I =$
 $\frac{M \times c + c \times H + \beta y}{Q H S D} \times \frac{\varepsilon}{\beta} \times F B K^2$, qui sera la Regle demandée
 dans le Problème proposé.

AUTRE SOLUTION Infinitement générale.

Si dans la Regle générale qui vient de donner toutes
 les autres, on substitue de même les expressions du Pro-
 blème de Trevoux au lieu des nôtres, il en résultera en-
 core une Solution de ce Problème infiniment plus géné-
 rale que la précédente requise par l'Auteur : sçavoir ,
 $\frac{cu \times G l + bg \times fu \times i}{PGCR} \times \frac{\varepsilon \times i}{bu} \times AE = \frac{u \times HK + \beta y \times fu \times K}{Q H S D} \times \frac{\varepsilon \times K}{\beta v} \times B F$.
 La supposition de $u, v : I^M, K^M$. faite dans le Problème
 proposé, fera dégénérer cette Regle ou Solution en celle
 qui la précède.

AVERTISSEMENT.

I. Ce Problème ainsi résolu par le moïen d'une seule
 équation, l'a déjà été par le concours de quatre, par le
 Pere Durranc Jesuite, habile en ces matieres, & Professeur
 des Mathématiques à Cahors : il seroit à souhaiter que
 sa Solution fût rendue publique pour voir la difference
 des chemins qui nous ont conduit au même but. Son Ecrit
 m'a passé par les mains ; & ce fut par cet Ecrit que j'ap-
 pris que ce Problème avoit été proposé, ne lisant pas
 fort exactement les Journaux ; outre que lorsqu'il le fut,
 j'étois trop malade pour pouvoir penser à rien d'appro-
 chant. Voiant ce Problème résolu, je ne m'avais pas
 d'en chercher d'autre solution ; mais celle-ci s'étant pré-

sentée comme d'elle-même en conséquence de la Règle générale d'où je viens de la tirer, j'ai crû faire plaisir au Lecteur de la marquer ici.

II. Pour ce qui est de la Courbe générale de projection, par exemple du corps *P*, dans toute l'étendue de la Règle précédente, c'est-à-dire, quelque hypothèse qu'on fasse de ses vitesses (*u*) de pesanteur dans le vuide; l'équation générale en sera $x = \int u t$, en prenant *x* pour les ordonnées verticales de cette Courbe, & *t* pour les abscisses correspondantes depuis le point de projection sur la direction du jet. De sorte que dans le cas du Problème de Trevoux, qui rend $u = t^m$, l'équation de cette Courbe fera $x(\int u t) = \int t^m t = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, ou (en prenant *a* pour l'unité)

$m+1 \times a^m x = t^{m+1}$; ce qui (en supposant $m=1$ conformément à l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur) se réduit à $2ax = tt$, équation à la parabole ordinaire trouvée par Galilée & par plusieurs autres après lui pour la Courbe de projection dans cette dernière hypothèse. L'équation de celle du corps *II* se trouvera de même en général & en particulier.

OBSERVATIONS

SUR LES MOUVEMENTS DE LA LANGUE

DU PIVER.

PAR M. MERY

Pour donner une Explication des mouvemens de la langue du Piver, plus juste que celle qui paroît dans les ouvrages de M^{rs} Borelli & Perrault, je vais décrire plus exactement qu'ils n'ont fait, toutes les parties d'où dépendent ses mouvemens.

De quelque étendue que paroisse la langue de cet Oi-

seau, il est néanmoins constant que sa longueur propre n'est que de trois à quatre lignes; car celle du corps & des branches de l'os hyoïde, que ces Auteurs lui ont attribuée, ne lui appartient pas en bonne anatomie.

La langue du Piver est faite d'un petit os fort court, revêtu d'un cornet de substance d'écaille: sa figure est pyramidale; il est articulé par sa base avec l'extrémité antérieure de l'os hyoïde.

L'os hyoïde est figuré comme un filet; il a environ deux pouces de longueur & une demie ligne de grosseur; il est articulé par son extrémité postérieure avec deux branches osseuses plus menuës que son corps. Chaque branche est composée de deux filets d'os d'inégale longueur, joints ensemble & aboutis l'un à l'autre. Le filet de devant n'a qu'un pouce & demi de long; celui de derrière, inconnu à M. Borelli, en a cinq ou environ, étant uni à un petit cartilage qui le termine; de sorte que chaque branche est trois fois plus longue que le corps de l'os hyoïde & celui de la langue joints ensemble. Ces branches qui appartiennent à l'os hyoïde, sont courbées en forme d'arc, dont le milieu occupe les côtes du cou, leurs extrémités antérieures passent sous le bec, & se terminent au corps de l'os hyoïde; leurs extrémités postérieures passent par-dessus la tête & entrent dans le nez du côté droit: mais il est à remarquer qu'elles n'y sont point articulées; ce qui contribua beaucoup à la sortie de la langue, comme je le ferai voir dans la suite.

L'os hyoïde & le filet antérieur de ses branches, sont renfermez dans une gaine formée de la membrane qui tapisse le dedans du bec inférieur. L'extrémité de cette gaine s'unit à l'embouchure du cornet écailleux de la langue. Cette gaine s'allonge quand la langue sort hors du bec, & s'accourcit quand elle y rentre.

Le cornet écailleux qui revêt le petit os de la langue, est convexe en dessus, plat en dessous, & cave en dedans: il est armé de chaque côté de six petites pointes très fines, transparentes & inflexibles; leur extrémité est

un peu tournée vers le gosier. Il y a bien de l'apparence que ce cornet armé de ces petites pointes , est l'instrument dont le Piver se sert pour enlever sa proie ; ce qu'il fait avec d'autant plus de facilité , que cet instrument est toujours empâté d'une matiere gluante , qui est versée dans l'extrémité du bec inferieur par deux canaux excrétoires , qui partent de deux glandes piramidales situées aux côtez internes de cette partie.

Pour se servir de cet instrument, la nature a donné au Piver plusieurs muscles , dont les uns appartiennent aux branches de l'os hyoïde : ceux-ci tirent la langue hors du bec ; d'autres appartiennent à la gaine , qui renferme le corps de l'os hyoïde avec les filets antérieurs de ses branches ; ceux-là retirent la langue dans le bec. Enfin la langue a ses muscles propres qui la tirent en haut, en bas , & de l'un & de l'autre côté.

Chaque branche de l'os hyoïde n'a qu'un muscle qui seul est aussi long que la langue , l'os hyoïde & une de ses branches joints ensemble ; ces deux muscles tirent leur origine de la partie antérieure laterale-interne du bec inferieur , s'avancant de devant en arriere , ils enveloppent les filets postérieurs des branches de l'os hyoïde , & passant au dessus de la tête , ils viennent enfin s'insérer à leurs extrémités , d'où partent deux ligamens à ressort , qui s'unissant ensemble , en forment un troisième , qui les attache à la membrane du nez. Ces ligamens sont fort courts ; mais ils s'allongent sans peine pour peu qu'ils soient tirez. Or comme la résistance de ces ligamens peut être surmontée facilement par la contraction de ces muscles , il est aisé de concevoir , que quand ils se raccourcissent , ils tirent les extrémités postérieures des branches de l'os hyoïde hors du nez ; & les entraînant du côté de leur origine , ils chassent le corps de l'os hyoïde , les filets antérieurs de ses branches , & la langue hors du bec ; ce qu'ils n'avoient pû faire , bien que les branches de l'os hyoïde soient fort flexibles , si ses branches avoient été fixement attachées ou articulées

§§ MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
avec les os du nez , car quoique les arcs qu'elles décrivent , puissent s'étendre , elles n'auroient pû s'allonger assez pour pousser de quatre pouces la langue hors du bec ; ce qu'elles font avec d'autant plus de facilité qu'elles ont leur mouvement libre dans ses muscles , où elles sont renfermées comme dans un canal , & ne sont point d'ailleurs articulées avec les os du nez.

Pour retirer la langue dans le bec , la nature a donné à la gaine qui renferme l'os hyoïde & les filets antérieurs de ses branches , deux muscles pour l'y ramener ; & parce qu'il faut que leur allongement & leur raccourcissement soient égaux à ceux de leurs antagonistes ; puisque la langue parcourt le même chemin en rentrant dans le bec , qu'elle fait pour en sortir , la nature a pris soin pour placer ces muscles dans le petit espace qui est entre le dessous du Larinx & le bout du bec , de faire faire à l'un & à l'autre deux circonvolutions en sens contraire autour de la partie supérieure de la trachée artère , d'où ces deux muscles tirent leur origine ; après quoi ils se croisent derrière le Larinx , & viennent enfin tapisser le dedans de la gaine à laquelle ils s'unissent ; or comme son extrémité est jointe à l'embouchure du cornet écailleux de la langue , il arrive que quand ces deux muscles se contractent , ils tirent & font rentrer cette gaine en elle-même , & ramenant ainsi la langue dans le bec , ils repoussent les extrémités postérieures des branches de l'os hyoïde dans le nez. Les trois ligamens à ressort dont j'ai parlé , servent aussi à les y ramener ; car après avoir été allongés par les muscles qui tirent la langue hors du bec , ils se raccourcissent sitôt que ces muscles se relâchent , & entraînent dans le nez les branches de l'os hyoïde auxquels ils sont attachés.

Il y a au dessus du crane une rainure qui forme avec la peau un canal , qui renferme la partie postérieure des branches de l'os hyoïde avec leurs muscles , dans lequel ces parties ont leur mouvement libre. Ce canal empêche les branches de l'os hyoïde de s'écarter de côté ni d'au-
tre

tre, quand elles sont tirées en avant, & fait qu'elles reprennent facilement leur place, quand elles sont retirées en arriere.

Pour peu qu'on fasse de reflexion sur la longueur qu'ont la langue, l'os hyoïde, & ses branches joints ensemble, & sur l'origine & l'insertion déterminée des muscles qui font sortir & rentrer dans le bec la langue du Piver, il sera aisé de juger que M. Borelli s'est mépris; car si l'on considere que la langue de cet oiseau, l'os hyoïde & ses branches joints ensemble, ont huit pouces de longueur, & que de cette longueur il en sort environ quatre pouces hors du bec quand elle est tirée, on concevra aisément que la langue parcourant le même chemin en rentrant qu'elle fait en sortant, les muscles qui la tirent & retirent, doivent avoir des alongemens & des raccourcissens de chacun quatre pouces, & que par conséquent ils doivent avoir en longueur plus de quatre pouces, ne pouvant pas s'acourcir de leur longueur entiere. Ainsi des quatre premiers muscles, que M. Borelli donne à la langue pour ses mouvemens, deux prenant leur origine de l'extrémité du bec inférieur, & les deux du devant du crane, & tous les quatre allant s'insérer au milieu de cette longueur de huit pouces, il est visible que ces muscles ne pourroient avoir jamais un tel effet, puisqu'ils ne feroient au plus chacun que de quatre pouces.

M. Borelli ne seroit pas entré dans ce sentiment, si on lui avoit fait remarquer que les deux muscles qui naissent du bec, parcourent toute l'étendue du corps & des branches de l'os hyoïde. Sa méprise vient donc d'avoir partagé chacun de ces muscles en deux, & de n'avoir connu que les filets antérieurs des branches de l'os hyoïde au bout desquels il place l'insertion des quatre premiers muscles de la langue qu'il a décrits. A l'égard de ceux qui tournent autour de la trachée artère, il en a reconnu le véritable usage.

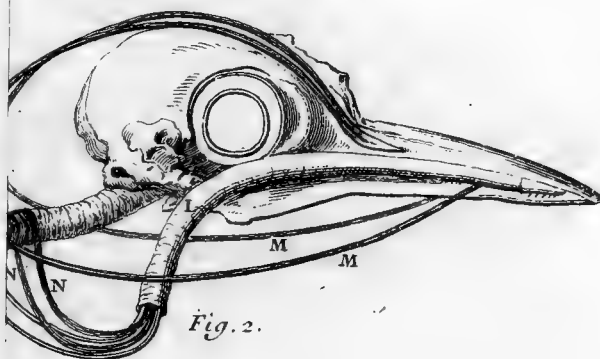
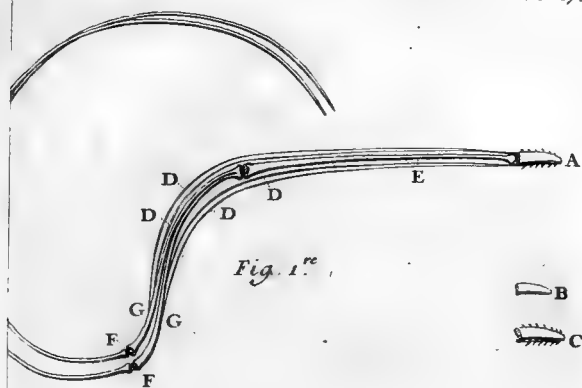
Pour ce qui regarde M. Perrault, il s'est mépris beaucoup plus que M. Borelli. Car premierement il ne fait

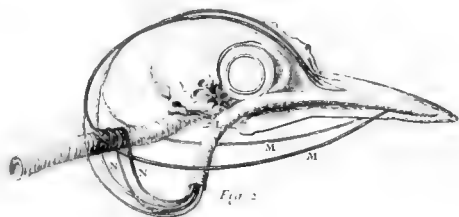
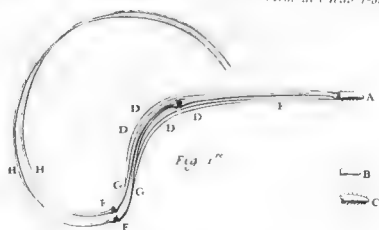
nulle mention des muscles qui environnent la trachée artère, c'est néanmoins par leur action seule, que la langue est ramenée dans le bec. Secondement il fait naître du larinx les quatre premiers muscles de M. Borelli, & en envoie deux aux extrémités postérieures des branches de l'os hyoïde, & les deux autres à leurs extrémités antérieures pour tirer & retirer la langue, & par-là il tombe dans le même inconvenient de M. Borelli; mais sa méprise est plus grande, en ce qu'il ne part aucun muscle du larinx qui aille s'attacher aux branches de l'os hyoïde.

Enfin toute la recherche que ces Messieurs ont faite pour expliquer les mouvemens de la langue du Piver, se termine aux muscles qui la font sortir hors du bec, & à ceux qui l'y font rentrer. Il ne paroît point que leurs anatomistes se soient mis en peine de penetrer plus avant dans sa structure: de-là vient que ces Messieurs ne nous ont rien dit des quatre muscles propres à la langue de cet oiseau, par lesquels elle est portée en haut, en bas, & d'un côté & d'autre, soit qu'elle soit placée au dedans ou au dehors du bec.

Ces muscles tirent tous leur origine de la partie antérieure des branches de l'os hyoïde, deux de l'une & deux de l'autre, & se terminent chacun en un long & grêle tendon; ces quatre tendons embrassent le corps de l'os hyoïde, & viennent s'insérer à la base du petit os de la langue. Quand tous ces muscles agissent ensemble, ils tiennent la langue droite; quand les muscles de dessus se raccourcissent en même-tems, ils tirent la langue en haut; quand ceux de dessous sont en action, ils la tirent en bas. Mais lorsque deux muscles placés d'un même côté agissent ensemble, ils la tirent de ce côté-là.

Or comme de tous les muscles qui servent aux différens mouvemens de la langue du Piver, il n'y a que ces quatre derniers qui y aient leur insertion, il est visible que les muscles qui la tirent & retirent, ne lui appartiennent pas proprement; mais à la gaine & aux bran-





ches de l'os hyoïde où ces muscles vont s'insérer comme je l'ai fait voir ; d'où il s'ensuit que les mouvemens que fait la langue en sortant du bec & en y rentrant, appartiennent aussi à ces parties , & non pas à la langue ; puisque dans ces deux mouvemens elle peut demeurer immobile.

OBSERVATIONS

*De l'Eclipse de Soleil arrivée le 11 Mars 1709.
après midy , à l'Observatoire.*

PAR M^{rs} DE LA HIRE.

LE Ciel a été si couvert pendant la durée de cette Eclipse , que nous n'avons pû qu'avec beaucoup de peine en déterminer quelques phases. Il y avoit plusieurs couches de nuages les unes au-dessus des autres , & qui étoient assés épaisses pour ne laisser voir le Soleil que par quelques intervalles & dont le limbe n'étoit pas bien déterminé. Le vent étoit fort & Nord avec un peu de nége qui tomboit , & à peine étoit-on en état de prendre quelques mesures avec le Micrometre, dont on se servoit, que le Soleil se couvroit de nuage épais.

1709.
13. Mars.

Cependant voicy ce que nous en avons pû observer.

A	1 ^h	33'	46"	2 doigts	37'	douteuse.
		38	20	3	0	
		50	6	3	0	
2		5	40	2	24	
		23	57	1	21	

OBSERVATION

De l'Eclipse du Soleil du 11 Mars 1709. faite à l'Observatoire Royal.

PAR M. CASSINI le fils.

1709.
13. Mars.

LE Ciel fut pendant cette Eclipsé couvert de nuages, au travers desquels on entrevoïoit quelquefois le Soleil, dont le disque n'étoit pas affés bien terminé pour déterminer avec évidence la quantité de l'Eclipsé. voici ce que nous en avons pû observer tant à la vûe simple qu'avec deux Lunetes, l'une desquelles avoit un mi cromosome à son foier, & l'autre des reticules.

Le Soleil étoit entierement caché au commencement de l'Eclipsé.

à 1^h 8' après midi, le Soleil commença de paroître entre les nuages à la vûe simple, éclipse de près de deux doigts.

à 1 11 le Soleil observé avec les reticules, étoit éclipse de deux doigts 16 minutes.

Cette Observation est douteuse.

à 1 33 le disque du Soleil & les cornes parurent bien terminées, & l'on trouva par les reticules la grandeur de l'Eclipsé de 2 doigts 56 minutes.

à 1 35 la grandeur de l'Eclipsé fut trouvée par le micrometre de 2 doigts 58 minutes.

à 1 36 la grandeur de l'Eclipsé fut trouvée par les reticules de 2 doigts 56 min. exact.

à 2 6 à 7 les cornes de l'Eclipsé sont verticales.

à 2 21 la distance entre les cornes est environ la sixième partie de la circonference du Soleil, ce qui donne la grandeur de l'Eclipsé d'un doigt & demi.

L'on vit ensuite par intervalle le Soleil éclipsé à la vue simple sans pouvoir déterminer la quantité de l'Eclipse. & à 2^h 40' l'on aperçut le Soleil pour la dernière fois, & il étoit doux s'il étoit encore éclipsé.

E X T R A I T

DES OBSERVATIONS

de l'Eclipse du Soleil du 11 Mars 1709. faites à Montpellier, à Marseille, à Genes & à Bologne.

PAR M. CASSINI le fils.

Nous avons reçu diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 11 Mars 1709. dont voici l'Extrait. 1709. 17. Avril.

Observation faite à Montpellier, par Messieurs de Plantade & Clapiés.

à 0^h 38' 33" Commencement de l'Eclipse douteux.

2 55 49 Fin de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de 4 doigts & demi.

Observation faite à Marseille, par le P. Laval & M. Chazelles.

à 0^h 42' 18" Commencement.

3 2 43 L'Eclipse sur sa fin.

Observation faites à Genes, par M. le Marquis Salvago & l'Abbé Rava.

à 0^h 59' 52" Commencement de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de cinq doigts & un peu plus.

Observation faite à Bologne, par M. Manfredy.

à 3^h 8' $\frac{1}{2}$ " Le Soleil étoit éclipsé de 2 doigts $\frac{1}{4}$.
 3 34 35 Fin de l'Eclipse à peu près.

*Reflexions sur les Observations de l'Eclipse du Soleil
du 11 Mars 1709, faites en divers Pays.*

Les Observations de l'Eclipse du Soleil que nous avons reçues de divers pais où nous avons des Correspondans, étoient nécessaires pour suppléer à l'Observation faite à Paris, où nous n'avions pû déterminer ni le commencement ni la fin.

Nous nous sommes servis principalement de l'Observation faite à Marseille, où le commencement de l'Eclipse fut déterminé exactement à 0^h 42' 18". Aiant eu égard à la différence des Meridiens entre Paris & Marseille, que nous avons trouvée par quantité d'Observations de 12' 28", nous avons corrigé la trace de la Lune dans la figure dont nous nous étions servi pour calculer l'Eclipse du Soleil, & nous y avons ensuite appliqué les Observations les plus exactes qui ont été faites à Montpellier, à Genes, & à Bologne.

A Montpellier la Fin de l'Eclipse fut observée exactement à 2^h 55' 49"
 On trouve par la figure dressée pour le Meridien de Paris, qu'elle y a dû arriver à 2 49 30
 Ce qui donne la différence des Meridiens de 6 19

A Genes le Commencement de l'Eclipse fut observé exactement à 0^h 59' 52"
 Il y a dû arriver par la figure 0 34 0
 Ce qui donne la différence des Meridiens de 25 52

A Bologne la Fin fut observée avec quelque ambiguïté à 3^h 34' 35"
 Elle a dû arriver par la figure à 2 58 40
 Ce qui donne la différence des Meridiens de 35 55

La difference des Meridiens qui résulte de ces Observations, s'accordant assés exactement avec celle que l'on a trouvée par diverses autres Observations; il y a lieu de supposer que la trace de la Lune que l'on a corrigée par l'Observation faite à Marseille, s'accorde à très-peu près avec celle qu'elle a dû décrire effectivement.

Suivant cette trace l'on trouve que le commencement a dû arriver à Paris par le calcul corrigé le 11 Mars, à $0^h 42' 30''$, & la fin à $2^h 37' 0''$.

A l'égard de la quantité de l'Eclipse qui résulte des Observations que je viens de rapporter, l'on trouve qu'elle a dû paroître à Paris de 2 doigts 56 minutes telle que nous l'avions déterminée par nos Observations.

EXPLICATION

De quelques faits d'Optique, & de la maniere dont se fait la vision.

PAR M. DE LA HIRE.

EN 1694 je fis imprimer dans un Memoire plusieurs Remarques sur differens accidens de la vûe, dont je rendois raison par l'Optique. Je joignis à ces remarques un nouveau systême de la vision dont j'avois donné une partie dans les Journaux des Sçavans quelques années auparavant. J'examine maintenant un autre accident de la vûe qui n'est pas naturel & qu'on ne remarque que dans une experience particuliere, & je crois que j'en puis aussi rendre raison comme des autres par les seules regles d'Optique.

1709.
30. Mars.

On sçait que la prunelle de l'œil dans la plupart des animaux, s'étrécit à la grande lumiere; & qu'elle s'ouvre considérablement dans l'obscurité. Il est facile de voir dans la dissection de l'œil, que la membrane Iris

qui est percée dans son milieu, ce qu'on appelle l'ouverture de la prunelle, est un muscle circulaire qui peut se racourcir en se retirant vers sa circonférence, ce qui augmente alors l'ouverture de la prunelle; mais en se relâchant, ses parties se rapprochent du centre de la prunelle par une vertu élastique; & c'est ce qui diminue la prunelle.

Pour bien entendre comment se peut faire ce changement de la prunelle par l'action du muscle, il faut considérer que le corps de ce muscle est vers sa circonférence où il est attaché au dedans de l'œil, & que toutes ses fibres paroissent tendre de la circonférence vers le centre où elles n'arrivent pas; car elles se terminent au petit cercle qui forme la prunelle. Mais ce muscle aiant une épaisseur assez considérable vers sa tête, si ses fibres s'écartent l'une de l'autre suivant l'épaisseur du muscle où il doit y en avoir une grande quantité, leur extrémité qui forme la prunelle, doit se rapprocher de la tête, & par conséquent dilater la prunelle; mais lorsque l'action du muscle cessera, le ressort des mêmes fibres peut les remettre dans leur premier état & fermer la prunelle, ou bien il pourroit y avoir dans ce muscle quelques fibres à ressort qui ne serviroient que pour cet effet; ou bien enfin on pourroit imaginer un autre muscle de peu d'épaisseur & couché sur le premier dont les fibres seroient circulaires, & qui lui serviroit d'antagoniste; car les fibres circulaires de ce muscle venant à s'écartier l'une de l'autre suivant leur plan, ferment la prunelle, l'action de l'autre muscle aiant cessé; & c'est ce sentiment qui me paroît le plus naturel & que je suis le plus volontiers.

Mais entre deux muscles qui sont antagonistes l'un à l'autre, le plus fort l'emportera toujours, lorsqu'il n'y aura aucune détermination particulière pour l'un ni pour l'autre: d'où il s'ensuit que si celui qui dilate la prunelle est le plus fort, comme il le paroît, on jugera que l'état naturel de la prunelle est d'être dilatée.

L'action

L'action d'ouvrir & de fermer la prunelle, n'est pas de celles qu'on appelle volontaires; mais de celles qui se font necessairement par une cause étrangere, comme il arrive à plusieurs parties du corps des animaux.

Il paroît assés vraisemblable qu'une très-grande lumiere faisant une trop forte impression sur le fond de l'œil, dont il est blessé & en quelque façon brûlé, comme quand on regarde le feu ou un corps blanc exposé au Soleil, nous oblige aussi-tôt à fermer la prunelle autant qu'il est possible, pour recevoir moins de ces raïons trop lumineux, & pour remedier au danger qui menace l'œil. Au contraire quand on regarde attentivement quelque objet dans l'obscurité, on fait tout son possible pour le voir distinctement, & pour en bien discerner toutes les parties, ce qu'on ne peut faire sans le secours d'une lumiere assés vive; c'est pourquoi on dilate la prunelle, afin qu'il entre dans l'œil une plus grande quantité de ces foibles raïons, qui tous ensemble feront une plus forte impression en se réunissant sur le principal organe de la vision.

Mais quoiqu'on soit exposé à une assés grande lumiere, on ne ferme pas toujours la prunelle quand on est attentif à regarder quelque objet dont l'image doit se peindre vivement sur le fond de l'œil, ce qu'on remarque dans les animaux qui peuvent fermer & dilater extraordinairement la prunelle comme les chats; car lorsqu'ils sont au grand jour & dans un état tranquille, ils ont la prunelle presque toute fermée, & s'il arrive subitement quelque objet extraordinaire auquel ils font attention, on les voit alors l'ouvrir autant qu'ils peuvent & tout d'un coup.

Ce sont ces sortes d'animaux dont je parlai dans mon Memoire, ausquels je croïois que la nature avoit donné une structure particuliere de la membrane Iris, qui ne se ferme pas circulairement mais par le côté, afin qu'elle pût s'ouvrir promptement & considérablement dans l'obscurité où ils cherchent le plus souvent leur nourriture.

Quelle que puisse être l'attention qu'on fait à voir les petites parties d'un objet, la prunelle sera toujours moins ouverte au grand jour que dans l'obscurité, sur tout si cette attention dure un peu de tems, puisque la grande lumiere l'oblige naturellement à se fermer pour éviter que le principal organe de la vision ne soit blessé. Aussi dans l'obscurité ou dans une foible lumiere, on ne sçauroit douter que la prunelle ne se mette dans son état naturel de dilatation, & qu'elle ne s'ouvre autant que le permet l'équilibre des muscles qui composent la membrane Iris, comme il arrive à toutes les parties du corps des animaux qui se meuvent par des muscles antagonistes.

L'Observation dont je parle dans ce Memoire, est assez commune, & ceux qui l'ont faite ont toujours remarqué la même chose. Ils ont plongé dans l'eau la tête d'un Chat vivant, dont la prunelle peut se dilater extraordinairement, & aussi-tôt elle s'ouvre toute entiere, quoique l'animal soit exposé à des objets fort éclairés, & l'on peut voir alors distinctement les moindres parties qui sont au fond l'œil.

J'entreprends donc d'expliquer ici par les loix de l'Optique:

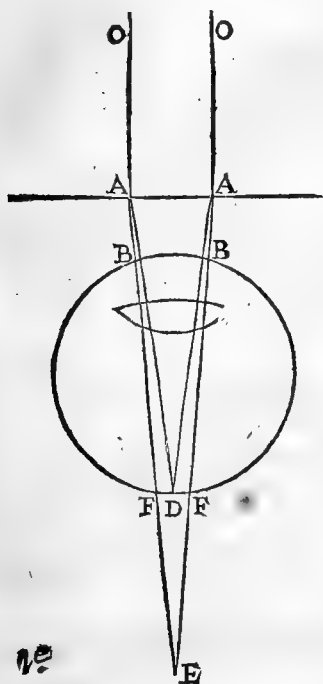
1°. Pourquoi les objets lumineux par leur presence, n'obligent pas la prunelle de ce Chat de se fermer.

2°. Pourquoi l'on voit distinctement le fond de l'œil.

Soit dans la figure suivante un objet O lumineux ou fort éclairé, dont les raïons OB viennent comme paralleles entr'eux jusqu'à la cornée BB , l'objet O étant à une médiocre distance de l'œil. On sçait que l'œil étant exposé à l'air, la plus grande refraction des raïons OB se fait d'abord sur la cornée, & qu'ensuite après deux autres refractions bien moindres que la premiere sur les surfaces du crySTALLIN, ces raïons s'assemblent en D sur le fond de l'œil que nous appellons bien conformé.

Mais si l'œil BBD est plongé dans l'eau AA , en sorte que sa surface AA soit perpendiculaire aux raïons OB

qui viennent de l'objet *O* à l'œil, alors ces rayons *OB*



rencontrant perpendiculairement la surface de l'eau *AA*, n'y souffriront aucune refraction, & ils entreront dans l'œil au travers de ses humeurs qui ne sont que peu différentes de l'eau en y souffrant peu de refraction; d'où il suit qu'ils auront une direction pour s'assembler vers *E* bien loin au delà de l'œil, & que par conséquent ils rencontreront le fond de l'œil en des points *FF* éloignés les uns des autres, au lieu de s'y assembler dans le même point *D*.

Mais les raïons du point lumineux *O* qui sont entrés dans l'œil occupant alors un espace fort confiderable *FF* sur le fond de l'œil, n'y feront qu'une impression très-foible, au lieu

qu'ils l'auroient touché très-vivement s'ils s'étoient rassemblés en *D*; c'est pourquoi cet objet lumineux *O* dans ce cas ne doit pas obliger la prunelle de se reserrer. De plus cet animal étant dans un état violent, fait attention à tout ce qui l'environne, ce qui doit encore l'obliger à tenir sa prunelle fort ouverte comme je l'ai remarqué cy-devant.

C'est pour cette raison que la nature a donné aux poissons qui vivent dans l'eau, un crystallin fort convexe & presque spherique, afin que les raïons des objets qui sont dans l'eau, lesquels ne souffrent que peu de refraction en passant par la cornée, pussent se détourner assés sur les surfaces du crystallin pour se rassembler sur le fond de l'œil. Et si l'on voit quelques plongeurs qui apperçoivent

dans l'eau des objets à une plus grande distance qu'ils ne feroient dans l'air, ce ne peut être qu'un cas particulier de la conformation de l'œil de ces Plongeurs, qui ayant la vûe fort courte à cause de la figure très-convexe de leur crystallin, peuvent voir très-distinctement dans l'eau comme les Poissons, des objets éloignés dont les raïons dans l'air concouroient entre le crystallin & le fond de l'œil, & rencontrant le fond de l'œil dans un espace considerable s'y confondroient, & par conséquent feroient une vision confuse.

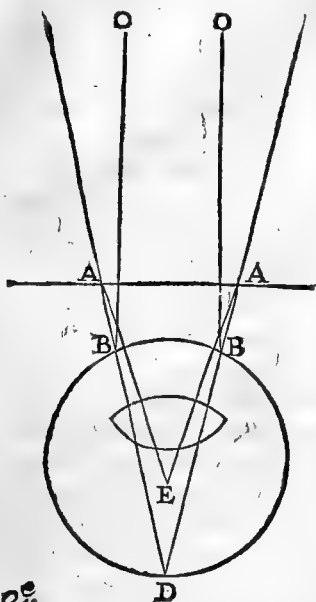
Il faut maintenant expliquer pourquoi l'œil du Chat étant plongé dans l'eau, on apperçoit distinctement toutes les parties du fond de l'œil comme s'il n'étoit point rempli d'humeurs.

Il est certain que plus les fenêtres d'une chambre sont grandes, les objets y seront d'autant plus éclairés, & qu'on pourra les voir plus distinctement; c'est pourquoi on pourra voir bien mieux les parties du fond de l'œil du Chat plongé dans l'eau quand la prunelle est fort dilatée, que si elle étoit reserrée. Mais ce n'est pas seulement la grande ouverture de la prunelle, qui fait qu'on peut voir distinctement les objets, puisque dans les hommes qui ont la goutte seréne, & dont la prunelle est fort ouverte, on ne peut rien appercevoir du fond de l'œil qui est exposé à l'air. C'est donc l'eau qui touche l'œil laquelle fait qu'on peut voir ces objets, & c'est ce qu'il faut expliquer par les mêmes principes d'Optique, dont nous nous sommes servis d'abord.

Lorsqu'un œil bien conformé est dans l'air, les raïons qui partent d'un point comme *D* de son fond, (*fig. suiv.*) ayant passé par les trois surfaces de ses humeurs, s'y détournent de telle maniere, qu'ils en sortent comme paralleles entr'eux; c'est pourquoi nous pourrions voir distinctement cet objet *D*, puisque des raïons paralleles ou comme paralleles sont toujours dans notre œil une vision distincte, cependant nous ne voïons pas cet objet *D*.

Examinons maintenant ce qui doit arriver à ces mêmes

raisons qui partent du point *D* du fond de l'œil dans l'animal lorsqu'il est plongé dans l'eau.



22

Soit comme cy-devant l'œil de l'animal *BBD* plongé dans l'eau, dont la surface est *AA*. Il s'ensuit que les raisons *DB* qui partent du point *D* du fond de l'œil, s'étant un peu détournés ou rompus sur les deux surfaces du crystallin, doivent rencontrer la cornée étant encore divergens : mais comme à la sortie de la cornée en *BB* ils rencontrent l'eau *AA*, dont la refraction n'est pas sensiblement différente de celle de l'humeur aqueuse où ils passioient en touchant la cornée, ils doivent continuer leur route par la même ligne droite & rester encore divergens jusqu'à la surface de l'eau en *A*, d'où enfin ils doi-

vent sortir pour entrer dans l'air étant encore plus divergens qu'ils n'étoient dans l'eau par les loix de la Dioptrique ; & par conséquent en quelqu'endroit que nous placions notre œil pour recevoir ces raisons divergens, qui sont alors dirigés comme s'ils venoient du point *E* plus proche de la cornée que le point *D*, nous pourrons appercevoir très-distinctement le point *D* comme placé en *E* & dans l'air.

C'est là ce que produit la surface plane de l'eau sur ces raisons ; mais il y a encore une autre remarque à faire , qui nous fait connoître pourquoi nous ne voions pas l'objet *D* du fond de l'œil quand il est hors de l'eau, & pourquoi nous le voions quand il y est plongé.

La surface de tous les corps polis renvoie la lumiere , & la renvoie ou la réfléchit d'autant plus fortement qu'elle

est plus polie ; & si ces corps polis sont aussi transparens ; une partie de la lumiere passera au travers du corps , & une autre partie se réfléchira , & ce sera toujours à proportion de la transparence & du poli. Mais comme nous n'avons point de corps dont la surface soit plus polie que celle des liquides , on pourroit dire qu'il entreroit dans l'œil exposé à l'air , bien moins de raïons de lumiere qu'il n'en entredans l'eau , si la cornée n'étoit toujours enduite d'une liqueur claire & onctueuse. Ce n'est donc pas par cette raison qu'on ne voit pas le fond de l'œil dont la cornée est exposée à l'air , & qu'on le voit quand l'œil est dans l'eau ; car s'il se réfléchit des raïons de la lumiere sur la cornée dans l'air , ils'en réfléchit aussi sur la surface de l'eau & presque en égale quantité ; ce qui est contre l'opinion de quelques-uns , qui ont prétendu qu'il s'en perdoit beaucoup sur la cornée dans l'air , & qui n'ont point fait attention qu'il ne s'en perdoit pas moins sur la surface de l'eau.

Mais ce n'est pas tant la quantité des raïons qui se réfléchissent sur la cornée ou sur l'eau qu'il faut considérer , dans ce qui peut apporter quelque empêchement à une vision bien claire , quoique les raïons soient disposés comme il faut pour la faire , que la direction de ces mêmes raïons réfléchis. Car si ces raïons réfléchis sont paralleles ou à peu près à l'axe de l'œil qui rencontre le principal organe de la vision où l'on voit le plus distinctement les objets & où est peint l'objet qu'on considere attentivement , on doit voir une assez grande lumiere en cet endroit , laquelle par son éclat empêchera de distinguer ces objets , qui d'ailleurs sont d'une couleur obscure ; & c'est ce qui arrivera à la cornée d'un œil , quoique la lumiere ne l'éclaire que de biais. Car la cornée étant de figure convexe , il peut y avoir des raïons qui frapperont dessus obliquement , lesquels seront dirigés ou à peu près suivant l'axe de l'œil de celui qui regarde ; ce qui n'arrive pas à une superficie plane laquelle seroit perpendiculaire à cet axe , où ces raïons se réfléchiroient suivant

la même inclinaison à la superficie, avec laquelle ils l'auroient rencontrée. C'est pourquoi on pourra voir bien plus distinctement & sans le mélange de cette lumiere étrangere, les parties du fond de l'œil du Chat plongé dans l'eau, que s'il étoit exposé à l'air. C'est aussi pour cette raison, que lorsqu'on est à l'air hors d'une chambre & qu'on regarde au travers des vitres quoique fort nettes, les objets qui y sont, on ne peut les entrevoir qu'avec peine, à cause de l'inégalité de la surface du verre qui réfléchit la lumiere de tous côtés.

On pourra faire l'experience de ce que j'avance ici, en regardant un objet au travers d'une bouteille de verre qui soit ronde, & ensuite au travers d'un morceau de glace plan, la lumiere donnant de même maniere sur les surfaces spherique & plane de ces deux verres: car la tête de celui qui regarde de près, empêcheroit les raïons qui tomberoient sur le verre plan, & qui pourroient se réfléchir dans l'œil vers l'axe de la vision; mais ce ne sera pas la même chose sur la surface du verre de la bouteille, où il y en aura toujours qui entreront dans l'œil à peu près paralleles à l'axe, à cause de la figure convexe de la bouteille.

Dans tout ce que j'ai dit cy-dessus, je n'ai point marqué quelle partie de l'œil je prenois pour le principal organe de la vûë; & je ne croïois pas après toutes les raisons que j'ai raportées dans le Memoire dont j'ai parlé d'abord, qu'il pût rester aucun lieu de douter quelle étoit la partie qui doit être le principal organe de la vision. Cependant un des plus celebres Anatomistes de cette Compagnie aïant examiné le fait qui est le sujet de ce Memoire, & en aïant rendu raison d'une maniere fort sçavante par le mouvement des esprits animaux dans l'œil du Chat, prend parti pour la choroïde contre la retine, en suivant à ce qu'il dit le sentiment de M. Mariotte.

La découverte de M. Mariotte est une des plus curieuses qu'on ait faites dans la Physique; & comme l'expe-

rience en est très-facile à faire, on ne sçauroit en douter. Cependant je dis encore ici, que le défaut de vision à l'endroit où la retine est percée par la choroïde, ne prouve rien contre la retine, & que la choroïde ne peut être considérée que comme un organe moien qui communique à la retine l'ébranlement ou le mouvement qu'elle reçoit de la lumiere avec ses différentes modifications. En effet peut-on rechercher le principal organe d'un sens autre part que dans les nerfs qui ont communication avec le cerveau, & qui peuvent faire connoître à l'ame sous différentes apparences ce qui se passe hors du corps, & cela par l'entremise d'un certain milieu propre à les mouvoir ; car les nerfs sont des parties trop délicates pour être exposées à découvert.

Ce sera la même chose pour les autres sens que pour la vûë, & l'on ne dira pas que la peau qui couvre tout le corps, soit le principal organe du toucher, ni que la membrane du tambour de l'oreille le soit de l'ouïe, non plus que la peau de la langue est celui du goût, à cause que lorsque cette peau est brûlée, on n'a plus aucun sentiment des saveurs.

La couleur noire de la choroïde est très-propre pour être sensiblement ébranlée par tous les differens & les moindres mouvemens de la lumiere, comme on voit dans l'experience du papier blanc exposé à un miroir ardent, qui ne peut s'enflammer à moins qu'il ne soit noirci ; car le mouvement des particules du corps qui transmet la lumiere, ou la lumiere elle-même, agit fortement entre les pointes herissées des corps noirs où elle s'engage ; au lieu qu'elle ne fait que se réfléchir sur les corps blancs qui ne sont composés que de parties fort polies comme de petit miroirs. La retine ne sera donc pas ébranlée par une reflexion des raïons lumineux sur la choroïde qui est noire, comme prétend notre Anatomiste. Enfin la conclusion de son Memoire me fait connoître qu'il n'est pas du sentiment de M. Mariotte comme il dit, mais qu'il a suivi le mien en changeant seulement la définition
du

du principal organe de la vision qu'il donne à la choroïde & moi à la retine. Ainsi toute la difference qu'il y aura entre lui & moi ne sera que du nom du principal organe, à l'explication près qu'il met dans une reflexion des rayons lumineux sur la choroïde, & moi dans un ébranlement des parties de la choroïde pour se transmettre au nerf optique ou à la retine.

Pour ce qui est du sentiment de M. Mariotte, il croit que la choroïde est le principal & le seul organe de la vision, & que c'est cette membrane toute seule qui porte au cerveau les sensations des couleurs, puisqu'étant une production de la piemere, elle accompagne le nerf optique dans tout son chemin jusqu'à l'œil, où étant parvenue elle forme la choroïde; & enfin, que le nerf optique ne sert qu'à contenir les esprits & qu'il n'a point de filers. On peut voir ce sentiment expliqué fort au long avec toutes les raisons qu'il apporte pour le soutenir dans ses lettres écrites au sujet de sa découverte, & dans celles de MM. Pecquet & Perrault, qui lui marquoient les difficultés qu'ils trouvoient à abandonner l'opinion des Anciens.

Mais il me semble qu'il n'est pas aisé de concevoir, comment l'ame peut avoir la sensation d'une très-grande quantité d'objets qu'on apperçoit tout à la fois & dans l'ordre où ils sont, sans imaginer une infinité de filers très-déliés qui composent le nerf optique & qui sont disposés par ordre sur toute la surface de la retine, ce que la seule membrane de la piemere ou de la choroïde ne pourroit pas faire sans une grande confusion, quand même elle auroit des filers comme ceux du nerf optique. Mais on voit que les fonctions que j'attribuë à la choroïde & à la retine, sont toutes deux ensemble nécessaires à la vision, & que l'une sans l'autre elle ne peut pas se faire.

Je pourrois encore ajouter ici qu'on n'apperçoit les couleurs que par un sentiment de chaleur; car personne ne doute qu'il n'y a point de lumiere sans chaleur, soit que cette lumiere vienne directement du corps lumineux

ou par réflexion. Mais comme cette chaleur est ordinairement si foible, sur tout si le corps lumineux est fort éloigné du corps qu'il éclaire, il falloit qu'il entrât dans l'œil une assez grande quantité de ces raions, & qu'à même tems ils se rassemblent en un point sur le corps noir de la choroïde, pour y faire une plus forte impression, & pour ne faire aucune confusion avec ceux qui viennent d'autres points lumineux, & tout proche, & modifiés en des manieres différentes que le sens du toucher ne peut pas appercevoir. C'est une pensée qu'on pourroit à ce qu'il me semble, appuyer de très-fortes raisons.

SUITE DES ESSAIS

DE CHIMIE

Art. IV. du Mercure.

PAR M. HOMBERG.

Pour éviter toute équivoque, je n'appellerai Mercure que ce que l'on appelle ordinairement Vif-argent, c'est à dire un liquide ressemblant parfaitement à du métal fondu, qui pèse à peu près autant que l'argent, & qui ne mouille que les métaux. Quoique je sois persuadé que le Mercure n'a pas le caractère des principes, qui est que sa substance ne puisse par aucune analyse être réduite en des matieres plus simples, je le mets néanmoins au nombre de mes Principes Chimiques, parce que cette analyse n'a pas encore été trouvée, bien qu'il y ait lieu de croire qu'on pourra dans la suite la trouver, & qu'alors il en sera rejeté, toutes les apparences étant que le Mercure est un composé.

La raison qui me le fait soupçonner, est qu'on le peut détruire; ce qui n'arrive jamais à un corps simple, & d'ailleurs après sa destruction il ne reste qu'une matiere

qui paroît simplement terreuse, sans laisser aucune marque des parties qui peuvent être entrées dans sa composition, & sans que je voie encore aucun moyen pour les découvrir. Je ne suis donc aucunement instruit des parties qui le composent, & par conséquent le Mercure est à mon égard comme un être simple, qui doit trouver place parmi mes Principes Chimiques, jusques à ce qu'on ait découvert les parties qui le composent.

La maniere dont je me suis servi pour le détruire, est de changer premièrement le Mercure coulant en métal parfait, en introduisant dans sa substance une quantité suffisante de la matiere de la lumiere, ce qui se fait par une fort longue operation & avec beaucoup de dépense, comme je l'ai enseigné dans mon article du Soufre principe, & quand il est devenu métal, il faut l'exposer au verre ardent, où en peu de tems presque toute sa substance s'en va en fumée; & il ne reste qu'une poudre terreuse & legere, si c'est de l'argent qu'on a exposé au verre ardent; ou un peu de terre, qui à la fin devient aussi une matiere terreuse & friable, si c'est de l'or qu'on a exposé.

J'ai montré dans mon Article du Soufre principe, que le métal parfait n'est autre chose que du Mercure très-pur, dont les petites parties sont percées de toutes parts & remplies de la matiere de la lumiere, qui les lie & qui les unit ensemble en une masse; de sorte que les parties du Mercure coulant, que j'ai supposé être des petites boules polies & solides, deviennent dans leur métallification des petits corps raboteux & percés de toutes parts, dont à la verité les trous ou les pertuis sont remplis de la matiere de la lumiere, mais qui ne laissent pas de perdre par là leur premiere conformation & la polissure de leurs surfaces, qui est une des principales causes de la fluidité du Mercure.

Ainsi la substance du Mercure aiant changé absolument de figure en devenant métal, il doit s'ensuire, qu'après la destruction du métal au verre ardent, le résidu

ne doit pas être du Mercure coulant , mais une matiere qui ne sera ni métal ni Mercure , & qui m'a paruë une matiere simplement terreuse ; car il y a toute apparence , qu'il n'arrive autre chose au métal parfait pendant cette operation au Soleil , que la séparation seulement de la matiere de la lumiere d'avec les petites boules de Mercure que cette matiere avoit percé de toutes parts , & s'étoit logée dans les trous qu'elle y avoit faits , puisque l'union des deux faisoit le métal.

Or cette matiere aiant été chassée de ces trous , ils doivent rester vuides , & par conséquent ce qui étoit autrefois des petites boules solides de Mercure , doit devenir de petits corps spongieux ou percés à jour de toutes parts , que l'on pourroit comparer en quelque façon à la matiere des pierres ponces , & que l'on pourroit appeller le squelette ou les restes du Mercure ; de sorte que l'on peut vraisemblablement conclure , que cette destruction du métal ne consiste pas en une séparation analytique des parties dont chaque petite boule de Mercure est composée , mais seulement en un simple brisement de ces petites boules par l'action violente des raïons concentrés du Soleil , qui néanmoins ne laissent pas de détruire absolument la figure de ces petites boules , en quoi consiste uniquement la forme & la substance du Mercure ; car la solidité de ces petites boules étant un attribut essentiel du Mercure coulant aussi bien que la polissure , qu'elles perdent absolument & pour jamais par l'action que la matiere de la lumiere fait sur elles , ce qui étoit Mercure coulant avant la métallification , ne peut plus paroître sous la même forme après la destruction du métal , & n'est plus qu'une matiere simplement terreuse , qui se vitrifie au grand feu , comme c'est en effet ce que nous voïons arriver aux matieres qui restent après la destruction de l'or & de l'argent au verre ardent , dont les unes se fondent aisément & sans y ajouter aucun fondant ; & les autres ne se fondent qu'en y en ajoutant , de la même maniere que se font les vitrifications de toutes les autres matieres terreuses les plus communes.

Nous pouvons donc considerer la figure du Mercure en trois états differens ; le premier est , lorsqu'il est en sa forme de Mercure coulant ; le second est , lorsqu'il est devenu métal ; & le troisiéme est celui qu'il prend après la destruction du métal. Dans le premier état sa matiere consiste en petites boules solides & fort polies ; dans le second elle consiste en ces mêmes petites boules que la matiere de la lumiere peu à peu a percées de toutes parts de trous fort fins , & qui s'est logée à demeure dans les trous qu'elle y a faits ; dans le troisiéme état elle consiste en ces mêmes petites boules percées de toutes parts , mais dont les trous sont vuides , & au travers desquels il a passé une si grande quantité de matiere de la lumiere tout à la fois pendant la destruction du métal ; que les petits trous dont ces boules avoient été percées d'abord , se sont confondus , & sont devenus si grands , qu'ils n'ont pû arrêter & retenir la matiere de la lumiere , comme ils avoient fait étant encore dans leur premiere petiteffe , à peu près comme l'eau qui se soutient & reste dans des tuyaux fort fins & capillaires , s'écoule promptement & ne scauroit s'arrêter dans des tuyaux un peu larges.

Dans le premier cas ces boules sont du vrai Mercure , dans le second ce n'est plus du Mercure , mais du métal , qui a été autrefois du Mercure ; & dans le troisiéme cas , ce sont les fragmens & les parties ruinées du Mercure qui étoit entré dans la composition du métal , & que l'on doit prendre en cet état pour une matiere simplement terreuse , aussi peu disposée de redevenir Mercure ou métal , que l'est la terre glaise ou toute autre sorte de terre.

Tout ce que nous venons de dire de la destruction de l'or & de l'argent , étant vrai , c'est à dire , que la grande quantité de rayons du Soleil qui partent du verre ardent , chassent la matiere de la lumiere qui s'étoit arrêtée dans les petits pertuis des boules du Mercure , qu'ils les élargissent trop & les corrompent , de sorte que ces pertuis ne retiennent plus la matiere de la lumiere , & que ces

boules ainsi corrompues restent après la destruction du métal en forme d'une matiere simplement terreuse, il sembleroit que cette matiere devroit égaler à peu près en poids la quantité du métal qui a été détruit, parce que le Mercure qui fait la plus grande partie du métal, aura toujours son même poids, qu'il soit brisé en fragmens, ou qu'il soit conservé en boules entieres; cependant nous voions qu'il ne reste après la destruction d'une certaine quantité d'or, qu'environ un trentième d'une terre vitrifiée, & un soixantième environ d'une poudre terreuse après la destruction de l'argent; mais on n'en fera pas étonné quand on considerera, que les raïons de lumiere, passant avec une vitesse extrême au travers de la masse du métal fondu, emportent avec eux en forme de fumée la plus grande partie du métal, à mesure qu'il se détruit, comme tous ceux qui ont vû faire cette operation au verre ardent, l'ont pû observer; & comme la fumée qui s'élève de l'argent est beaucoup plus épaisse, & par conséquent en plus grande quantité que celle qui s'élève de l'or, la dissipation des parties détruites de l'argent doit être plus grande que celle de l'or; aussi voions-nous, que l'un laisse deux fois autant de matiere terreuse après sa destruction que l'autre, & qu'il n'en reste entre les mains de celui qui conduit l'operation, qu'une très-petite partie, qui a échapé à l'effort violent & prompt des raïons concentrés du Soleil.

Mais pour mieux concevoir de quelle maniere le Mercure devenu métal, peut être détruit par la pénétration des raïons du Soleil, qui sont la même matiere de la lumiere, qui par une autre pénétration, avoit changé ce même Mercure en métal parfait, il sera bon d'établir nettement ce que j'entens par métal. Je dis donc que le métal parfait est du Mercure très-pur, dont les petites boules ont été percées peu à peu de toutes parts par la matiere de la lumiere; que les trous ou les pertuis qu'elle y a faits, sont entierement pleins de cette matiere; que ces pertuis sont si menues, que la matiere de la lumiere

qui s'y est introduite, y est restée attachée par son gluten naturel; que les extrémités des pertuis d'une petite boule de Mercure, touchant les extrémités des pertuis de plusieurs autres boules de Mercure, les attachent ensemble par la partie de la matiere de la lumiere qui se trouve aux extrémités des pertuis qui se touchent immédiatement, & que de cette maniere toute la masse du Mercure se doit attacher ensemble. J'appelle métal la masse du Mercure dont les parties sont ainsi attachées & unies ensemble par la matiere de la lumiere: Et j'appelle Soufre métallique la matiere de la lumiere qui a pénétré les globules du Mercure, & qui par son gluten naturel, est restée dedans les pertuis qu'elle y a faits, sans que cette matiere ait changé en aucune façon; de sorte que si par quelque accident elle peut ressortir de ces pertuis, elle rentrera dans la grande masse de la matiere de la lumiere qui occupe tout l'espace de l'univers; & en cet état elle ne fera plus la fonction de Soufre métallique, mais simplement celle du Soufre principe, jusques à ce qu'elle se soit réintroduite de nouveau dans d'autres globules de Mercure, & elle sera aussi propre à devenir un Soufre animal, vegetal ou bitumineux, qu'à redevenir un Soufre métallique, comme je l'ai expliqué amplement dans mes Memoires du Soufre principe.

Cette description du métal ne convient pas aux moindres métaux comme nous le ferons voir dans la suite de ce Memoire, mais seulement aux métaux parfaits, c'est à dire à l'or & à l'argent. La difference de ces deux métaux me paroît ne consister, qu'en ce que les petites boules du Mercure qui entrent dans la composition de l'un, sont percées d'outre en outre par la plus grande quantité de trous ou de pertuis que les surfaces de ces boules sont capables de recevoir; & que celles de l'autre n'ont pas été percées d'outre en outre par la matiere de la lumiere, qui n'y a fait seulement que des trous assés profonds pour s'y loger simplement, & en bien moindre quantité que dans le premier; de sorte que toute la sur-

face de ces boules n'en est pas percée, mais seulement en autant d'endroits qu'il étoit nécessaire pour qu'elles se pussent coller ou s'attacher ensemble & devenir métal; ainsi dans l'un il se trouve une très-grande quantité de matiere de la lumiere ou de Soufre métallique, qui traverse de toutes parts la substance des boules du Mercure, & qui en couvre toutes les surfaces; & dans l'autre il se trouve peu de Soufre métallique, qui ne traverse pas toute la substance des boules du Mercure, & qui ne les perce que peu profondement, & en peu d'endroits; de sorte qu'il n'y a que peu de Soufre métallique sur leurs superficies, & par conséquent qu'il en entre beaucoup moins dans la composition de celui-ci que dans la composition de l'autre; c'est l'or qui est si riche en Soufre métallique, & c'est l'argent qui en a moins; aussi leur en est-il resté des marques incontestables, car la quantité de Soufre métallique qui se trouve dans l'or, ayant couvert presque toutes les surfaces des boules de son Mercure, il en a effacé la couleur naturelle, & les a teints de sa propre couleur, ce qui fait la couleur jaune de l'or; & cette même quantité de Soufre ayant pénétré & rempli toute la substance de ce Mercure, a ajouté son poids à celui du Mercure; & comme les parties de ce Soufre sont les plus petites de tous les corps que nous connoissons, elles se sont introduites dans le Mercure sans en augmenter le volume, ce qui fait le grand poids de l'or en si peu de volume, mais le Soufre métallique qui entre dans la composition de l'argent, étant en très-petite quantité, il n'a pas augmenté le poids du Mercure & n'en a pu changer la couleur naturelle, ce qui fait la blancheur de l'argent, & son peu de poids en le comparant à l'or.

La matiere de la lumiere qui penetre peu à peu les boules du Mercure pour les mettre en état de se pouvoir lier ensemble & devenir métal, ne peuvent pas faire cette pénétration qu'en employant beaucoup de temps; & comme nous avons supposé que dans l'argent, la matiere

tiere de la lumiere n'a penetré les boules du Mercure que peu avant dans la substance de ces boules, & que les trous qu'elle y a faits sont en petit nombre, & qu'au contraire dans l'or les boules du Mercure ont été percées d'outre en outre, & que les pertuis qui y ont été faits, y sont en aussi grand nombre que les surfaces de ces boules ont été capables d'en recevoir, il doit s'ensuivre que pour la perfection de l'argent, la matiere de la lumiere doit employer bien moins de tems que pour la perfection de l'or; & que par la même raison tout or pourroit bien avoir été argent avant que d'avoir pû atteindre à sa propre perfection, & par conséquent aussi que tout argent peut devenir or, pourvû qu'il soit en telle situation, que la matiere de la lumiere y puisse continuer son action; on en pourroit même tirer encore cette conséquence, qu'il doit se trouver un métal mitoyen entre l'or & l'argent; car il est bien difficile qu'on rencontre toujours précisément dans les mines la perfection de l'or ou celle de l'argent; les experiences suivantes confirmeront & éclairciront ces idées.

Prenez un marc ou deux d'argent; faites-en le départ, pour être assuré qu'il ne contienne pas quelques parcelles d'or, fondez cet argent une centaine de fois de suite, en le tenant à chaque fois au moins une heure en fonte; faites-en après le départ, vous en séparerez une quantité très-sensible d'or qui n'y étoit pas auparavant, puisqu'en premier lieu par la même épreuve du départ, on en avoit séparé tout ce qu'il pouvoit contenir d'or.

La matiere de la lumiere qui compose avec l'huile du charbon la flame qui met l'argent en fonte, touche & frappe immédiatement chaque petit globule de l'argent pendant tout le tems qu'il est en fonte, & s'y enfonce de plus en plus; & comme tous ces globules dans cette masse d'argent ne sont pas également penetrés par la matiere de la lumiere, c'est à dire que quelques-uns approchent plus de la perfection de l'or, ceux qui sont les plus proches achevent pendant ces différentes fontes

114 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
d'être pénétrés au point qu'il faut pour paroître de l'or ,
& ils en sont séparés par le départ , & sont du véritable
or à toutes épreuves.

Cette operation est longue & pénible , mais convain-
cante. En voici une seconde qui se fait en moins de tems ,
& qui ne laisse pas de prouver fort bien que dans l'ar-
gent il y a des parties qui ne sont pas encore de l'or , mais
qui le deviennent aisément. Prenez un marc d'argent ,
dissolvez-le dans l'eau forte , séparez-en tout ce qui n'a
pas été dissous & qui est resté au fond du vaisseau ; pré-
cipitez cette dissolution par le sel commun , édulcorez
le précipité & séchez-le ; ajoutez à cette chaux d'argent
la moitié de son poids de Régule de Mars bien rectifié
& en poudre ; mêlez bien & distillez au feu de sable par
la cornue , il en sortira environ trois onces ou plus de
beure d'antimoine ; poussez le feu jusques à la dernière
rigueur , l'argent restera au fond de la cornue mêlé d'une
partie de Régule ; mettez cet argent dans un creuset ou-
vert au feu de fonte ; laissez-le fumer jusqu'à ce qu'il
n'en sorte plus de fumée , c'est à dire , jusques à ce que
tout le Régule en soit évaporé ; refondez cet argent en-
core une fois ou deux dans des creusets neufs avec un
peu de borax & de salpêtre , il sera plus beau & plus
doux que l'argent de coupelle ; mettez cet argent en
grenailles ; dissolvez-le dans l'eau forte , il vous restera
beaucoup de paillettes noires , fondez-les , ce sera de l'or :
faites cette operation une seconde fois avec ce même ar-
gent & du semblable Régule , il vous restera très-peu de
paillettes noires : réiterez cette operation pour la troisié-
me fois avec le même argent , vous n'en aurez plus de
paillettes noires. Dans la première operation tous les
globules qui sont fort proches de la perfection de l'or ,
achevent de se perfectionner , & tombent en paillettes
noires : Dans la seconde , il s'en acheve encore quelques-
uns ; & dans la troisième il ne s'en trouve plus , ayant été
épuisés par les deux premières operations. On ne pourra
pas dire ici , que le Régule de Mars ait produit ces pail-

lettres noires, car il s'en feroit trouvé une auffi grande quantité dans la feconde & dans la troiſième operations, qu'il en eſt reſté dans la premiere; cependant il n'y en a que très-peu dans la feconde; & il n'y en a point du tout dans la troiſième.

Ajoutez, que l'on trouve très-souvent de l'or dans les mines qui eſt plus pâle que l'or fin ne doit être, ſans qu'on en puiſſe ſéparer aucunes parties d'argent, & qui par quelques fontes acheve de ſe perfectionner; & pour lors il paroît de la couleur qu'il doit avoir. L'on trouve donc dans l'argent une matiere qui devient or, & dans l'or une matiere blanchâtre, qui par le feu acheve de prendre la vraie couleur d'or. Ce ſont ces deux matieres qui ſont le métal moïen entre l'or & l'argent, mais qui ne demeurent pas long-tems dans cet état, chaque fonte les approchant de plus en plus à la perfection de l'or.

Nous avons remarqué ci-deſſus, que les extrémitez des trous, dont les boules du Mercure ſont percées, en ſe touchant immédiatement, joignent ces boules enſemble par le moïen du ſoufre métallique, qui ſe trouve aux extrémitez de ces trous, & que ce ſont là les ſeuls liens par où les parties du métal ſont liées enſemble; Nous venons de remarquer auffi, que dans l'or toute la ſurface des boules du Mercure eſt percée de trous, c'eſt-à-dire, qu'ils y ſont fort près les uns des autres, & que dans l'argent ces trous ſont plus rares, il doit donc ſ'enſuivre, que les interſtices de ces trous, ou les eſpaces entre les liens dont les parties de l'argent ſont liées, ſont plus grands que les eſpaces qui ſont entre les liens dont les parties de l'or ſont liées; j'appelle ces interſtices, ou les eſpaces qui ſe trouvent entre les liens dont les parties d'un métal ſont liées enſemble, les pores du métal; & comme la diſſolution d'un corps n'eſt autre choſe que l'introduction dans les pores de ce corps d'un liquide étranger, qui ſoit capable d'en deſunir ou d'en écarter les parties: ce liquide étranger ou ce diſſolvant, pour pouvoir faire la deſunion des parties, doit être proportionné

aux pores dans lesquels il doit entrer; & par conséquent le dissolvant de l'or sera différent du dissolvant de l'argent, puisque l'un a les pores fort grands, & que l'autre les a fort petits; aussi voyons-nous que les eaux-fortes, qui sont les dissolvans de l'argent, ne dissolvent pas l'or; & que les eaux regales, qui dissolvent l'or, ne dissolvent pas l'argent.

Ces dissolvans, ne pénétrant pas dans la substance même du métal, ne sçauroit le détruire; car la matiere qui lie les parties du métal, étant la plus petite de toutes celles qui existent, & étant logée dans des pertuis aussi petits qu'elle, le dissolvant n'y sçauroit entrer pour l'en faire sortir & la séparer d'avec le mercure, ce qui seroit détruire le métal. Ils ne font donc autre chose en s'introduisant dans les pores du metal, que d'écarter seulement les petites boules de mercure les unes des autres, le soufre métallique qui les avoit collées ou liées ensemble restant toujours dans le même état, en la même quantité & aux mêmes endroits où il étoit auparavant, & par conséquent les parties du métal desunies par le dissolvant, sont toujours disposées à se rejoindre ensemble lorsqu'elles peuvent se retoucher immédiatement; & alors elles reparoissent dans la même forme de métal qu'elles avoient avant leur dissolution.

Il arrive dans la fonte du métal par le grand feu, à peu près la même chose que ce que nous venons de remarquer dans la dissolution faite par les liqueurs aqueuses; la flamme qui y sert de dissolvant, s'introduit dans les pores du métal & en écarte simplement les parties, sans détruire en aucune façon le soufre métallique qui les avoit liées ensemble; & cela par la même raison que nous venons d'alleguer tout à l'heure. Il y a cependant cette différence entre la fonte & ces autres dissolutions, que tout aussi-tôt que la flamme cesse, le métal cesse aussi d'être fondu, & les parties se rejoignent ensemble dans la même forme qu'elles étoient avant la fonte; ce qui n'arrive pas au métal dissous par une liqueur aqueuse, parce que

ses parties détruites restent mêlées avec le dissolvant, jusques à ce que par une industrie on en sépare tout le dissolvant, & que par là les parties du métal se puissent retoucher immédiatement & se rejoindre.

La raison de cette différence est que la flamme, qui est le dissolvant dans la fonte, est plus legere que l'air qui est à l'entour de nous; & comme elle est un liquide aussi-bien que l'air, ces deux liquides se rangent selon les loix de l'équilibre des liqueurs, où le plus léger est toujours enlevé par le plus pesant; ainsi l'air ambiant aiant enlevé la flamme qui s'étoit introduite parmi les parties du métal & qui les enveloppoit, rien ne les empêche plus de se toucher immédiatement; & comme la flamme n'est pas capable de détruire ou d'enlever le soufre métallique qui se trouve aux extremités des pertuits creusés dans les boules du Mercure, ce soufre se touchant immédiatement, se reprend & rejoint de nouveau les boules du Mercure en une masse de métal.

Mais dans la dissolution faite par une liqueur aqueuse, cette liqueur étant plus pesante que l'air qui l'environne, elle reste toujours dans le même lieu & enveloppe les parties du métal, & les empêche par-là de se toucher immédiatement & de se rejoindre en une masse de métal, jusques à ce que par le grand feu on la réduise en vapeurs, qui sont plus legeres que l'air, & en sont enlevées comme dans le cas précédent, & les parties du métal se rejoignent de la même maniere en une masse solide, comme elles avoient été auparavant.

J'examinerai les moindres métaux dans un autre Memoire, & j'y ajouterai le reste de mes observations sur le Mercure.

PROBLEME GEOMETRIQUE

PAR M. PARENT.

1709.
23. Mars.

Trouver des Cylindres, des Cônes circulaires, elliptiques, paraboliques, entiers ou tronqués; des Segmens de sphère, des Paraboloides, &c. égaux en même tems en surface courbe & en solidité avec une même sphère.

1°. Soit EB le rayon de la Sphère proposée $ACBDE$ $= r$, (1. fig.) $ACBD$ sa circonference $= c$, on aura sa surface $= 2rc$, & sa solidité $= \frac{2}{3}cr^2$, ce qui est connu de tous les Geomètres.

Prenant donc pour la valeur d' r , le nombre 100,000, par exemple, on aura pour le circuit $ACBD$, 628, 318, suivant la proportion de Ludolphe de Cologne, à moins d'une unité près; pour la surface de la sphère, 125, 663, 600,000, & pour la solidité, 4,188,786,666,666,666.

2°. Soit maintenant $AGDCE$ (2. fig.) un Cylindre circulaire droit, qui doit avoir le raport proposé avec la sphère cy-dessus. Soit nommé le rayon AF de sa base (m), & sa hauteur AG , l , qui marquent deux quantités inconnues. On trouvera le circuit $AECA$ de cette bâte par cette analogie $r.c :: m.\frac{cm}{r}$. D'où l'on tirera $\frac{cm}{r}$ pour la surface convexe du Cylindre qui doit être égale à la surface sphérique proposée $2rc$. D'où l'on tire pour une premiere valeur de l'inconnue $l; \frac{2r^2}{m}$.

On aura aussi pour bâte du Cylindre; $\frac{cm^2}{2r}$, ce qui donnera sa solidité $= \frac{cm^2l}{2r}$, qui doit être encore égale à celle de la même sphère; $\frac{2}{3}cr^2$, d'où l'on tire une 2^e valeur de l'inconnue $l = \frac{4r^3}{3m^2}$.

Egalant donc maintenant ces deux valeurs de l , on en tire l'égalité déterminée $\frac{4r^3}{3m^2} = \frac{2r^2}{m}$, & enfin $m = \frac{2}{3}r$, ou $AF = \frac{2}{3}EB$; $AC = \frac{2}{3}AB$: d'où l'on tire $l = \frac{2r^2}{\frac{2}{3}r} = 3r$, c'est à dire $AG = 3BE$, & $\frac{1}{3}AG = BE = AB$. Donc $AC :: AB :: AG$, qui est une propriété singulière de la Sphère & du Cylindre ainsi comparez. Il est évident qu'on a aussi $AC \cdot AG :: AC^2 \cdot AB^2 :: 4 \cdot 9$, ce qui détermine ce Cylindre à être unique en son espèce. Aiant donc une telle Sphère, rien n'est plus aisé, que de trouver un tel Cylindre, & tout au contraire.

Delà on tire AF de 66,666 centmilièmes du rayon de la Sphère, $AECA$ de 418,874, & AG de 300,000, sçavoir à moins d'une unité près. La surface du Cylindre sera donc $= 125,663,700,000$, qui ne diffère de celle de la Sphère que de $\frac{1}{1,256,637}$; & sa solidité sera de 4,188,790,000,950,000, qui n'est différente de celle de la même Sphère que de $\frac{1}{418,879}$; ce qui vient de ce que la proportion de r , à c , qu'on a prise, n'est juste qu'à environ une unité près.

3°. Si l'on suppose un Segment sphérique $ACBG$ (3. fig.) dont C soit le pôle, $AGBA$ la base, qui ait AB pour diamètre, & F pour centre, en sorte que CF soit l'axe du Segment; soit aussi CB la distance de son pôle à sa base. Le cercle dont CB seroit rayon sera égal à la surface convexe du Segment $ACBG$; ce qui est connu de tous les Geomètres. Si l'on suppose donc que ce Segment soit égal en surface convexe & en solidité avec la Sphère précédente, dont la surface vaut 4 fois celle de son grand cercle, il est évident que CB sera double du rayon de ce grand cercle, ou $= 2r$, tels que soient la hauteur CF , & le diamètre AB , ce qui est déjà une propriété singulière. Il ne reste donc que de nommer CF par une inconnue (u) par exemple; ce qui donnera $BF^2 = 4r^2 - u^2$, & $AB^2 = 16r^2 - 4u^2$. Donc $2CB^2 + FB^2 \times \frac{1}{3}CF \times \frac{c}{8r}$ (que) j'ai

démontré l'année dernière en cette Assemblée valoir toujours la solidité d'un Segment sphérique) vaudra $\frac{6r^2u-u^3}{6r}$,

qui doit être égale à la Surface sphérique, $\frac{4}{3}cr^2$. D'où l'on tire l'égalité $u^3 = 6r^2u - 4r^3$, qui est dans le cas de la Trisection de l'angle, & qui ne laisse pas de donner pour les 2 valeurs de (u) ou de CF , $2r$, & $r\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, ce qu'il est aisé à voir en substituant ces valeurs d' u , & d' u^3 , dans l'équation cy-dessus. Or la dernière valeur de $CF = 2r = CB$, fait voir que la Sphère proposée est elle-même un des Segmens cherchés renfermés dans l'équation $u^3 = 6r^2u - 4r^3$.

On tire de l'autre valeur de CF cette propriété singulière; sçavoir, que le rayon de la Sphère proposée, a même rapport au côté du quarré inscrit dans son grand cercle; que le côté du 12 gône inscrit au même cercle, à la hauteur CF . De sorte que l'on peut trouver en divisant un arc en deux également, la valeur de CF qui vient sous la forme de l'arc à diviser en 3.

Cette dernière valeur de CF donne $CF = 73,205$ 100,000 émes du rayon de la Sphère proposée: $BF = 186,121$; $AB = 372,242$; le circuit $AGBA = 1,169,431$; $CB = 200,000$; son circuit $= 1,256,636$; ce qui donne pour la surface du Segment proposé 125,663,600,000 précisément comme pour la Sphère proposée; & pour sa solidité 4,188,723,938,741,433, qui ne diffère de celle de la Sphère que d'environ $\frac{1}{66,000}$ du rayon.

On trouvera aussi le diamètre CD de 546,417, & le rayon CE de 273,208.

Toutes ces lignes sont toujours à moins d'une unité près, & à l'égard de la différence de la solidité, elle vient en partie du rapport $\frac{6}{7}$, qui n'est pas exact, & en partie de l'unité cy-dessus, à cause des racines qu'il faut tirer.

4°. Soit un Cône droit circulaire $ABEC$ (4. & 5. fig.) qu'il faille comparer de même avec la Sphère proposée. Soit sa hauteur ou axe AD , $= p$, & le rayon BD de sa base

bâse $BECEB = n$, qui font deux quantitez inconnues; on aura encore le circuit $BECEB$ de la bâse, par la même analogie; $r.c.:n.\frac{en}{r}$, lequel circuit étant multiplié par le côté $AB = \sqrt{p^2 + n^2}$, donnera; $\frac{en}{2r} \sqrt{p^2 + n^2}$, pour la surface de ce cône, qui doit être égale à celle de la Sphère proposée, sçavoir $2rc$, ce qui donne une première égalité $\frac{16r^4 - n^4}{n^2} = p^2$.

On a aussi pour la bâse du cône $\frac{en^2}{2r}$, & pour la solidité $\frac{en^2}{6r}$, laquelle doit être égale à celle de la Sphère proposée, $\frac{2}{3}cr^2$, ce qui donne une 2^e égalité, $\frac{16r^6}{n^4} = p^2$.

Comparant maintenant ces 2 valeurs de p^2 , on en tire l'équation déterminée, $16r^4n^2 - n^6 = 16r^6$. Et supposant $n^2 = rq$, on change cette dernière en cette autre, $q - 16r^2q + 16r^2 = 0$, qui est dans le cas de la Trisection de l'arc circulaire.

C'est pourquoi pour la résoudre, je fais les trois analogies suivantes :

Comme la racine du tiers du Coëfficient, $\frac{4r\sqrt{3}}{3} =$

230, 940 millièmes de r ,

Et au sinus total 10, 000, 000;

Ainsi l'Absolu divisé par les $\frac{2}{3}$ du Coëfficient, sçavoir

$\frac{2}{3}r = 150, 000,$

A un quatrième terme 6, 495 190,

Qui est le sinus de 40 deg. $\frac{1}{2}$, dont le $\frac{1}{2}$ est 13 deg. $\frac{1}{2}$ qui a pour sinus 2, 334, 454; dont le double 4, 668, 908 est la corde des trois côtez du 40 gône inscrit. Ce qui me donne la 2^e analogie :

Comme le sinus total 10, 000, 000,

Est à 230, 940 ci-dessus;

Ainsi 4, 668, 908 trouvé par la première analogie,

A un quatrième terme 107, 823, qui est la moindre valeur de q .

J'ôte ensuite $13 \text{ deg. } \frac{1}{2}$ cy-dessus de 60 deg. (nombre absolu) il reste $46 \text{ deg. } \frac{1}{2}$ qui a pour sinus $7,253,744$, dont le double est $14,507,488$; & je fais la troisième analogie :

Comme le sinus total $10,000,000$,

Est à $230,940$, cy-dessus ;

Ainsi $14,507,488$, trouvé par la 2^e analogie,

A un quatrième terme $335,035$, qui est la plus grande valeur de q .

On tire de ces deux valeurs de q , deux valeurs de p ou de AD , sçavoir $370,978,8\&, 119,390$. Et deux valeurs de AB , sçavoir $385,237,8\&, 218,534$: on a pour celles de BD , $103,838,8\&, 183,039$: pour les circuits $BECB$, $652,432,8\&, 1,150,066$, à moins d' $\frac{1}{100,000}$ de r . Les surfaces sont $125,670,565,810,8\&, 125,663,700,000$, dont les différences sont $\frac{1}{18,000}$, & $\frac{1}{125,000}$; les soliditez sont $4188,788896,797,941,8\&, 4,188,737,073,538,310$, dont les différences sont $\frac{1}{2,000,000}$, & $\frac{1}{83,000}$, tant à cause des racines à tirer, que du rapport $\frac{r}{c}$ que l'on n'a pas exact.

5°. Soit $AHKF$ un Parabolöide droit, (6. & 7. fig.) qu'il faille évaluer de la même manière avec la même sphère. Soit son parametre p , sa hauteur $AC=s$, qui sont toujours deux inconnues. On aura donc pour le rayon CH de sa bête, \sqrt{ps} (par la nature de la Parabole simple); ce qui donnera $\frac{c}{r} \sqrt{ps}$ pour le circuit de la même bête.

Donc la surface de cette même bête $= \frac{cps}{2r}$, & la solidité du Parabolöide $= \frac{c^2ps^2}{4r}$, (ce qui est connu de tous les Géomètres), laquelle doit être égale à celle de la sphère proposée, sçavoir $\frac{4}{3}cr^2$, ce qui donne l'égalité ; $p = \frac{8r^3}{3s^2}$.

Si l'on décrit aussi du pôle A deux cercles parallèles, & indéfiniment proches GN , IP sur la surface de ce Solide, ils comprendront une espace qui aura la figure d'un Cône tronqué, & qui sera le produit de son côté CI ou

NP par son circuit moïen, ou par un des deux GN , IP ; à cause qu'ils sont infiniment égaux. Soient donc L , R , les centres des cercles GN , IP ; LG , RI , leurs rayons; GO une perpendiculaire au petit côté GI , qui rencontre l'axe AC en O : on aura (en nommant AL , x ,) $GL = \sqrt{px}$, & $LO = \frac{1}{2}p$. Et menant la perpendiculaire GQ sur IR ; on aura $GQ = LR = dx$. De plus les triangles GQI , GLO , rectangles en Q & L , ont encore les angles IGQ , $θGL$, égaux, ce qui donnera l'analogie: ($GL = \sqrt{px}$, $GO = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$: $GQ = dx$, $GI = \frac{dx}{\sqrt{px}} \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$). On aura aussi le circuit $GRN = \frac{e}{r} \sqrt{px}$, qui étant multiplié par GI , donnera, $\frac{dx}{r} \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$, pour la valeur de la petite zône GP , & de toutes les pareilles, qui couvrent la surface du Paraboloidé; dont il faut trouver la somme infinie.

Pour cet effet appellant (u) $x + \frac{1}{4}p$, on aura $u - \frac{1}{4}p = x$, & $du = dx$; ce qui changera la valeur de cette zône en cette autre, $\frac{e}{r} \sqrt{pu^{\frac{1}{2}}} du$, dont l'Intégrale $= \frac{2}{3} \sqrt{p} \frac{\sqrt{u^3}}{r} \pm g$. Et pour trouver la valeur de la constante inconnuë g , je considère que l'abscisse (u) commence au-dessus de A en M ; en sorte que $AM = \frac{1}{4}p$; & que quand $u = \frac{1}{4}p$, ou, $u^3 = \frac{p^3}{64}$; alors l'intégrale $\frac{2c}{3r} \sqrt{pu^3} \pm g$, doit être $= 0$; ce qui donne l'égalité $\frac{2c}{3r} \sqrt{\frac{p^4}{64}} = g = \frac{cp^2}{12r}$; donc l'Intégrale cy-dessus $= \frac{e}{12r} \times 8 \sqrt{pu^3} = p^2$; ou remettant la valeur de u , sçavoir $\frac{1}{4}p + x$, on la change en cette autre . . .

$\frac{e}{12r} \times \sqrt{px^2 + 4x^3} - p^2 = \frac{e}{12r} \times p + 4s \sqrt{p^2 + 4sp} - p^2$, pour tout le Paraboloidé, en changeant x en s ; laquelle doit être égale à la surface de la Sphère, $2rc$; ce qui donne l'égalité $144r^4 + 12r^2p^2 = 3p^3s + 12s^2p^2 + 16s^3p$; dans laquelle substituant les valeurs de p , tirées de la 1^{re} équation, il vient l'égalité déterminée, $s^6 - \frac{27s^5}{8} + 25s^3 - 25 + \frac{4}{3} = 0$, laquelle a deux racines vraïes, sçavoir, $319,418, \& 77,047$,

124 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cent millièmes de r . D'où l'on tire $p=26,136,8\frac{1}{2},449,265$;
 $HC=91,370,8\frac{1}{2}186,045$; $HKFH=574,094,8\frac{1}{2}151,079$; ce qui donne pour les surfaces des deux Solides,
 $125,662,164,653,8\frac{1}{2}125,667,416,062,1$ qui ne diffèrent
de celle de la Sphère proposée que de $\frac{1}{62,831}$, ou $\frac{1}{31,000}$, &
pour leurs soliditez, $4,188,765,304,442,510,8\frac{1}{2}$, $4,188,790,292,404,997$, qui ne diffèrent de celles de la même
Sphère que d'environ $\frac{1}{209,000}$, ou $\frac{1}{418,000}$; ce qui vient des
causes qu'on a apportées cy-devant plusieurs fois.

60. Pour trouver une infinité de Cônes tronquez,
(9. & 8. fig.) tous égaux en surface en solidité à la même
Sphère proposée; soit leur hauteur $ef=z$; soit la somme
des rayons des deux bâses $ae, df, =x$; & leur différence
 $=y$, qui sont trois quantitez variables, on aura donc
pour le plus grand df des deux rayons, $\frac{x+y}{2}$; & pour le
moindre $ae, \frac{x-y}{2}$, ce qui est connu de tous les Géomètres.
On aura aussi pour le rayon gi moïen arithmétique entre
ces deux, $\frac{x}{2}$, & pour son circuit $gmh, \frac{x}{2} \times \frac{c}{r}$, & suivant les
analogies des articles précédens. Et menant la droite an ,
perpendiculaire sur df , elle fera $=ef=z$; & dn fera $=y$;
ce qui donnera $ad=\sqrt{z^2+y^2}$; donc la surface du tronque-
ment fera $\frac{\sqrt{z^2+y^2} \times cx}{2r}$, qui doit être égale à celle de la
Sphère, $2rc$; ce qui donnera l'égalité $\frac{48r^4}{z^2+y^2} = 3x^2$.

On aura aussi pour la solidité du Tronquement
 $\frac{3x^2 z + y^2 z}{24r} \times c$, (qui est une règle connue de la plupart des
Géomètres) laquelle solidité doit être égale à celle de
la Sphère, $\frac{2}{3}cr^3$, ce qui donne une 2^e égalité $\frac{16r^3 - y^2 z}{z} = 3x^2$.
Et comparant ces deux valeurs de $3x^2$, il en résulte une
troisième égalité, $y^4 + z^2 - \frac{16r^3}{z} \times y^2 + 48r^4 = 0$, délivrée
des x . Et prenant $y^2 = u$, & y substituait u , au lieu de y ,

on la change en une autre du second degré, d'où l'on

tire $u = \frac{8-z^2}{-z+\frac{z}{2}} + \sqrt{\frac{8-z^2}{-z+\frac{z}{2}}} - 48$, en prenant r pour l'unité.

Je prends présentement z (par exemple) $= r$, ce qui donne $u = \frac{15+\sqrt{97}}{2} = 2,242,443,82,257,557$, cent millèmes de r : $y = 352,483,82,160,485$; $x = 208,272,82,211,538$: *dc*, ou, $x+y = 372,023$, $x-y = ab = 51,053$: $ef = z = r = 100,000$; $dkcd = 1,168,743$; $alba = 160,387$; $gmbg = 664,565$; $ad = \sqrt{z^2 + y^2} = 139,093$. On aura la surface $= 125,664,589,545$; dont la différence $= \frac{1}{139,000}$, & la solidité $= 418,896,372,982,065$, dont la différence $= \frac{1}{23,000}$.

Prenant encore $z = \frac{16}{5} r$, il vient $ab = 47,432$; $dc = 196,086$; $ad = 328,519$; $alba = 149,015$; $dkcd = 616,021$, $gmgh = 382,518$, & $ef = 320,000$, toujours à moins d'une unité près. Ce qui donne pour la surface $125,664,430,842$, dont la différence $= \frac{1}{157,000}$; & pour la solidité $4,188,800,258,651,082$, dont la différence $= \frac{1}{41,000}$.

Il est à remarquer que si l'on eût pris $z = 3r$, on auroit eu $y = 0$, ce qui auroit donné le Cylindre de l'article second. Car on tire de cette supposition, $x = \frac{4}{3}r = ab$, comme dans ce second article.

Et si l'on eût supposé $y = x$, ou $ae = 0$; & y ou $x = df$; on auroit eu les deux égalitez $\frac{\sqrt{16r^4 - x^4}}{x} = z = \frac{16r^3}{4x^2}$; d'où l'on tire la seule, $16r^4 x^2 - x^6 = 16r^6$, qui est l'équation des Cônes du quatrième article. Ce qui auroit donné $z = 370,978 = 119,390$. Et ce qui fait voir que pour les Cônes tronquez on peut prendre z à volonté entre $370,978$, & $300,000$; & au-dessus de $119,390$, comme nous avons fait: ce qui donnera une infinité de tels Tronquemens.

7°. Soit encore un Cône Elliptique, $abgei$, (10. fig.) dont a soit le sommet; $bgei$, sa bâte qu'on suppose être

une Ellipse, laquelle ait pour son grand axe be ; gi pour son petit, & b pour son centre. Soit $adme$ le Cône droit rectangle sur lequel le proposé ait été retranché; a son sommet; $dmed$ sa bâte circulaire, dont de soit un diamètre: Et soit dae le triangle par l'axe de ces deux Cônes; dans lequel triangle on ait mené par b la droite cf parallèle à de , laquelle cf soit le diamètre d'un cercle $cgfi$ mené par gi parallèlement à la bâte dme sur la surface du Cône. Enfin soit al , une perpendiculaire menée de a sur be , qui sera la hauteur du Cône Elliptique $abgeb$. Pour comparer ce Cône avec la Sphère proposée, comme les Solides précédens, je suppose le côté $ad = ae$, & $ab = x$; ce qui donne $bd = y - x$, & les parallèles cf , de , donnent l'analogie, $bc.cd :: bh.he$; donc $bc = dc = \frac{y-x}{2}$, $ac = \frac{y+x}{2}$. On aura aussi $be = \sqrt{x^2 + y^2}$, & $de = y\sqrt{2}$, à cause de l'angle droit dae ; & à cause des parallèles, $bh.be :: ch.de$, donc $ch = \frac{y}{\sqrt{2}}$. De plus, $da = y.ca = \frac{y+x}{2} :: de = y\sqrt{2}.cf = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$. Donc $hf = \frac{x}{\sqrt{2}}$, & $ch \times hf = gh^2 = \frac{y^2}{2}$ (par la nature du cercle $cgfi$, Donc $gi = \sqrt{2yx}$. Donc la bâte $bgei = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r}$, De plus (à cause de l'angle droit bae) les triangles rectangles bal , bea , étant semblables, on aura l'analogie, $bc = \sqrt{x^2 + y^2}.ae = y :: ba = x.al = \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Donc $bgei \times \frac{al}{3} = \frac{yx\sqrt{2yx}}{24r} = \frac{2}{3}cr^2$. Donc $yx\sqrt{2yx} = 16r(y^3x = 128r^6)$ & $y = \frac{4\sqrt[3]{2} \times r^2}{x}$.

On aura de plus (comme je l'ai démontré en même tems en cette Academie) l'analogie, $\sqrt{x^2 + y^2} = be.bae = x+y :: bgei = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r} \cdot \frac{c}{x+y\sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r}}$, qui sera la surface du Cône Elliptique, qui doit être égale à celle de la Sphère, $2rc$. Or prenant la valeur d' y de la première équation, on aura $x+y = \frac{x^2 + 4\sqrt[3]{2}r^2}{x}$, & $\sqrt{2yx} = 2r\sqrt[3]{4}$. D'où l'on tire l'égalité déterminée, $x^2 - 4r\sqrt[3]{2}x + 4\sqrt[3]{2}r^2 = 0$

qui donne $x = 2r \times \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{2-1} \times \sqrt{2}}} = y = 137,534, & = 366,434$, ce qui donne $be = 391,395$; $gi = 317,481$; $al = 128,763$: d'où l'on tire la surface de ce Cône, $= 125,663$, 807,822: dont la différence $= \frac{1}{628,000}$ environ; & la soli-

dité $= 4,188,821,334,504,448$, dont la différence $= \frac{1}{104,720}$ par les raisons rapportées cy-devant.

Comme la valeur d' y se trouve la même qu'une des deux valeurs d' x , il est manifeste que ce Cône est unique en son espece.

8^o Enfin soit $abdh$ un Cône Parabolique (11. & 12 fig.) dont soit le sommet, dbb la bâte qui a bg pour son axe, & dh pour sa dernière ordonnée; lequel Cône ait été retranché sur le Cône droit $said$, dont a est aussi le sommet, le cercle cdi , la bâte, laquelle a ci pour diametre: cai est le triangle par l'axe commun aux deux Cônes: bg est parallele au côté ai ; & dh est une ordonnée au diametre ci . af est l'axe du Cône circulaire rencontrant bg en l , be une perpendiculaire menée du sommet b de l'axe bg , sur ci en e . De plus ab est la hauteur du Cône parabolique $abdh$, lequel doit être égal à la Sphère proposée comme les précédens. Menez les droites fd , fh ; & si vous voulez encore ld , lh .

Soit donc $cg = u$, $gi = z$, $ci = z + u$, $fi = fc = \frac{u+z}{2}$. On aura à cause de l'angle droit cai , $\frac{u+z}{\sqrt{2}} = ac$, ce qui donnera l'analogie (à cause des paralleles bg , ad) $ci = u + z$. $ia = \frac{u+z}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2}.1 :: cg = u.gb = \frac{u}{\sqrt{2}}$. On aura aussi (par la nature du cercle) $dg = \sqrt{uz}$, & $dh = 2\sqrt{uz}$, & $\frac{2}{3}bg \times dh = \frac{2}{3}u\sqrt{2uz} = dbhd$; & à cause des paralleles bg , ai : ($ci = u + z$. $ca = \frac{u+z}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2}.1 :: gi = z. \frac{z}{\sqrt{2}} = ab$); & $\frac{2uz\sqrt{uz}}{9}$ pour la solidité du Cône parabolique, laquelle doit être égale à celle de la Sphère $\frac{2}{3}cr^2$, ce qui donne la premiere égalité, $z = \frac{r^2 \sqrt{9c^2 r^2}}{u}$.

Soit encore *dehd* la Parabole qui est la projection droite de la bête *dbh*; & *dfh* le triangle qui est celle des triangles *dah*, *dlb*: Il est évident que la différence *dehfd*, est la projection de la surface du Cône parabolique, ou de la différence *dbhld*. Or $eg = \frac{1}{2}cg = \frac{u}{2}$ (à cause des angles

égaux *c*, *i*, & *bgc*. Donc la Parabole *dehd* = $\frac{2u\sqrt{uz}}{3}$. De plus $fg = fi - gi = \frac{+u+z}{2}$, selon que *g* tombera. Donc le

triangle *dfh* = $\frac{+u+z\sqrt{uz}}{2}$. Donc le reste *dehfd* = $\frac{u+3z\sqrt{uz}}{6}$.

D'où l'on tire l'analogie : $cf = \frac{z+u}{2}$. $ca = \frac{z+u}{\sqrt{2}}$: : $1.\sqrt{2}$: :

dehfd. $\frac{u+3z\sqrt{uz}}{3\sqrt{2}}$, qui est la surface du Cône parabolique = *dbhld*; laquelle doit être égale à celle de la même Sphère, &c.

D'où l'on tire $u + 3z = \frac{6cr\sqrt{2}}{\sqrt{uz}}$. Or $u + 3z = .$

$\frac{u^2 + 3r\sqrt{9c^2r}}{3}$; & $\sqrt{uz} = \sqrt[3]{3cr^2}$, par la 1^e égalité. Donc

$u^2 + 3r\sqrt[3]{9c^2r} = 2u\sqrt{2}\sqrt[3]{9c^2r}$. D'où l'on tire $u = \sqrt{2}\sqrt[3]{9c^2r} + \sqrt[3]{\frac{2r}{3}}$.

$2\sqrt{9c^2r} - 3r\sqrt[3]{9c^2r}$, ou $u = 112,366 = 1,890,894$; & $z = 630,316 = 37,458$. ce qui donne $bl = 445,702 = 26,486$, $bg = 79,454 = 1,337,068 = 366,248 = 310,582$; $dh = 532,264 = 532,274$. Les surfaces = $125,663,807,822$; & $125,663,326,688$; leurs différences = $\frac{1}{628,000}$, & $\frac{1}{300,000}$; & les

soliditez = $4,188,821,334,504,448$; & $4,188,865,445,181,631$, & leurs différences = $\frac{1}{41,000}$, & $\frac{1}{41,000}$ environ, & par les raisons rapportées cy-devant.

9°. Remarquez 1. qu'on peut aussi éгалer à la même Sphère des Segmens ou des Tranches à Arêtes de Sphères, de Paraboloides &c. comme si *IHLBNOM* (fig. 15. & 16.) est un Exagône circonscrit au cercle *AGBGA*, & qu'on fasse passer par les pôles *C*, *D*, des Ellipses *CLD*, *CHD*, *CLD*, *CND*, *COD*, *CMD*, & par les angles de ce polygône, elles composeront avec ce polygône un Segment sphérique à Arêtes, dont *C* sera encore le pôle, & le polygône

lygône *IHLNOM*, la bâte, & qui se mesurera comme le Segment sphérique inscrit *CAGBGA* : à cause de leurs propriétés communes.

Soit donc *CB* nommée x , & *CF* toujours u , on aura par la nature de l'Exagône, dont *CB* est le rayon droit $\equiv x$ la moitié de son côté $\equiv \frac{x}{\sqrt{3}}$, lequel étant

multiplié par $6x$, donnera $\frac{6x^2}{\sqrt{3}}$ pour la surface de cet Exagône, qui doit être égale à celle de la Sphère proposée $\equiv 2rc$, ce qui donne $x^2 \equiv \frac{rc}{\sqrt{3}}$. De sorte que de quelque grandeur que soient *CF*, & *BF*; *CB* sera toujours encore de la même grandeur, $\sqrt{\frac{rc}{\sqrt{3}}}$, comme pour le seg-

ment sphérique, ce qui est certainement digne de remarque. On aura de plus $BF = \sqrt{x^2 - u^2}$; & $AB^2 \equiv 4x^2 - 4u^2$: ce qui donnera pour la solidité du Segment à Arêtes dont la bâte est un quarré circonscrit au même cercle *AGBA*, & qui a aussi *C* pour son pôle, $\frac{6x^2 - 4u^2 \times \frac{u}{3}}{3}$. Faisant donc l'analogie: Comme le circuit du quarré circonscrit au cercle dont $CB \equiv x$ est rayon, sçavoir $8x$, Est au circuit de l'Exagône circonscrit au même cercle, sçavoir $\frac{12x}{\sqrt{3}}$; ou, Comme 2 est à $\sqrt{3}$; ainsi $\frac{6x^2 - 4u^2 \times \frac{u}{3}}{3}$ à un

4^e terme, qui sera la solidité du Segment proposé, laquelle doit être égale à celle de la même Sphère, sçavoir $\frac{3ux^2 - 2u^3}{\sqrt{3}} \equiv \frac{2}{3}cr^2$. D'où l'on tire $u^3 \equiv \frac{\sqrt{3}urc}{2} - \frac{cr^2}{\sqrt{3}}$, qui est encore dans le cas de la Trisection de l'angle: c'est-pourquoi je la résous par la méthode de l'article 4^e, ce qui me donne pour les deux valeurs de $u \equiv CF$, 74,168; & 187,165; & pour celle de $x \equiv \sqrt{\frac{rc}{\sqrt{3}}}$, 190,463. Substituant aussi

la valeur de x^2 , dans la solidité du Segment $\frac{3ux^2 - 2u^3}{\sqrt{3}}$, on

la change en cette autre $urc - \frac{2u^3}{\sqrt{3}}$, dans laquelle substituant la 1^e valeur de $u \equiv 74,168$, il vient 4,189,002,248,498,432, pour cette solidité; qui ne diffère de celle de

la Sphère cy-dessus, que d'environ $\frac{1}{10,000}$ partie, ce qui vient des fractions négligées, & ce qui suffit pour faire voir que nous avons rencontré la vérité. On aura aussi l'axe $CD = \frac{x^2}{n} = 489,108$, le diamètre $AB = 350,858$, & le rayon $FB = 175,429$. ce qui suffit pour former ce Segment.

Si on substituë la 2^e. valeur de n , sçavoir 187, 165, il vient 4,189,083,983,360,155, pour la solidité d'un 2^d Segment à Arêtes, pour l'axe $CD = 193,819$, le diamètre $AB = 70,580$, & le rayon $FB = 35,290$.

10^o, Remarquez 2. Que si l'on suppose une tranche de Sphère ai , (13. fig.) dont abc , ghi soient les deux bâses également distantes du centre de leur Sphère; ac , gi leurs diametres; am , gn leurs rayons; def son plus grand parallele, dont df soit le diamètre; que l'on nomme al , x , & am , y , & que l'on égale cette tranche à la même Sphère proposée tant en surface, qu'en solidité; il en viendra l'égalité déterminée $x^4 - \frac{2}{3}rx^3 - \frac{r^4}{3} = 0$, qui a pour ses équations composantes $x - r = 0$, & $x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 0$, dont la dernière ne renferme aucunes racines vraies, comme il est évident. De sorte qu'il reste la seule valeur de x , ou de $al = r$. Ce qui fait voir que la Sphère proposée est elle-même la Tranche sphérique centrale cherchée, & qu'il n'en faut point chercher d'autre; comme on a vû dans le 3^e art. cy-devant, que la même Sphère est elle-même un des Segmens sphériques qui lui est égal en surface convexe, & en solidité, ce qui est encore une propriété singulière de la Sphère.

11^o. On pourroit encore ajouter à toutes ces figures, un anneau AD circonscrit à la même Sphère (14. fig.) formé par la révolution du quarré $ABCD$ circonscrit à son grand cercle autour de l'axe LI de la Sphère parallele aux côtez AC , BD de ce quarré, en ajoutant sur ces 2 mêmes côtez les deux Segmens de cercle AEC , RFD , dont le centre G est le même que celui de cette Sphère.

Car la surface intérieure de cet anneau est en continuelle égalité avec celle de la Sphère inscrite, comme Archimèdes l'a démontré : en retranchant l'une & l'autre par des plans perpendiculaires à l'axe commun LI ; & en même tems la solidité de l'un & de l'autre ont entre eux la même égalité continuelle, ce qui n'est pas difficile à démontrer & même connu, & ce qui est une comparaison encore beaucoup plus parfaite, qu'aucune des précédentes.

Dans cet anneau, AB ou AC vaut 200,000 (comme il est évident) puisque LB vaut 100,000; & par conséquent le circuit $AKBA$ vaut 628,318 comme pour la Sphère; son grand diamètre EF vaut 282,842; & son grand rayon GF , 141,421; son grand circuit $EHFE$ vaut 888,574; son bouge MF vaut 41,421; sa surface = 125,663,600,000, comme dans la Sphère; & sa solidité 4,188,748,243,600,000, dont la différence est environ $\frac{1}{104,000}$.

12°. Enfin on en pourroit ajouter quantité d'autres tant convexes que concaves, que nous laisserons aux Curieux des questions purement Géométriques.

On trouve toutes ces Figures en relief dans les Cabinets de M. de la Faye l'aîné; du R. P. Sébastien, Carme; & chez l'Auteur.

E X A M E N

D'une difficulté considérable proposée par M. Hugheus contre le Système Cartésien sur la cause de la Pesanteur.

PAR M. SAURIN.

LEs effets de la Nature les plus ordinaires, & qui frappent le moins le commun des hommes, ne sont pas toujours ceux qui donnent le moins d'exercice aux Philosophes. Tel est le Phénomène de la Pesanteur. Une pierre jetée en l'air retombe à plomb sur la surface de la Terre; on ne s'avise gueres dans le monde d'en être

10. Avril
1709.

surpris : cependant trouver la cause de cette chute est un des plus difficiles Problèmes que la Physique ait à résoudre ; & l'on n'est point encore parvenu à en donner une solution suffisamment démontrée , & qui répande une pleine lumière sur toutes les difficultez.

J'ai entrepris sur cette matiere un petit Traité que j'ai commencé à lire dans nos Assemblées particulieres. L'Académie a pû voir , que je mets la cause de la Pesanteur dans l'effort centrifuge de la matiere céleste qui nous environne ; & que je fais naître en elle cette effort, du mouvement circulaire qu'elle a autour de l'axe de la Terre , selon l'idée des Tourbillons Cartésiens. Un des principaux objets que je me suis proposez dans le petit Traité dont je parle , est de défendre ce sentiment contre les difficultez qui ont fait rejeter l'hypothese des Tourbillons à deux des plus célèbres Géometres de notre tems , M. HUGHENS & M. NEWTON.

Pour ne parler ici que de M. HUGHENS ; il fait trois Objections contre cette hypothese dans son Discours sur la cause de la Pesanteur ; mais il n'y en a que deux qui me paroissent dignes de considération. C'est de l'une de ces deux fort repetée après lui par quantité d'autres Auteurs grands & petits , que l'on voit une Solution dans le 2^e Journal des Sçavans de 1703. Je fus bien aisé d'exposer ainsi par avance cette Solution à la critique des Sçavans , pour m'assurer si je ne me faisois point illusion en la croyant appuïée sur une démonstration véritable ; & pour mettre à profit les nouvelles lumieres que leurs réflexions pourroient me donner. Elle a mérité l'attention de deux Auteurs , qui se piquent , & sans doute avec raison , d'être profonds dans ces sortes de matières, peu disposez d'ailleurs à me faire grace ; mais quoiqu'ils l'aient combattuë avec beaucoup de vivacité , l'un dans ses *Recherches de Physique & de Mathématique* , & l'autre dans les *Memoires de Trevoux* ; j'oserai dire qu'ils n'ont point troublé la confiance où je pouvois être que la solution est hors d'atteinte.

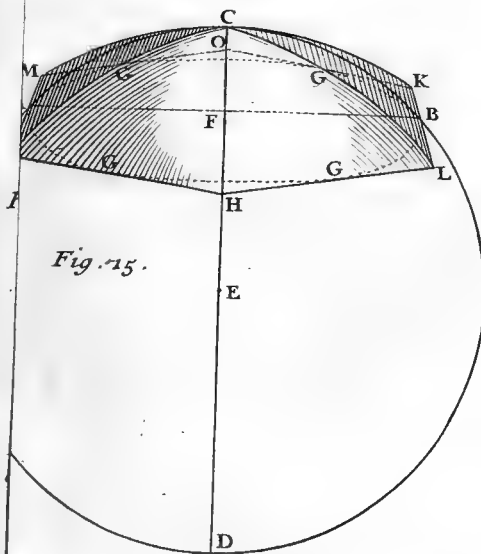
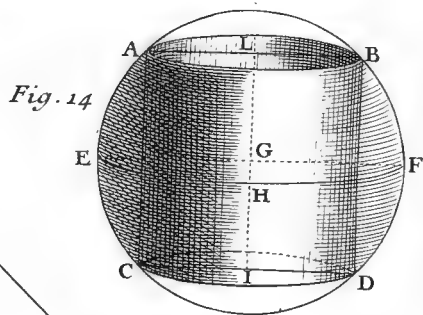
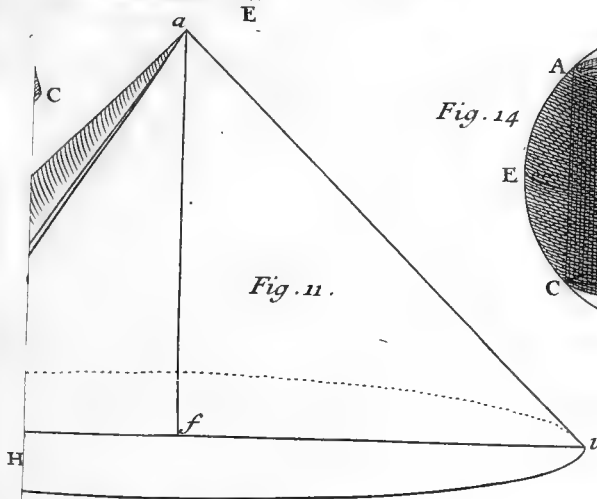
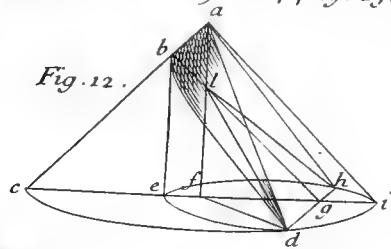
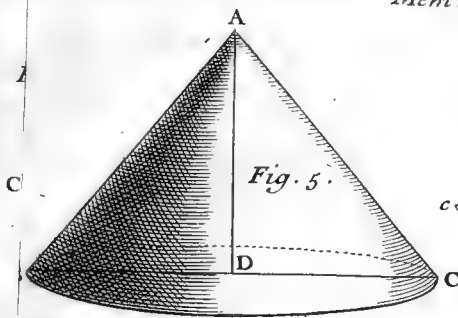


Fig. 13.

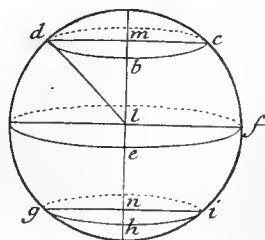
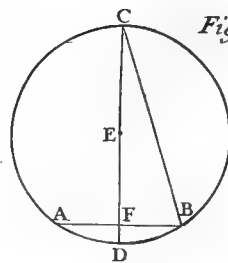
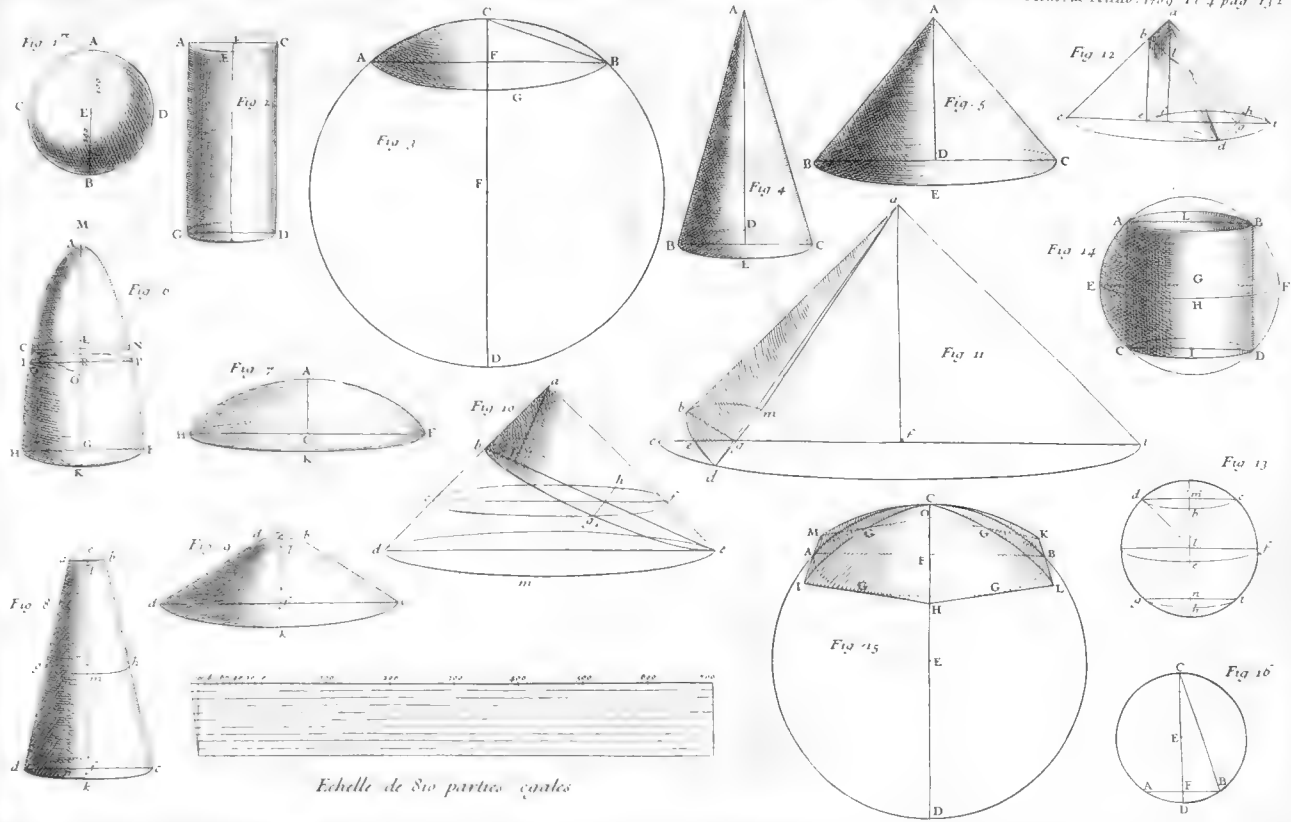


Fig. 16.





Echelle de 800 parties égales

L'autre objection de M. Hughens est celle qui doit faire le sujet de ce Memoire , & sur laquelle j'avoüerai d'abord que je n'ai point encore pû me satisfaire parfaitement. Aussi ne donnai-je pas à cette recherche , comme à la précédente , le titre de Solution , mais celui d'*Examen*. C'est un point de Physique à méditer , que je propose aux Philosophes qui m'écoutent. Sur ce pied-là , j'exposerai simplement l'objection ; ce que je crois qu'on peut y répondre ; & ce qui me paroît rester de difficulté ; & j'attendrai de leurs lumières , & de celles de l'Academie , ce qui manque aux miennes.

Comme j'ai l'honneur de parler dans une Assemblée publique où tout le monde ne peut pas être au fait de ces questions , je crois devoir reprendre les choses de plus haut. On n'apperçoit clairement dans les corps pesants que deux choses ; l'une qu'étant lâchez en l'air , ils se meuvent suivant une direction qui tend à peu près au centre de la Terre ; l'autre , qu'ils font effort pour se mouvoir suivant la même ligne , lorsqu'ils sont retenus : & c'est précisément cette effort avec lequel ils pressent ou poussent ce qui les retient , qu'on appelle *Pesanteur*.

Il est évident que ces deux choses sont l'effet d'une seule & même cause. La force , de quelque nature qu'elle soit qui fait mouvoir les corps pesants suivant la direction constante qu'ils observent , est celle-là même qui fait que ces corps pressent suivant la même direction , le plan qu'on leur oppose pour les retenir.

Il ne s'agit donc dans la question de la Pesanteur ; que de rendre raison d'un certain mouvement , sçavoir , de ce mouvement particulier qui porte vers le centre de la Terre les corps à qui cela même fait donner le nom de pesants.

Si nous consultons nos idées sur la cause physique du Mouvement , elles ne nous presenteront rien de clair , rien de distinct que le choc , ou l'impulsion : ainsi c'est par ce principe qu'il faut rendre raison du Mouvement

dont nous cherchons la cause, ou abandonner cette recherche, & renoncer à l'esperance de pouvoir jamais expliquer d'une maniere intelligible & raisonnable le Phénomene de la pesanteur ; & si nous ne réussissons pas à l'expliquer par ce principe, cela marquera sans doute l'insuffisance de nos lumieres, mais non pas celle du principe.

Voici donc suivant cette idée, de quelle maniere nous philosophons sur la pesanteur avec M. Hughsens. Les corps pesants se meuvent vers le centre de la Terre ; ils y sont donc poussez. Les corps ne peuvent être poussez que par d'autres corps en mouvement qui les choquent ; il y a donc d'autres corps en mouvement, qui heurtent ceux que nous appelons pesants, & qui par ce choc les poussent où nous les voïons tendre. Ces autres corps ne sont point apperçus ; c'est donc une matiere subtile, que la délicatesse de ses parties dérobe à notre vûe ; & comme on sçait d'ailleurs par mille autres effets, que la Terre nage dans un fluide d'une subtilité inconcevable ; qui l'environne de toutes parts ; il n'y a pas lieu de douter que ce ne soit à cette matiere fluide qu'il faut attribuer l'impulsion qui produit le mouvement des corps pesants.

Mais comment le produit-elle ? Pour l'expliquer avec ordre, il faudroit faire de longues déductions ; je les franchis, & je viens tout d'un coup au fait. C'est qu'elle circule autour de la Terre avec une extrême rapidité : en circulant ainsi elle fait effort pour s'éloigner de la Terre ; & les corps grossiers n'ayant pas le même mouvement, & ne faisant pas le même effort, doivent être chassez nécessairement vers la Terre. Jusq'ici nous avons marché de compagnie, & philosophé de concert avec M. Hughsens ; mais nous allons nous diviser : voici le point de séparation. M. Hughsens fait mouvoir circulairement la matiere celeste en tous sens autour du centre de la Terre ; c'est-a-dire, que dans son Systême le centre de la Terre est le centre commun de tous les cercles

que décrit la matiere celeste : au lieu que selon Descartes , elle se meut toute en même sens autour de l'axe d'Occident en Orient , & décrit des cercles dont les plans sont paralleles à celui de l'Equateur. C'est cette hypothese que je défens contre les deux objections de M. Hughsens dont il s'agit.

La 1^e. est tirée de la direction qu'observent dans leurs chûtes les corps pesants. M. Hughsens prétend , que dans la supposition des cercles paralleles décrits par la matiere celeste , les corps devroient tomber suivant des lignes perpendiculaires à l'axe de la Terre , & qu'ils ne seroient poussez vers le centre que dans le plan de l'Equateur , au lieu que l'expérience nous apprend qu'ils suivent par tout une même direction qui tend au centre. C'est l'objection que je crois avoir suffisamment résoluë dans le Journal des Sçavans.

Voici la seconde , qui est celle que j'ai à examiner presentement. M. Hughsens observe que pour produire le degré de pesanteur que nous éprouvons dans les corps terrestres , la vitesse de la matiere celeste qui se meut circulairement , doit être beaucoup plus grande que la vitesse du mouvement journalier de la Terre autour de son axe. D'où il conclut que si la matiere celeste se mouvoit en même sens avec une telle vitesse , il ne seroit pas possible que par le continuel effort d'un mouvement si rapide, elle n'entraînât avec elle tous les corps qui sont sur la surface de la Terre , ce qui n'arrive pas.

On sentira toute la force de cette objection par l'exposition que j'en vais faire. Les corps qui sont sur la Terre étant emportez avec elle autour de son axe dans 24 heures , sont eux-mêmes necessairement effort pour s'éloigner du centre , & leur effort est proportionné à la vitesse qui les emporte. Si la matiere celeste ne se mouvoit circulairement qu'avec la même vitesse que la Terre tourne , elle ne seroit pas plus d'effort pour s'éloigner du centre de la Terre , que n'en font les corps qui sont sur la Terre , & par conséquent il n'y auroit pas de pesanteur.

ces corps jettez en l'air ne retomberoient point. Dans quelque lieu du Fluide environnant qu'ils fussent portez, & ensuite lâchez, ils y demeureroient suspendus & en repos; puisqu'ils y seroient en équilibre avec un égal volume de la matiere celeste.

Les corps qui sont sur la Terre ne sont donc pesants, & jettez en l'air ne retombent, que parce que la matiere celeste fait plus d'effort pour s'éloigner du centre commun qu'ils n'en font de leur part : Et si l'on retranche leur effort de celui de la matiere celeste, la quantité d'effort qui restera, & qui est le degré de force avec lequel ils sont poussez vers le centre, sera justement égale à leur degré de pesanteur. Ainsi la matiere celeste doit circuler plus vite que la Terre ne tourne, & l'excès de sa vitesse par dessus celle de la Terre doit être tel, qu'il en puisse résulter cette quantité d'effort égale au degré de pesanteur des corps terrestres.

M. HUGHENS a trouvé par une recherche exacte, qu'il falloit pour cela que le mouvement circulaire de la matiere celeste fût environ 17 fois aussi vite que celui de la Terre. Son calcul est fondé sur une proposition curieuse; mais il est un peu embarrassé. On peut faire le même calcul d'une maniere plus aisée en supposant la verité d'un autre Theorème, qui est très-facile à démontrer. Ce Theorème est, qu'en tems égal, l'espace parcouru par un corps qui tombe perpendiculairement est à l'espace ou à l'arc parcouru par la matiere celeste qui se meut circulairement, & produit la pesanteur, comme ce même arc est au diametre du cercle qu'elle décrit : Et par conséquent si le nombre de pieds que contient ce diametre, est multiplié par le nombre de pieds qu'un corps qui tombe perpendiculairement parcourt dans une Seconde, ce produit sera égal au quarré de l'arc parcouru aussi dans une Seconde par la matiere celeste. On sçait par des experiences faites avec beaucoup d'exactitude, qu'un corps qui tombe perpendiculairement, parcourt dans une Seconde environ 15 pieds : le diametre du cercle décrit par

la matière celeste proche de la Terre n'étant pas sensiblement différent de celui de la Terre même, est de 39' 23 1' 600 pieds: Donc par le Theorème ces deux nombres multipliez l'un par l'autre, donneront un produit égal au quarré de l'arc parcouru par la matière celeste; & la racine quarrée de ce produit, laquelle est 24258, sera le nombre de pieds égal à l'arc parcouru. Il faut donc que pour produire le degré de pesanteur que nous éprouvons sur la Terre, la matière celeste parcoure 24258 pieds dans une seconde.

La Terre faisant une révolution en 23 heures 56 minutes, ou en 86160 secondes, & le cercle qu'elle décrit étant de 123' 249' 600 pieds, ce qu'elle en parcourt dans une seconde doit être de 1430 pieds & $\frac{1}{2}$. Ainsi la vitesse de la matière celeste, qui lui fait parcourir dans une seconde 24258 pieds, est à celle de la Terre qui n'en parcourt dans le même tems que 1430, comme le premier de ces nombres est au second. Or si l'on divise ces deux nombres l'un par l'autre, on trouvera qu'ils sont entr'eux environ comme 17 à 1. En mesurant donc le degré de pesanteur par le seul effort centrifuge de la matière celeste, qui vient de son mouvement circulaire, il est démontré que la vitesse de ce mouvement doit être 17 fois aussi grande que celle du mouvement journalier de la Terre, ou la sur passer 16 fois.

Mais pour connoître plus précisément encore jusqu'où va la difficulté, examinons quelle impression peut faire sur les corps terrestres cette prodigieuse vitesse que nous sommes obligés de donner à la matière celeste, & nous verrons ensuite s'il s'offrira quelque moyen de la rendre insensible.

Feu M. Mariote, un des plus habiles & des plus exacts observateurs en Physique qu'ait eu l'Académie, a fait quantité d'expériences sur la force du choc des Fluides, & en particulier de l'Eau & de l'Air. Il a trouvé* que l'eau allant avec une vitesse qui lui fait parcourir 3 pieds & $\frac{1}{2}$ dans une seconde, & heurtant

* *Mouvement des Eaux*, pag. 127. & 195.

perpendiculairement avec cette vitesse une surface d'un demi-pied en quarré, soutient un poids de 3 livres $\frac{3}{4}$. Il a aussi déterminé que l'air allant 24 fois aussi vite, faisoit précisément le même effort. Ainsi l'Air parcourant 78 pieds dans une seconde, & choquant avec cette vitesse une surface d'un demi-pied en quarré, opposée perpendiculairement à son cours, soutiendrait un poids de 3 livres $\frac{3}{4}$: Mais si nous lui donnons la vitesse dont la matiere celeste surpasse celle de la Terre, quel poids soutiendra-t'il? Il est aisé d'en faire le calcul. Les efforts d'un même Fluide qui va avec différentes vitesses sont entr'eux comme les quarrés des vitesses: la vitesse de l'air qui lui fait soutenir 3 livres $\frac{3}{4}$. est de 78 pieds dans une seconde; celle de la matiere celeste, la vitesse de la Terre en étant retranchée, est de 22827 pieds & $\frac{1}{2}$; tout est connu; il n'est plus besoin que d'une regle de proportion; on dira, comme le quarré de 78 est au quarré de 22827 & $\frac{1}{2}$, de même le poids de 3 livres $\frac{3}{4}$ est à un 4^e terme: ce 4^e terme donnera l'effort de l'air, ou le poids cherché. En faisant cette opération on trouve que si l'air alloit avec la vitesse de la matiere celeste, il soutiendrait un poids de plus de * trois cens ving mille livres.

* Il est au
juste de
321187 liv. &
14308
24336.

Nous avons suivi dans ce calcul la détermination de M. Mariote, qui ne donne à l'air qu'une vitesse 24 fois aussi grande que celle de l'eau, pour lui faire soutenir le même poids que l'eau soutient; mais d'autres expériences prouvent qu'il doit aller 30 fois aussi vite; & si nous voulons suivre ces expériences, le poids que soutiendra l'air avec la vitesse de la matiere celeste, diminuëra, mais il sera encore * de plus de deux cent mille livres.

* au juste de
205560 liv. &
2140
38025.

Telle seroit la force de l'air emporté avec la vitesse qui convient à la matiere celeste pour produire la pesanteur. D'où l'on voit que quand l'effort de la matiere celeste mûë avec cette rapidité ne seroit que la deux-cent-millième partie de celui de l'air, elle ne laisseroit pas de soutenir le poids d'une livre, en agissant contre une sur-

face d'un demi-pied en quarré, & que s'il étoit près de deux millions cinq cent mille fois plus foible, il soutiendrait encore le poids d'une once : de sorte que si l'on suspendoit en l'air au bout d'un fil un corps qui ne pesât qu'une once, & qui opposât une surface d'un demi-pied en quarré au cours de la matiere celeste, elle le pousseroit d'Occident en Orient avec un effort qui lui feroit faire en ce sens-là un angle de 45 degrez, en faisant abstraction de toute autre résistance que de celle du corps suspendu.

Il seroit impossible à cause de la résistance, & de l'agitation continuelle de l'air, & de plusieurs autres considérations, de déterminer au juste combien l'effort de la matiere celeste avec vitesse égale, devoit être plus foible que celui de l'air pour devenir insensible; mais il me paroît qu'il devoit l'être du moins trois ou quatre millions de fois plus : il reste à sçavoir si on peut le supposer sans absurdité; ou si l'on ne pourroit point donner de la foiblesse de cet effort quelque raison du moins vraisemblable.

On sçait que les Fluides sont plus ou moins fluides les uns que les autres, & qu'ils sont plus ou moins de résistance au mouvement des corps; & par conséquent plus ou moins d'effort contre les corps en repos, lorsque ce sont les Fluides mêmes qui se meuvent. Ainsi nous venons de voir que l'air doit aller 30 fois plus vite que l'eau, pour avoir une égale force de choc : d'où il s'ensuit qu' allant avec la même vitesse que l'eau, il doit faire 900 fois moins d'effort que l'eau, 900 étant le quarré de 30. La Regle que l'on donne sur ce point, est que les efforts de differens Fluides qui vont avec une même vitesse sont comme leurs densitez; aussi est-ce sur ce principe que l'on fait l'air 900 fois plus rare que l'eau. Cette conséquence néanmoins pourroit être fausse; car la Regle sur laquelle on la fonde, n'est exactement vraie que lorsque les Fluides que l'on compare ne diffèrent qu'en densité. Dans ce cas-là il est aisé de comprendre, que si de deux Flui-

140 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
des emportez avec une même vitesse, l'un est par exemple deux fois moins dense que l'autre, il doit faire deux fois moins d'effort ; car à chaque tems le corps contre lequel il agit est choqué par deux fois moins de particules, & par conséquent deux fois moins choqué : La Regle est donc certaine & évidente, mais elle est défectueuse, parce qu'il y a dans les Fluides bien d'autres différences auxquelles il faut avoir égard. La force du choc dans ceux qui vont également vite, ne dépend pas seulement de ce qu'en tems égal ils choquent avec la somme des efforts d'une plus grande ou d'une plus petite quantité de particules, mais encore de ce qu'ils font plus ou moins de résistance à la division ; c'est-à-dire du plus ou du moins de facilité qu'ont les particules à se séparer, à se déplacer. Or une plus grande ou une moindre facilité au déplacement peut avoir plusieurs causes, & par le concours de toutes ces causes devenir aussi considérable que l'on voudra.

La premiere cause qui se présente, est le different degré même de densité. J'ai déjà employé la densité ; c'est un double emploi que j'en fais, mais il n'est pas vicieux ; elle vient ici sous une autre considération. Il est clair qu'un Fluide doit être d'autant plus facile à diviser que ses particules sont moins serrées, moins près les unes des autres : c'est-à-dire d'autant plus qu'il est moins dense. Le plus ou le moins d'âpres, d'inégalité dans les surfaces des particules, & leurs figures plus ou moins irrégulieres & embarrassantes sont deux autres causes dignes d'attention & qui peuvent produire à l'égard de la facilité des Fluides à se diviser, & par conséquent dans la force de leur choc, de grandes differences.

J'avois crû d'abord pouvoir ajouter à ces articles le different degré de subtilité. Et en effet il étoit assez naturel de penser que, supposé d'ailleurs toutes choses égales, le Fluide qui avoit les particules les moins grossieres. devoit se diviser avec plus de facilité, & faire moins d'effort contre les obstacles opposez à son cours. Cette pensée

m'accommodoit tout-à-fait : elle me fournissoit le moïen du monde le plus aisé de réduire à rien la force du choc de la matière celeste qu'il est permis de faire aussi subtile qu'on voudra : mais en cherchant à démontrer une proposition qui me paroissoit si vrai-semblable , j'ai trouvé contre mon attente , quoiqu'après M. Newton , qu'elle étoit fausse , & que deux Fluides de même nature , & de même densité , & qui ne different qu'en ce que les particules de l'un sont plus petites que celles de l'autre , sont une égale résistance au mouvement des corps , ou si les Fluides se meuvent eux-mêmes , ont une égale force de choc. J'avoüe que j'ai eu grand regret de cet article , & que ce n'est qu'après avoir bien chicané contre ma propre démonstration que j'ai consenti à le raïer.

Cependant quelque fausse que soit l'idée dont j'avois crû pouvoir tirer un si grand avantage ; le plus ou le moins de subtilité ne laisse pas d'être ici d'une extrême considération par un autre endroit ; car un Fluide qui seroit si subtil que tous les corps lui donneroient un libre passage par leurs pores , choqueroit ces corps sans doute avec bien moins de force que ne feroit un autre Fluide de même nature , mais dont les particules seroient trop grossieres pour pouvoir passer à travers les pores des corps. Il est évident qu'encore que ces deux Fluides fussent d'une même densité , ils tomberoient par rapport à l'effet du choc dans le cas de deux Fluides inégalement denses ; tout ce qui dans le Fluide subtil continuë son cours par les pores des corps , librement & sans les choquer , ne devant point être compté. Or où cela ne peut-il point aller ?

La tiffure des corps les plus solides , est peut-être infiniment plus rare qu'on ne pense. Ce qu'il y a de bien certain , c'est que les sens & l'imagination nous trompent là-dessus. A les consulter , qui diroit que ce qu'un morceau de bois de chêne contient de sa matiere propre , ne fait pas la 20^e partie du volume sous lequel il paroît ? Peut-être s'en faut-il beaucoup qu'il n'en fasse la milliême.

ou la cent-millième ; mais au moins est-il facile de démontrer qu'il n'en fait pas la 20^e. Le bois de chêne pèse moins que l'eau , & l'eau pèse à peu près 19 fois moins que l'or. Un morceau de bois de chêne pèse donc plus de 20 fois moins qu'un morceau d'or de même volume ; mais c'est un principe démontré par M. Hughens même , que la Pesanteur spécifique des corps suit exactement la proportion de la quantité de matiere propre qu'ils contiennent sous un volume égal. Sur ce principe , un morceau de bois de chêne contient 20 fois moins de matiere propre qu'un morceau d'or égal en volume ; & par conséquent , en supposant même l'or parfaitement solide & sans pores ; ce qui est bien éloigné d'être vrai ; la quantité de matiere propre que contient un morceau de bois de chêne , n'est pas la 20^e partie de son volume : certainement les yeux ne disent pas cela. Par le même raisonnement un corps qui pesera 20 fois moins qu'un égal volume de bois de chêne , & 400 fois moins qu'un même volume d'or , contiendra aussi 20 fois moins de sa matiere propre que le chêne , & 400 fois moins que l'or : Les yeux en jugent-ils ainsi ?

Je n'ai aucunes lumieres sur la solidité absoluë des corps : je connois bien par le poids les differens rapports de densité ou de rareté qu'ils ont entr'eux ; mais si l'on considère un corps en lui-même , & sans le comparer à d'autres , il est impossible de connoître quel est son degré absolu de solidité , c'est-à-dire , de déterminer quelle proportion il y a entre la quantité de matiere propre qu'il contient , & son volume : ainsi je sçai qu'un morceau de bois de chêne est 20 fois moins solide qu'un égal morceau d'or ; mais ce morceau d'or jusqu'à quel point est-il solide ? Combien a-t-il de pores , combien de matiere propre ? c'est ce que j'ignore profondément ; ou plutôt c'est ce que je sçai avec la dernière évidence qu'on ne peut pas sçavoir ; & j'ose avancer cette proposition qui va paroître un paradoxe , c'est que si l'on vouloit soutenir , que dans un morceau d'or il n'y a pas de matiere

propre la cent-millionième partie du volume, on le soutiendrait à la vérité sans preuve positive, mais on pourroit défier hardiment les Physiciens de démontrer le contraire.

Je ne doute point que l'imagination de ceux qui jugent de tout par les sens, ne se révolte. L'or est le plus pesant de tous les corps que nous connoissons : il leur a toujours paru fort lourd, & par cela même fort massif; ce sentiment confus passera toujours chez eux pour une expérience aussi évidente qu'une démonstration : mais quand nous soutenons un poids, le sentiment de pesanteur que nous éprouvons est relatif au degré de force que nous avons pour le soutenir : ce qu'un homme trouve léger, est pour un enfant un poids énorme, & nous pourrions avoir une telle force, que la plus pesante masse nous paroîtroit aussi légère que nous paroît une plume. Ainsi à juger par sentiment ; des hommes mille fois plus forts que nous, trouvant l'or mille fois moins pesant que nous ne le trouvons, le jugeroient aussi mille fois moins solide que nous ne le jugeons. Venons à conclusion ; les sens ni l'imagination ne devant pas être écoutés sur ce point, & la raison ne nous y fixant aucunes bornes, il est permis de donner à la tiffure des corps toute la rareté, comme à la matière celeste toute la subtilité dont on a besoin ; pourvu seulement que la supposition que l'on fera pour l'effet qu'on veut expliquer, ne se trouve pas combattue par d'autres effets.

Encore un article sur lequel on ne sçauroit trop appuyer, & qui se rapporte à celui des figures plus ou moins embarrassantes ; c'est que les particules de la matière celeste n'ont ni figure ni grosseur déterminée ; chaque particule pouvant se diviser, & se divisant à l'infini, selon les besoins, & avec la dernière facilité, elles s'accommodent sans peine à toutes sortes de places ; ce qui diminue infiniment dans le fluide la résistance au déplacement, & qui affoiblit d'autant son effort.

A tout ce que nous avons dit sur les causes qui peuvent

contribuer à rendre insensible l'effort de la matiere celeste, nous pourrions ajoûter des experiences de M. Newton qui nous sont favorables. M. Newton les a faites pour s'assurer si la matiere celeste qui pénètre tous les corps, & remplit leurs pores, avoit quelque part à la résistance que ces corps souffrent lorsqu'ils sont mûs dans un Fluide; & il n'a pas trouvé plus de résistance de ce côté-là, que si cette matiere n'existoit pas, & que les pores fussent entièrement vuides. Nous ne nous prévaudrons pourtant point de sa découverte: quelle conséquence pourrions-nous tirer d'une résistance insensible dans d'aussi foibles mouvemens que ceux des experiences que nous pouvons faire? Mais quel sujet d'étonnement qu'un aussi habile homme que M. Newton en ait conclu, ou ait été tout près d'en conclure le vuide, nous invitant même à répéter les expériences pour nous convaincre de plus en plus de la solidité prétendue de cette conclusion.

Quand après toutes les considerations que l'on vient de faire, on ne seroit pas moins frappé comme d'une absurdité, de cette rapidité prodigieuse que nous donnons à la matiere celeste proche de la Terre, quoiqu'elle ne s'y fasse pas sentir, il semble qu'il n'y auroit pas d'autre parti à prendre, que de la digerer cette absurdité, comme on est obligé d'en digerer tant d'autres dans la plupart des sujets de Physique, & generalement dans presque tous les objets de nos connoissances: car enfin cette absurdité soit prétendue, soit vraie, où conduit le sentiment que je défends, se trouve être une suite nécessaire des plus certaines observations des Astronomes, ainsi que je le vais démontrer.

Les Planetes qui tournent autour du Soleil à différentes distances, vont plus vite les unes que les autres: le fameux Kepler a remarqué le premier, que leurs vitesses gardent entr'elles la raison renversée des racines quarrées de leurs distances. Supposons par exemple que la distance de Venus au Soleil soit à celle de Mercure comme 9 à 4; je

je prends ces nombres, parce qu'il font commodes, & qu'ils ne s'éloignent pas beaucoup du rapport exact qu'ont entr'elles ces deux distances, la racine quarrée de 9 est 3, celle de 4 est 2 : la racine quarrée de la distance de Venus étant donc à la racine quarrée de la distance de Mercure comme 3 à 2 ; on trouve selon la regle de Kepler, qu'en raison renversée la vitesse de Venus est à celle de Mercure comme 2 à 3.

Toutes les observations confirment cette regle ; elle n'est pas suivie seulement par les Planetes principales qui tournent autour du Soleil ; elle l'est encore exactement par les petites Planetes qui font leurs révolutions autour d'une Planete principale ; c'est ce qu'a pleinement vérifié dans les Satellites de Jupiter M. Cassini qui nous en a donné la Theorie, & qui par ses sçavantes & ses utiles découvertes a une si grande part à la gloire des progres que l'Astronomie a faits de nos jours, & de si grands droits à la gloire même de ceux qu'elle pourra faire après lui. Il en est de même des 5 Satellites de Saturne que des 4 de Jupiter. C'est donc une Loi inviolablement observée par les corps celestes dans les petits Tourbillons particuliers ainsi que dans le grand : & comme l'hypothese la plus raisonnable sur le mouvement des Planetes, ou pour mieux dire, la seule raisonnable, est qu'elles suivent le cours de la matiere celeste qui les emporte, c'est aux différentes vitesses de la matiere celeste prise à différentes distances du centre du Tourbillon, que doit s'appliquer la regle de Kepler.

Pour venir presentement à la Démonstration que j'ai promise ; Si par cette regle nous cherchons la vitesse qui convient à la matiere celeste proche de la Terre, nous trouverons qu'elle doit être à celle de la Terre à peu près comme 17 à 1, telle précisément que nous avons déjà vu que la demandoit le degré de pesanteur des corps terrestres : le calcul n'en est ni long ni difficile.

La Lune étant éloignée de nous ou du centre de notre Tourbillon particulier d'environ 60 demi diametres de la

Terre, le cercle qu'elle parcourt autour de ce centre, est 60 fois aussi grand que celui qui décrit un point de la surface de la Terre sous l'Equateur ; & par conséquent elle a 60 fois autant de chemin à faire pour achever sa révolution, que ce point pour achever la sienne. Ainsi quand la Lune n'achèveroit sa révolution qu'en 60 jours, elle iroit aussi vite que la Terre qui tourne en un jour : Si la révolution de la lune s'achèvoit en 30 jours, sa vitesse seroit double de celle de la Terre sous l'Equateur, la Lune n'employant qu'un peu plus de 27 jours & demi à faire son tour, il s'ensuit que sa vitesse est un peu plus que double de celle de la Terre. Cela posé, la distance de la matiere celeste qui circule ici bas, & qui n'est éloignée du centre du Tourbillon que d'un demi-diametre de la Terre, & la distance de la Lune que nous avons faite de 60 de ces demi-diametres, sont l'une à l'autre comme 1 à 60, & leurs racines quarrées à peu près comme 1 à 8, ou comme 2 à 16, ou comme un peu plus de 2 à 17 ; donc en raison renversée, conformément à la regle de Kepler, la vitesse de la matiere celeste proche de nous, est à la vitesse de celle qui emporte la Lune comme 17 à un peu plus de 2 ; mais nous avons trouvé que la vitesse de la Lune, ou de la matiere celeste dont elle suit le cours, étoit en effet à la vitesse de la Terre, comme un peu plus de 2 à 1 ; donc la vitesse de la matiere celeste ici bas, est à la vitesse de la Terre environ comme 17 à 1 ; *ce que j'avois à démontrer.*

Tel est le parfait accord entre ce qu'exige de vitesse dans la matiere celeste le Phenomene de la pesanteur, & ce que nous trouvons d'ailleurs qu'elle en doit avoir en vertu d'une loi établie par les Observations, & démontrée comme la loi fondamentale de tout le Systême de l'Univers, par l'ingénieux Auteur de *la nouvelle Explication du Mouvement des Planettes*. Si un accord si merveilleux ne delivre pas entierement l'esprit de la peine que lui fait ce mouvement rapide de la matiere celeste proche de la Terre, dont cependant on n'apperçoit aucun

effet sensible ; il doit au moins le disposer à recevoir plus favorablement les considérations que nous avons proposées pour résoudre , ou pour affoiblir l'objection de M. *Hughens*.

Il est vrai qu'il se présente bien de nouveaux embarras ; & je n'ai garde de dissimuler que cette loi même que suivent les vitesses des Planetes , quand on la considere dans la matiere celeste , est environnée de difficultez ; il y en a plusieurs qu'un peu d'attention fait évanouir ; il seroit ennuyeux & inutile de s'y arrêter : il y en a d'autres plus considérables , & parmi celles-ci deux principales , que je vais toucher en peu de mots.

La premiere s'offre d'abord , & il est impossible de n'en être pas frappé. Selon la regle de *Kepler* jointe à l'hypothese de nos Tourbillons , la matiere celeste fait autour de la Terre 17 révolutions en un jour , d'où vient que la Terre n'en fait qu'une ? Pourquoi ne suit-elle pas la regle ? Cette difficulté est commune aux autres Tourbillons ; *Jupiter* , & *Saturne* tournent chacun autour de son centre ; & tous deux infiniment moins vite qu'ils ne devroient selon la regle. Le Soleil qui occupe le centre du grand Tourbillon , tourne de même autour de son axe , & met environ 27 jours & $\frac{1}{2}$ à tourner , au lieu que suivant la regle , il n'y devroit emploier qu'un peu plus de 3 heures. J'avoue que je ne suis pas content de mes lumieres sur cette difficulté , & que je n'ai pas de plus solide réponse à y faire que celle qu'on peut voir dans la nouvelle Explication du Mouvement des Planetes , Ouvrage qui est plus aisé de critiquer qu'il ne le seroit d'en faire un meilleur.

L'autre difficulté est de *M. Newton*. Au milieu d'un Fluide uniforme , & en repos ; c'est-à-dire , qui n'a d'autre mouvement que l'agitation même en tous sens de ses parties , qui le rend fluide , il conçoit une Sphère solide qui tourne autour d'un axe à peu près comme la Terre. Cette Sphère en tournant fait une continuelle impression sur une premiere surface du Fluide , & celle-ci sur une

autre, & cette autre sur une autre encore, & ainsi de suite. Dans cette supposition arbitraire, il cherche géométriquement avec quelle proportion le mouvement se communique aux surfaces de proche en proche, ou quel doit être le rapport des vitesses à différentes distances du centre commun : & son Analyse lui donnant un rapport différent de celui qui s'observe dans les Planètes, il conclut qu'elles ne sont point emportées par le Fluide, & que les Tourbillons Cartesiens seroient incompatibles avec la loi qu'établit la règle de Kepler.

Je passe un grand nombre de réflexions qu'il y auroit à faire sur la Démonstration de M. Newton : je veux bien la recevoir ; mais en la recevant je ne laisse pas de rejeter la conclusion qu'il en tire contre nos Tourbillons. Elle n'a de force qu'en vertu de la supposition gratuite que M. Newton fait, d'un Fluide parfaitement uniforme, & par tout d'une égale fluidité, & d'une résistance de la part des Surfaces, dans la raison de la vitesse. Mais si l'on suppose que la Fluidité augmente à mesure que l'on s'éloigne du centre, ou que l'on suppose une résistance plus grande que dans la raison de la vitesse, on retrouvera sans peine le même rapport que donne la Règle.

Ce que nous disons ici n'a pas échappé à l'exactitude de M. de Newton ; il l'a très expressément remarqué ; mais il se contente de dire que ces suppositions ne seroient pas raisonnables ; & quoique la dernière soit incontestable, il aime bien considérer la pesanteur comme une qualité inhérente dans les corps, & ramener les idées tant décrites de qualité occulte, & d'attraction. Il ne faut pas nous flatter que dans nos recherches de Physique nous puissions jamais nous mettre au dessus de toutes les difficultés ; mais ne laissons pas de philosopher toujours sur des principes clairs de Mécanique ; si nous les abandonnons, toute la lumière que nous pouvons avoir est éteinte, & nous voilà replongez de nouveau dans les anciennes ténèbres du Peripathetisme, dont le Ciel nous veuille préserver.

METHODE GENERALE

Pour déterminer le point d'intersection de deux Lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux moindres, ou plus grands qu'un droit: Et pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de tels points d'intersection.

PAR M. DE REAUMUR.

D'Illustres Géometres ont donné, avec le secours des nouvelles Méthodes, des formules pour trouver les raïons des Développées; ou, ce qui revient au même, ils nous ont appris des expressions générales, par le moïen desquelles il est aisé de déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque sous un angle droit. Ils ont aussi trouvé la nature des Courbes décrites par une infinité de telles intersections; mais je ne sçai personne, qui ait cherché à déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux, moindres, ou plus grands qu'un droit, & la nature des Courbes engendrées par une infinité de pareilles intersections, quoique ce Problème paroisse assez digne de la curiosité des Géometres, & qu'il surpasse autant par son étendue celui des raïons des Développées, qu'il est d'angles differens de l'angle droit: c'est en partie ce qui m'a excité à en chercher la Solution que je vais donner.

1709.
4 May.

PROBLÈME GENERAL.

FIG. I. Une Courbe quelconque $AMmG$ étant donnée, si l'on conçoit qu'une infinité de Lignes droites FM, fm , rencontrent cette Courbe en M, m , en faisant avec les Tangentes en ces points les angles FMT, fmt égaux à un angle quelconque donné IOL moindre ou plus grand qu'un droit; il est clair que les droites FM, fm se couperont quelque part en N . Or on demande 1^o, ce point d'intersection N de ces deux lignes indéfiniment proches FM, fm : 2^o, la nature de la Courbe BNK décrite par une infinité de semblables intersections.

SOLUTION.

I. Aïant pris l'arc Mm infiniment petit, soient menez aux points M, m les raïons MC, mC de la Developée de la Courbe AMG , lesquels se rencontrent au point C ; & soient de plus tirées les droites MT, mt perpendiculaires en M, m , aux raïons CM, Cm , ou tengentes de la Courbe en ces points. Si l'on suppose à présent que les droites FM, fm , qui font avec la Courbe les angles constans FMT, fmt , se croisent en N ; & que du centre N , du raïon Nm on décrive le petit arc mR , on formera le secteur NmR semblable au secteur CMm ; ce qu'il est aisé de voir, puisque les triangles MSC, Nms sont semblables, aïant les angles MSC, mSN égaux, & aussi les angles CMS, SmN ; car si des angles NMT, Nmt , égaux par la supposition (puisque'ils sont les complemens à deux droits des angles égaux FMT, fmt) on ôte les angles droits CMT, Cmt , les angles restans CMS, SmN seront égaux; par conséquent l'angle MCm est égal à l'angle mNM , & les secteurs MCm, mNR sont semblables.

On abaïssera encore les perpendiculaires MP, mp sur l'axe AP , & on lui tirera la parallèle MV ; après quoi aïant nommé MC, r ; MN, z ; Mm, ds ; les secteurs semblables MCm, mNR donneront l'analogie suivante,

$MC(r) \cdot MN(z) :: Mm(ds) \cdot mR = \frac{z ds}{r}$. Mais il est clair que tous les angles du triangle infiniment petit MmR sont donnez, l'angle mMR étant égal à l'angle donné FMT , & l'angle mRM droit. Ainsi nommant le sinus de l'angle donné mMR , m ; celui de l'angle MmR , n ; on aura cette autre analogie; $m.n :: mR \left(\frac{z ds}{r} \right) \cdot MR = \frac{nz ds}{mr}$.

On a encore $MR = \sqrt{Mm^2 - mR^2} = \frac{ds \sqrt{rr - zz}}{r}$. Ces deux valeurs étant comparées, donnent l'égalité suivante, $\frac{nz ds}{mr} = \frac{ds \sqrt{rr - zz}}{r}$, ou $nz = m \sqrt{rr - zz}$; & après avoir quarré, transposé $mmzz + nnzz = mmrr$; ce qui donne enfin $z = \frac{+mr}{\sqrt{mm+nn}}$. De sorte que pour déterminer le point N , il faut prendre MN 4^e proportionnelle au sinus total, au sinus de l'angle donné, & au raïon de la Développée.

Car on aura $\sqrt{mm+nn} \cdot m :: r \cdot z = \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On seroit arrivé par un chemin semblable à la même expression de MN , si on eut pris l'angle FMT obtus, au lieu qu'on l'a fait aigu. C'est pourquoi il seroit inutile de repeter ici la même analyse, & une autre figure pour ce 2^e cas. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

L'équation $z = \frac{+mr}{\sqrt{mm+nn}}$ apprend, que si on joint le point d'intersection C des raïons de la Développée, & le point d'intersection N des droites FM , fm par une droite NC , cette ligne sera perpendiculaire sur FMN . Car soit élevée une perpendiculaire au point N , je dis qu'elle rencontrera le raïon de la Développée en C . Ce qui est visible, ces triangles MmR , CMN , étant semblables, aïant l'un & l'autre un angle droit, & les angles CMN , MmR égaux. Car l'angle CMT étant droit, les angles FMT , CMN pris ensemble, sont aussi égaux à un droit: de même que les angles RMm , & MmR . L'on a

152 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 donc $FMT + CMN = RMm + MmR$; d'où ôtant d'un
 côté l'angle FMT , & de l'autre son égal RMm , on aura
 $CMN = MmR$. Partant ces deux triangles rectangles
 font semblables, & leurs angles ont les mêmes sinus.
 D'où l'on tirera l'analogie suivante : le sinus (m) de l'angle
 MCN , est au sinus ($\sqrt{mm+nn}$) de l'angle droit :: MN
 (z). $MC = \frac{z\sqrt{mm+nn}}{m} = r$. Par conséquent la ligne MC
 est le rayon de la Développée ; & la ligne CN qui joint
 les points C & N , est perpendiculaire sur FM en N . *Ce*
qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

On tire du Corollaire précédent une maniere bien
 simple de déterminer le point N , puisqu'on n'aura qu'à
 tirer du point C une perpendiculaire sur FM prolongée,
 elle la rencontrera au point cherché N ; ou, ce qui re-
 vient au même, on décrira sur le diametre MC , un demi-
 cercle MNC , qui sera rencontré par FM prolongée au
 point cherché N .

COROLLAIRE III.

Il est évident que le cercle $MNCDM$, décrit sur le
 rayon MC de la Développée pour diametre, est le lieu qui
 contient tous les points d'intersection de deux droites
 FM , fm infiniment proches, qui font avec le même arc
 infiniment petit Mm de la Courbe AMG les angles égaux
 FMT , fmt , quels qu'ils soient : ou, ce qui est la même
 chose, que si l'on faisoit mouvoir les droites FM , fm ,
 sur les points M & m pris pour poles, de maniere que
 l'angle FMT fut toujours égal à l'angle fmt ; leur point
 d'intersection N décriroit un cercle $MNCDM$, qui a le
 rayon MC de la Développée pour diametre.

COROLLAIRE IV.

D'où il suit 1^o, que le point N d'intersection est toujours
 du côté concave de la Courbe, c'est-à-dire, du même
 côté

côté que le raïon de la Développée. 2°. Que lorsque l'angle FMT sera aigu, le point d'intersection doit se trouver par de-là MC par rapport à T . 3°. Que lorsque l'angle FMT sera obtus, que le point N sera placé en deçà de MC par rapport à T . 4°. Que lorsque l'angle FMT sera droit, alors le point d'intersection N deviendra le point C qui est celui où se croisent les raïons de la Développée.

COROLLAIRE V.

On voit encore par les Corollaires précédens, que MN est toujours moindre que MC ; ce qui est aussi visible par l'équation $z = \frac{+mr}{\sqrt{mm+nn}}$, qui sert aussi à faire voir que lorsque MC (r) sera nul ou infini, z sera aussi nul ou infini.

COROLLAIRE VI.

L'équation $z = \frac{+mr}{\sqrt{mm+nn}}$ détermine non seulement le point d'intersection N ; mais encore un autre point F, f , posé de l'autre côté de la Courbe, qui sera aussi éloigné du point M , que l'est le point N .

COROLLAIRE VII.

Deux de ces trois choses étant données, l'angle FMT , le raïon CM de la développée, & la ligne MN , il sera toujours facile de trouver la 3°. 1°. L'angle FMT & le raïon MC de la développée étant donnés, on trouve (*Corol. 1. & 2.*) la grandeur de MN . 2°. L'angle FMT , & la droite NM étant données, il sera aisé d'avoir le raïon de la développée MC , il n'y aura qu'à prendre l'angle NMC égal au complément à l'angle droit de l'angle FMT , & élever au point N la perpendiculaire NC , elle ira rencontrer MC en C ; de manière que CM sera le raïon de la développée, ce qui est évident, (*Corol. 1. & 2.*) 3°. La grandeur des lignes MC , MN étant donnée, on trouvera aisément celle de l'angle FMT , puisqu'on sçait que l'angle MNC est droit, il n'y aura donc qu'à faire cette propor-

tion : Comme $MC . MN$, ainsi le sinus de l'angle droit est au sinus de l'angle MCN , ou de son égal FMT . Ce qu'il falloit trouver.

Equation de la Courbe formée par une infinité de points d'intersections N.

II. Pour avoir à présent une équation qui exprime la nature de la Courbe BNK , formée par une infinité de points d'intersection tels que le point N , on tirera les perpendiculaires NQ sur l'axe AQ de la Courbe donnée AMG , & TF sur FM . On joindra les points, T, N , par la droite TN . On menera enfin par le point N une parallèle à l'axe AQ qui rencontrera MP en E . Cette préparation faite, tout restant nommé comme art. I. on nommera de plus les indéterminées de la Courbe AMG , AP , x ; PM , y ; celles de la Courbe BNK , AQ , u ; QN , s ; la soutangente TP , p ; la tangente TM , t ; d'où on aura $PQ = NE = AQ - AP = u - x$; $ME = PM - PE = y - s$. Or $MN^2 = ME^2 + NE^2$, ce qui étant exprimé algébriquement donne l'équation $(A) zz = yy - 2sy + ss + uu - 2ux + xx = \frac{mmrr}{mm+nn}$ (art. I.). On a encore $NT^2 = QT^2 + QN^2 = TF^2 + FN^2$; ce qui donnera une autre équation algébrique, après qu'on aura trouvé les expressions des lignes FM , FT ; ce qui est facile, l'angle TFM étant droit, l'angle FMT donné, & par conséquent les triangles FMT , RMm semblables. Ainsi leurs angles ont les mêmes sinus; ce qui donnera les deux analogies suivantes (art. I.). Le sinus de l'angle droit $(\sqrt{mm+nn})$. au sinus de l'angle FTM (n) :: TM (t). $FM = \frac{nt}{\sqrt{mm+nn}}$. Et le sinus de l'angle droit $(\sqrt{mm+nn})$. au sinus de l'angle FMT (m) :: TM (t). $TF = \frac{mt}{\sqrt{mm+nn}}$. Partant $FN = FM + MN = \frac{nt+mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On a aussi $QT = PT + PQ = p + u - x$. On a donc $QT^2 + QN^2 = pp + 2pu + uu - 2ux$

$$-2px+xx+ss; \& FT^2+FN^2=\frac{nut+2mnr+mmr+mmt}{mm+nn}$$

ce qui donne l'équation (B) $tt+\frac{mmr+2mnt}{mm+nn}=ss+$

$pp+2pu+uu-2px-2ux+xx$: De sorte que soustrayant le premier membre de l'équation A de ce membre de l'équation B, & l'autre de l'autre, on aura l'équation (C) $\frac{2mnt}{mm+nn}=pp-tt+2pu-2px-yy+2sy$, dans laquelle substituant pour $pp-tt$ sa valeur $-yy$, on a enfin l'équation (D) $\frac{mnt}{mm+nn}=pu+sy-px-yy$, qui avec

l'équation (A) $\frac{mmr}{mm+nn}=yy-2sy+ss+uu-2ux+xx$, & celle de la Courbe $AMmG$, seront suffisantes pour en trouver un 4^e qui ne contiendra que les coordonnées u, s de la Courbe BNK . *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

Il est clair que la Courbe d'intersection BNK sera géométrique, lorsque la Courbe génératrice $AMmG$ le sera.

COROLLAIRE II.

Il suit de la génération de la Courbe BNK que MN est la Tangente en N de cette Courbe. Car 1^o, il est évident, qu'avant de la rencontrer en N comme en S , elle est hors de cette Courbe, puisque si elle la rencontrait en S , il faudroit qu'elle s'y croisât avec une ligne infiniment proche mS , (car on peut toujours mener du point S une droite mS sur un petit arc Mm , qui fasse avec lui un angle égal à FMT) ; & alors le point N seroit en S contre la supposition. 2^o. Elle ne la rencontre pas par-delà le point N (ce qu'on apperçoit aisément en tirant une droite GK , avec les conditions requises par le Problème) infiniment près de mN , leur point d'intersection K devant déterminer un de ceux de la Courbe : Mais il est visible que GK coupe MN prolongée en H , avant de couper mN en K ; d'où il suit que le point H est hors de la Courbe BNK ; & à plus forte raison les autres points

156 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE.
de MN en font aussi dehors ; par conséquent elle rencontre la Courbe au seul point N , où est sa Tangente en ce point.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corollaire précédent , que CN est perpendiculaire à la Courbe BNK , puisque (*art. I. Corol. I.*) elle est perpendiculaire à NM Tangente de cette Courbe.

COROLLAIRE IV.

On pourroit regarder la Courbe BNK comme une espece de Caustique par refraction dont on n'a point encore parlé, formée par l'intersection des rayons infiniment proches qui rencontreroient $AMmG$ sous un même angle : car si on imagine que l'espace renfermé par cette Courbe, est un verre éclairé par une infinité de points lumineux Z , T , &c. il est clair que tous les rayons ZM , TM qui rencontreront cette surface sous des angles ZMT , Tmt égaux continueront leur route après la réfraction sous les angles égaux FMT , fmt ; par conséquent ils se couperont en N , & par une infinité de pareilles intersections la Caustique BNK sera décrite.

COROLLAIRE V.

L'espace renfermé entre la Courbe $AMmG$, & la Courbe BNK , est à l'espace renfermé entre la Courbe $AMmG$ & sa Développée dans le rapport de $mm.mm+nn$: car la somme infinie des Secteurs mRN remplira ce 1^r espace , celle des Secteurs MmC le 2^e ; or ces sommes contiendront chacune un égal nombre de Secteurs , chaque NmR aiant un CMm qui lui correspond ; comme aussi chaque CMm , un NmR . Mais ces Secteurs sont entr'eux dans le rapport constant de $mm . mm + nn$, leurs sommes sont donc aussi entr'elles dans le même rapport. Il est aisé de démontrer que le Secteur NmR , est au Secteur CMm : $mm . mm + nn$. NmR étant $= mR \times \frac{1}{2} NM = \{ \text{art. I.} \}$

$\frac{zds}{r} \times \frac{1}{2} z = \frac{mmrds}{2 \times mm + nn}$, & $CMm = Mm \times \frac{1}{2} CM = \frac{rds}{2}$. Par-
tant $NmR.CMm :: \frac{mmrds}{2 \times mm + nn} \frac{rds}{2} :: mm.mm + nn$. Ce
qu'il falloit démontrer.

E X E M P L E I.

Soit la Courbe donnée un quart de cercle $AMmG$, qui FIG. II.
est rencontré par une infinité de droites Fm, fm , qui font
avec lui des angles FMT, fmt , égaux à un même angle
donné. Si on veut avoir l'équation qui exprime la nature
de la Courbe décrite par une infinité d'intersections, sem-
blables à celle des droites FM, fm , infiniment proches;
on aura (tout restant nommé comme art. 1. & 2.) & nom-
mant de plus le rayon du cercle donné a ; $x = a - \sqrt{aa - yy}$;
le rayon de la développée (r) sera aussi $= a$, la développée
de cette Courbe étant son centre C ; l'expression de la
soutangente (p) deviendra $= \frac{yy}{\sqrt{aa - yy}}$; & celle de la Tan-

gente (t) $= \frac{ay}{\sqrt{aa - yy}}$: lesquelles valeurs de x, r, p, t , substi-
tuées dans les deux équations générales (A) $\frac{mmrr}{mm + nn} = yy$
 $- 2sy + ss + uu - 2ux + xx$: (D) $\frac{mntv}{mm + nn} = pu + sy - px$
 $- yy$; elles se changeront en celles-cy:

$$(E) \sqrt{aa - yy} = \frac{ss - 2sy + uu - 2au + 2aa - \frac{mmaa}{mm + nn}}{2a - 2u}$$

$$(F) \sqrt{aa - yy} = \frac{ay - uy - \frac{mnaa}{mm + nn}}{s} : \text{égant le 2}^e \text{ membre de}$$

l'équation E au 2^e membre de l'équation F , on en tirera,

$$y = \frac{s^3 + 2aas - 2aus + suu + \frac{-mmaas - 2mnaau + 2mna^3}{mm + nn}}{2aa - 4au + 2uu + 2ss},$$

On tirera aussi l'équation F par les voies ordinaires,

$$y = \frac{mna^3 - mnaau}{mm + nn} + \sqrt{\frac{+a^4ss}{aas^4} + \frac{-2a^3uss}{aauuss} - \frac{mnnna^4ss}{mm + nn^2}}$$

$$aa - 2au + uu + ss \quad V \text{ iij}$$

158 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 & après avoir égalé les deux valeurs d'y quarré, transféré, effacé les termes qui se détruisent, on aura l'équation suivante, qui ne contient que des u , & des s ,

$$u^4 - 4au^3 + \frac{4a^2uu}{mm+nn} - \frac{4assu}{mm+nn} - \frac{2mmaass}{mm+nn} + s^4 - \frac{3m^4a^4}{mm+nn} = 0.$$

Si on divise cette dernière équation par l'équation (G)
 $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, on aura pour quotient l'équa-

tion (H) $uu - 2au + ss + \frac{mmaa}{mm+nn} = 0$, qui exprime la nature de la Courbe d'intersection BNK , qui est aussi un quart de cercle dont le rayon $BC = \frac{na}{\sqrt{mm+nn}}$; il est visi-

ble que l'équation G est aussi une équation au cercle; mais il reste à sçavoir de quels points ce cercle est le lieu; ce qu'on trouvera aisément pour peu qu'on se souvienne que (art. 1. corol. 6.) l'équation $z = \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$ donne non-

seulement le point d'intersection N des droites FM , fm , mais encore les points F, f , aussi éloignez des points M, m , où elles rencontrent la Courbe, que l'est celui d'intersection des mêmes point M, m , & comme la première équation générale A , contient le quarré de $z = \frac{mvr}{mm+nn}$, il suit qu'on doit non-seulement trouver par le moien de ces deux équations, celle qui exprime la nature de la Courbe décrite par les points d'intersections N ; mais encore une autre qui donnera l'équation d'une Courbe qui contient tous les points F tels que $FM = MN$. Aussi est-ce ce que donne l'équation (G) $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, qui est un cercle, dont le rayon $CH = a \sqrt{\frac{4mm+nn}{mm+nn}}$.

La seule analyse de l'article 1^r suffit pour faire voir, que la Courbe d'intersection BNK est un cercle. Car la développée de la Courbe $AMmG$ étant le point C , il est évident que toutes les lignes CN qui joignent les points d'intersections N , & les extrémités des rayons de la développée se termineront au point C ; il n'est pas moins

clair que la grandeur de CN est constante, puisque (art. 1. & corol. 1.) CM est à MN dans un rapport constant, & que tous les angles du Triangle rectangle CMN sont constants. On voit avec la même facilité que le lieu des points F pris tels que $FM = NM$ est aussi un cercle, puisque la droite $FC = \sqrt{FN^2 + NC^2}$ est de grandeur constante. Le seul article 1. suffira aussi dans l'Exemple qui suit, pour faire trouver la nature de la Courbe d'intersection N .

E X E M P L E II.

Soit la Courbe donnée $AOMG$ une Logarithmique FIG. III.
spirale, dont la propriété est que si du point A (qu'elle environne par une infinité de tours) on lui mene une appliquée quelconque AM ; & au point M , la Tangente MT , qui rencontre en T la Soûtangente AT perpendiculaire à AM , le rapport de AM à AT est constant; ou, ce qui est la même chose, l'angle AMT est toujours le même. Si l'on conçoit que deux lignes infiniment proches FM, fm , font avec cette Courbe des angles FMT, fmt , égaux à un angle donné, on déterminera aisément le point d'intersection N de ces deux lignes, en décrivant le cercle MNC sur le rayon MC de sa développée pris pour diamètre, FM prolongée rencontrera ce cercle en N qui est le point d'intersection des droites FM, fm , (art. 1. corol. 1.) pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de points d'intersections semblables au point N , on décrira la développée ACR de la Logarithmique AMG , qu'on sçait être la même Logarithmique mise dans une position différente; après quoi on joindra les points N, A , par la droite NA ; on mènera de plus sur NA la perpendiculaire AF , & on prolongera MN Tangente (art. 2. corol. 2.) de la Courbe cherchée, jusques à ce qu'elle rencontre AF au point F . Cette préparation supposée, il est aisé de démontrer que la Courbe d'intersection ANK est elle-même une Logarithmique spirale, 1^o, différente de la Logarithmique

AOMG, lorsque l'angle *ANF* est plus grand, ou moindre que l'angle *AMT*; 2° , qu'elle sera la même Logarithmique spirale mise dans une autre position lorsque l'angle *ANF* sera égal à l'angle *AMT*. Pour le démontrer, il ne faut que faire voir que l'angle *ANF* est constant, ce qu'on peut faire de la manière suivante : Dans le triangle *AMN*, l'angle *NMA* est constant ; car il est composé des angles constans *NMC* (complément à l'angle droit de l'angle donné *FMT*) & *CMA* (complément à l'angle droit de l'angle *AMT* constant par la propriété de la spirale donnée). Or les côtes *AM*, *MN*, qui forment l'angle constant *AMN*, sont entr'eux dans un rapport constant ; d'où il suit que les deux autres angles du même triangle, sont aussi constans. Il s'agit seulement de démontrer que *AM* est à *MN* dans un rapport constant, ce qui est visible, puisque *AM* est à *MC* dans un rapport constant par la propriété de la Logarithmique *ACR*, & que *MC* est aussi à *MN* dans un rapport constant (*art. 1.*)
 :: $\sqrt{mm} + nn . m$. Donc il est aussi évident que *AM* est à *MN* dans un rapport constant ; par conséquent les angles *MNA*, *MAN* sont constans, & la Courbe d'intersection *ANK* est une Logarithmique spirale ; car l'angle *NAF* étant droit, *NA* sera à *AF* dans un rapport constant, ce qui est la propriété de cette Courbe. Aussi semble-t-il que ce lui en soit une de se reproduire ; puisqu'outre toutes les manières dont on a fait voir qu'elle se reproduisoit, en voici encore une nouvelle. Car toutes les fois que l'angle *FNA* sera égal à l'angle *TMA*, elle se reproduira elle-même.

COROLLAIRE I.

Pour faire l'angle $FNA = TMA$, ou pour avoir un angle *FMT* tel que la Courbe d'intersection *ANK* ; soit la même Logarithmique spirale *AOMG* dans une position différente : on n'aura qu'à faire l'angle $FMT = TMA$; & on aura ce qu'on cherchoit. Pour le démontrer, soient joints les points *N*, *C*, par la droite *NC* ; il est

est évident que l'angle $NCM = FMT$ (puisque'étant joints l'un ou l'autre au même angle NMC , ils forment un angle droit) $=$ (*hypot.*) $TMA = MCA$. D'où il suit que les triangles rectangles MNC , CAM , sont semblables & égaux; partant $NC = AC$, ou l'angle $CND =$ l'angle CAD , & l'angle $NDC =$ l'angle CDA ; par conséquent les angles en D sont droits. Or le triangle rectangle NDC , est semblable au triangle rectangle MDN ; d'où il suit enfin que l'angle $MND =$ l'angle $NCD = FMT =$ (*Const.*) TMA . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

Il suit du Corollaire précédent, que la position de $AOMG$, lorsqu'elle deviendra la Courbe d'intersection ANK , sera telle 1°, que menant par un point quelconque la Tangente NF à cette Courbe, elle coupera la Logarithmique $AOMG$ en M , après quoi si on mène par le point M , une Tangente MT , à la Logarithmique $AOMG$, la Soûtangente AF de la Logarithmique ANH , sera perpendiculaire à la Tangente MT , au point B où elles se rencontrent: 2°, que AF sera parallèle au rayon MC de la développée de la Courbe $AOMG$; car les angles MDA , DAB , BMD , étant droits, l'angle MBA sera droit aussi, & $MBAD$ un parallélogramme rectangle: 3°, que les Appliquées AN de cette Logarithmique sont parallèles aux Tangentes MT de la Logarithmique $AOMC$: 4°, que $MN = MA$; ainsi pour construire la Logarithmique d'intersection ANH , dans ce cas il ne faut que prendre sur FM prolongée $MN = MA$, Appliquée de la Spirale donnée $AOMG$.

COROLLAIRE III.

Si l'angle donné FMT est égal au complément à deux droits de l'angle AMT ; c'est-à-dire, si on conçoit que les droites HM rencontrent la Logarithmique $AOMG$ en M , de manière que l'angle $HMT =$ à l'angle MTA + l'angle MAT , la Courbe d'intersection deviendra le

162 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
point *A* , auquel la Spirale logarithmique *GMO* , arrive
après une infinité de tours ; ce qui est évident, puisqu'a-
lors *HM* est l'Appliqué *AM* prolongée , & que toutes les
AM partent du point *A*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

E X P E R I E N C E S

S U R L E S M E T A U X ,

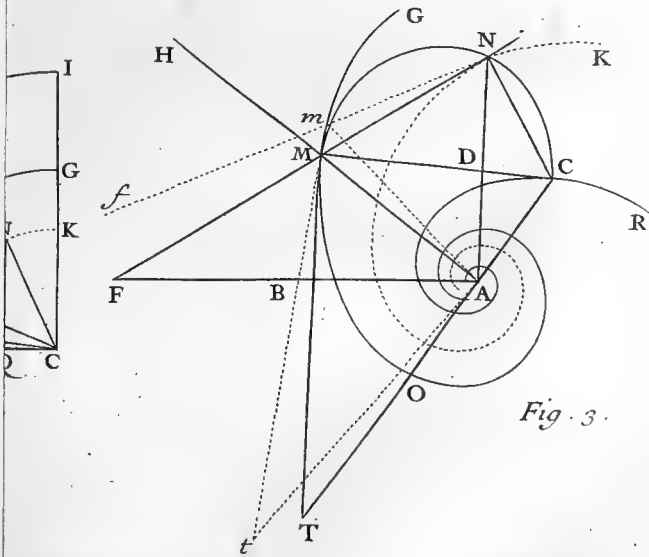
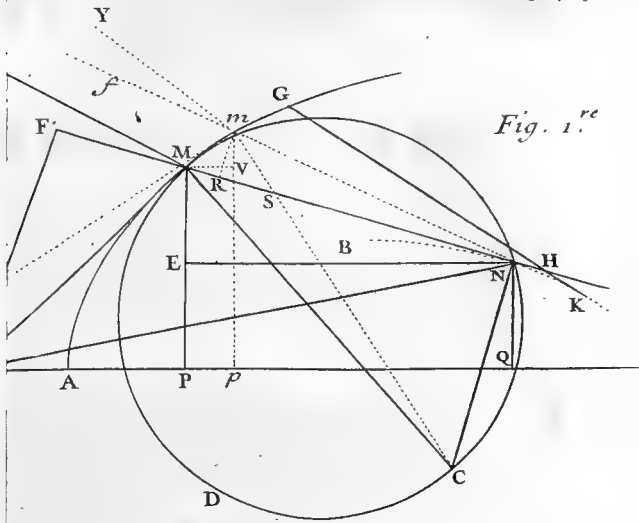
Faites avec le Verre ardent du Palais Royal.

PAR M. GEOFFROY.

2. Mai
1709.

Comme Monseigneur le Duc d'Orleans , par le zele
qu'il a pour le progrez des Sciences, veut bien per-
mettre à ceux de cette Academie qui ont quelques ex-
périences à faire au feu du Soleil , de se servir de son
verre ardent , j'ai profité de cet avantage pour examiner
les différens changemens qui arrivent aux Métaux expo-
sez au foyer de ce verre, dont l'ardeur & l'efficace sur-
passent de beaucoup la force de nos feux ordinaires.

Lorsque j'avançai dans mon Mémoire du 21 Mai 1707,
que tous les Métaux ou leurs cendres exposées à un feu
violent tel que le feu du Soleil, se réduisoient en verre ,
je ne parlai point des différentes manieres dont les Mé-
taux se vitrifioient, & des autres circonstances qui ac-
compagnoient cette vitrification , parce que je n'avois pas
encore examiné pour lors ces choses avec toute l'atten-
tion qu'elles méritoient ; mais aiant eu occasion de le faire
depuis , j'entrerais aujourd'hui dans le détail de ces expé-
riences , & je rapporterai ce que j'ai observé sur les quatre
métaux imparfaits, le Fer , le Cuivre, l'Etain & le Plomb,
exposés au foyer du verre ardent. Je ne parlerai point
encore ici ni de l'Or ni de l'Argent, parce que, comme
leur analise m'a paru beaucoup plus difficile que celle
des autres métaux , je me suis réservé d'y travailler lors-



que j'aurai approfondi autant qu'il me sera possible , la nature & la composition des autres.

Dans les experiences que j'ai voulu faire au foyer du verre ardent , une des choses qui m'a le plus arrêté , ç'a été la difficulté de trouver des matieres pour y tenir les métaux en fonte.

Le charbon , dont on se sert ordinairement , est à la verité une matiere très commode ; mais il m'étoit impossible d'y vitrifier aucun des métaux. Les portions de métal qu'on tient long-tems en fonte au foyer du verre , se dissipent en fumée , ou sautent par petites parcelles , & tant qu'il y reste quelque chose , ce peu qui reste est toujours du métal jusqu'à ce qu'il soit entierement dissipé.

J'en découvris bientôt la raison que j'ai rapportée dans les Memoires de 1707. Le charbon est une matiere toute penetrée des parties huileuses ou sulphureuses (comme on voudra les appeller). Le premier effet du feu sur le métal , c'est d'en enlever les parties huileuses. Or , si à mesure que cette huile est enlevée de la substance du métal , celle qui le soutient lui en refournit de nouvelle , il restera toujours le même qu'il étoit auparavant ; il n'y aura que la grande violence du feu qui l'enlèvera peu à peu en parcelles très petites.

Je cherchai donc une autre matiere , qu'on ne pût point soupçonner de contenir de parties huileuses. M. Tshirnhaus , à qui on est redevable de la fabrique de ces grands verres & des premieres experiences qu'on y a faites , dit y avoir vitrifié les métaux en se servant de la porcelaine pour support. En effet elle réussit assez bien , pourvû qu'on en ait des morceaux fort épais , & dont on ait emporté le vernis : mais la difficulté qu'il y avoit de trouver une assez grande quantité de pieces de porcelaines épaisses & commodes pour faire toutes mes expériences , m'obligea d'avoir recours à des matieres plus communes & encore plus difficiles à fondre s'il étoit possible.

Entre les différentes matieres que j'ai essayées , celles

qui m'ont paru les meilleures sont les coupelles ordinaires & les tesson de grez. Les coupelles soutiennent assez long-tems les métaux en fusion au foyer du verre à la réserve du plomb qui les pénètre assez promptement sitôt qu'il se vitrifie, & qui leur sert ensuite de fondant. Les tesson de grez soutiennent le feu du foyer plus long-tems qu'aucune autre matiere sans se fondre; mais il faut une grande précaution pour les échauffer jusqu'à les faire rougir sans qu'ils s'éclatent, & lorsqu'ils sont échauffez le moindre vent froid les fait fendre. C'est cependant la matiere dont je me suis servi avec le plus de succès pour tenir long-tems les métaux en fonte, en prenant d'ailleurs toutes les précautions possibles pour éviter les inconvéniens que je viens de rapporter.

Une autre chose encore qui m'a empêché de pousser mes recherches sur les Métaux aussi loin que je l'aurois souhaité, ç'a été le peu de Soleil favorable que j'ai eu depuis deux ans; car la plûpart de ces experiences demandent un Soleil net, fort & constant, sous lequel on puisse tenir long-tems les matieres dans une fonte parfaite: & à peine ai-je eu pendant l'Eté dernier trois ou quatre jours tels que je les souhaitois, le Ciel s'étant presque toujours trouvé coupé de nuages vers l'heure de midy, qui est le seul tems de la journée propre pour ce travail.

Je viens maintenant au détail des experiences que j'ai faites, & je commence par le Fer.

D U F E R.

J'ai exposé au foyer du verre ardent un morceau de Fer forgé pesant environ un gros; il a rougi, sa superficie s'est couverte d'une matiere noire comme une espece de poix ou de bitume liquide. Si on retire le Fer en cet état, cette matiere se fige sur la surface du métal, & y forme une petite pellicule ou écaille noirâtre très mince, qui s'enleve quelquefois fort aisément en frappant dessus,

& la place du Fer que cette écaille couvroit , paroît plus blanche que le Fer n'est ordinairement. Cette écaille est une portion de la partie huileuse du Fer , (comme M. Homberg l'a déjà remarqué ,) qui poussée à la superficie du métal prêt à se fondre , y séjourne quelque tems avant que de s'exhaler. C'est apparemment cette partie huileuse qui s'élève sur le Fer & sur l'Acier poli qu'on fait échauffer , & qui leur donne toutes les couleurs depuis le jaune jusqu'au violet ou couleur d'eau , & jusqu'au noir.

Si on continuë à tenir sur le charbon ce morceau de Fer , il s'y fond entierement , & il commence en même tems à jeter des étincelles fort vives , en très grande quantité , & qui s'écartent quelquefois de plus d'un pied autour du charbon.

Quand on ramasse ce qui tombe pendant ce petillement en exposant sous le charbon des feuilles de papier , on trouve que ce sont autant de globules de fer très petits & creux pour la plupart.

Tout le Fer qu'on tient en fonte sur le charbon , se dissipe en petillant de cette maniere sans qu'il en reste rien : quelquefois cependant ce métal cesse de petiller , lorsque le charbon s'étant en partie consumé , il s'est couvert d'un lit de cendres sur lequel se trouve posé le Fer fondu ; car comme le petillement du Fer ne me paroît venir que de l'action des parties huileuses du charbon sur celles de ce métal , les cendres empêchant cette huile de passer du charbon dans le Fer , il doit rester tranquillement en fusion ; mais si par quelque secousse ou autrement , les cendres se dérangent en sorte que le Fer vienne à toucher immédiatement le charbon , il commencera à petiller de nouveau. Quelquefois même la chaleur qui tient en fonte le métal , fond aussi les cendres en verre ; alors ce verre se confond avec le métal , & il se fait un bouillonnement très considérable. Si on retire dans cet instant le métal du foyer , il paroîtra à demi vitrifié ou réduit en une masse noirâtre & friable. D'au-

tres fois ce verre des cendres nage sur le métal & s'y ramasse en gouttes tantôt claires & transparentes & tantôt obscures, selon qu'il est plus ou moins mêlé de métal.

Bien plus, si après avoir laissé refroidir sur le charbon du Fer fondu, on l'expose de nouveau sur le grez au foyer du verre, il y petille très vivement & se dissipe tout en étincelles, ce que ne fait point le Fer ordinaire qui n'a point passé sur le charbon. Ce petillement peut venir de la prompte rarefaction de l'huile du charbon, dont tous les pores du Fer se sont chargez abondamment : peut-être aussi est-ce l'effet de l'action des sels du Fer sur l'huile de charbon.

J'ai exposé au foyer sur le grez du Fer & de l'Acier, ils y ont rougi, ils s'y sont fondus sans petiller ni jeter d'étincelles ; ils ont fumé assez considérablement, & le métal fondu est devenu peu à peu comme de l'huile. Après avoir retiré du foyer ces matieres fonduës, elles se sont figées en une masse réguline, friable, & qui paroïssoit quelquefois légèrement striée ou disposée en aiguilles.

Quoique cette matiere ne paroisse point du tout transparente, on peut cependant la regarder comme un commencement de vitrification ou un état moïen entre le métal & le verre ; elle pourroit se vitrifier à la fin comme les autres métaux, si on pouvoit la tenir assez long-tems exposée au foyer sans fondre ses supports ni se mêler avec eux, mais en continuant de tenir cette matiere au foyer, la grande chaleur du Soleil qui est nécessaire pour la tenir dans une parfaite fusion, fond bientôt aussi le grez ou la coupelle qui la soutiennent, & il résulte de ce mélange une espece d'émail brun ou grisâtre.

On peut donc regarder cette masse reguline comme un fer à demi vitrifié, parce qu'il a été dépouillé de la plus grande partie de son huile. Si on rend à cette masse une huile semblable à celle dont on vient de la dépouiller, de friable qu'elle étoit elle deviendra fort dure & malleable, & d'obscur qu'elle paroïssoit auparavant, elle

prendra l'éclat du métal. C'est ce que j'ai fait en reportant cette matiere sur le charbon au foyer. Elle s'y est fonduë, elle y est restée même assez long-tems en fonte sans petiller, mais à la fin elle a étincellé avec la même vivacité que le Fer même; & retirée du foyer, elle ne m'a point paru différente du Fer fondu, à la réserve qu'elle est plus blanche & plus compacte.

J'ai tenté les mêmes expériences sur différentes matieres qui proviennent du Fer, comme sur la rouille ou poussiere rouge qui se trouve autour des barreaux qui ont souffert long-tems le feu, sur la rouille du fer exposée à la pluie, sur le safran de Mars préparé avec le soufre, & sur le *Caput mortuum* du vitriol vert, calcinez long-tems & à grand feu: toutes ces matieres, qui ne sont que du Fer plus ou moins dépouillé de sa partie huileuse, exposées au foyer sur le grez, s'y sont fonduës parfaitement, en sorte qu'elles paroissent liquides comme de l'huile, sans petiller ni jetter d'étincelles; & les ayant retirées du foyer, elle se sont figées en une masse réguline de la même maniere que le Fer. Lorsqu'au contraire j'ai présenté au foyer sur le charbon ces mêmes matieres ou les regulés qui en provenoient, elles s'y sont fonduës, & elles y ont resté tranquillement en fonte pendant quelque tems sans petiller; mais par la suite elles ont petillé & jeté des étincelles aussi vives que le Fer même, & la masse fonduë & refroidie hors du foyer, a paru un véritable Fer fondu. Il est à présumer que ces matieres ont repuisé dans le charbon l'huile qui leur avoit été enlevée en les réduisant en chaux ou safran.

J'ai fait encore les mêmes expériences sur le machefer qui est du Fer vitrifié avec la cendre du charbon de terre. Pour cela je l'ai fait mettre en poudre fort fine & laver plusieurs fois, en sorte qu'il fût dépouillé de la plus grande partie du charbon, des cendres de la terre qui y étoient mêlées, & qu'il ne restât que la partie la plus pesante ou qui est chargée d'une plus grande quantité de métal. J'ai exposé cette matiere au foyer sur le grez, elle

s'y est fonduë fort promptement en se boursoflant beaucoup dans le commencement , & elle s'est figée en se refroidissant en un émail noir fort dur dont la superficie paroïsoit un peu rougeâtre ou cuivrée. Si on continuë de tenir cet émail au foyer , il sert de fondant au grez & le perce.

J'ai fait fondre du machefer au foyer sur le charbon , il s'y est fondu de même que sur le grez , & il y est resté long-tems en fonte sans petiller. Enfin après l'y avoir laissé très-long-tems , il a commencé à jeter des étincelles ; & si dans ce tems-là on retire cette matiere du foyer , on trouve dans le morceau d'émail quelques parcelles de métal blanc & luisant que je crois être du Fer ressuscité.

Il paroît par ces expériences , que le Fer contient un soufre ou une substance huileuse qui le rend brillant , malleable & facile à fondre.

Que cette huile est enlevée par le feu du Soleil , lorsqu'on y tient ce métal en fonte pendant quelque tems.

Que cette même huile est enlevée par la flâme du feu ordinaire , qui n'étant pas assez forte pour fondre le Fer , l'est du moins assez pour le réduire en une chaux ou espece de rouille.

Que le Fer dépouillé de cette partie huileuse se fond en une masse réguline , cassante & friable qui approche assez de l'antimoine pour la couleur , qu'on peut regarder comme une matiere à demi vitrifiée ; & il est à présumer que si on pouvoit tenir assez long-tems une suffisante quantité de cette matiere seule au foyer sans qu'elle fondît ses supports ni qu'elle se mêlât avec eux , elle se vitrifieroit parfaitement.

Que ce verre ou régule métallique n'a besoin que d'un peu d'huile pour reparoître sous la forme de métal.

Qu'il ne reprend sa forme métallique sur le charbon , que parce qu'il y puise cette substance.

Et qu'enfin cette partie huileuse renfermée dans le charbon , est peu différente de celle du Fer. On pourroit croire

croire néanmoins qu'elle en diffère en quelque chose , puisque le Fer fondu qui en est pénétré pétille & étincelle beaucoup.

Comme le Fer est le seul métal dans lequel j'ai observé ce pétilllement, cela suppose une propriété particulière au Fer que n'ont point les autres métaux. Ne pourroit-on point l'attribuer au sel vitriolique qui y est en très grande abondance , & qui est très avide des souffres.

C'est aussi à cette même avidité avec laquelle le sel vitriolique du Fer absorbe la partie huileuse du charbon, qu'on pourroit attribuer la promptitude avec laquelle le Fer consomme le charbon ; car il n'y a aucun autre métal qui use si vite le charbon au foyer du verre.

Une autre observation que j'ai faite sur le Fer , c'est qu'il est le seul des quatre métaux imparfaits , sur lequel il s'élève des gouttes de verre en le tenant en fonte sur le charbon , dont je n'ai encore pu découvrir la raison.

DU CUIVRE.

Le Cuivre exposé au foyer du verre ardent commence par blanchir à la surface, il noircit ensuite en se couvrant d'une manière de peau ou d'écaille noire , ridée ou plissée , & enfin il se fond tout-à-fait.

J'ai retiré ce métal aussi-tôt que la couleur blanche a paru ; & après l'avoir laissé refroidir , je n'ai rien trouvé d'extraordinaire à la superficie qui avoit repris à peu près la même couleur qu'elle avoit auparavant.

Je ne découvre pas d'où peut provenir cette couleur blanche. Doit-on l'attribuer à quelque sel volatil arsenical contenu dans le Cuivre , que la forte chaleur chasse à la surface de ce métal ? Ou bien seroit-ce simplement l'effet du changement qui arrive dans les parties grossières de la superficie du métal qui commence à se fondre ?

La couleur noire que le cuivre prend ensuite , paroît être l'effet d'une matière huileuse qui se fond la première

170 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dans ce métal comme dans le Fer , & qui est élevée jusqu'à sa superficie par la forte chaleur.

J'ai continué à tenir du Cuivre rouge au foyer sur le charbon , il s'y est fondu , il y a jetté un peu de fumée fort legere , & il a diminué peu à peu jusqu'à se dissiper entierement.

J'ai mis du Cuivre rouge dans une coupelle au foyer du verre ; le métal s'est fondu , il a jetté quelques fumées legeres ; & après avoir été quelque tems en fonte , il est devenu liquide comme de l'huile. J'ai retiré cette matiere fondue , & en se refroidissant elle s'est figée en une masse réguline d'un rouge brun. Cette matiere est cassante & ne s'étend plus sous le marteau. Si on l'écrase , elle se met en poudre rouge comme le cinabre d'antimoine. Si on observe avec un microscope cette poussiere , on verra que ce sont autant de petits grains rouge transparans comme des petits rubis ; ensorte qu'on jugera aisément que ce régule est un verre rouge très foncé.

J'ai voulu étendre ce verre de cuivre en le mêlant avec du verre blanc ; pour cet effet j'ai pulvérisé de ce verre de cuivre & du verre blanc ; & les ayant mêlez , je les ai fondus ensemble ; mais le mélange a pris d'abord à la fonte une belle couleur verte , & en continuant de le tenir au foyer , il a tiré sur le bleu. Je croi qu'on peut attribuer ce changement de couleur à l'action des sels alcalis du verre sur les parties du Cuivre ; car ces sels ont coûtume de tirer des teintures vertes ou bleuës de ce métal.

Pour conserver donc au Cuivre vitrifié sa couleur rouge en le joignant au verre ordinaire , je me suis servi d'un autre moien. J'ai fait fondre au foyer un morceau de Cuivre dans une coupelle , & dans le tems qu'il commençoit à se vitrifier , j'y ai jetté du verre blanc ; dès que le verre a été fondu , j'ai retiré les matieres avant qu'elles aient pû se confondre : quand le tout a été refroidi , j'ai séparé du verre la portion réguline le mieux qu'il m'a été possible , & j'ai retiré des parcelles de ce verre chargées /

de quelques parties de ce régule fort minces , rouges & transparentes,

Ce Cuivre vitrifié n'est donc autre chose que le Cuivre dépouillé par le feu du Soleil de la partie huileuse qui lui donnoit la forme de métal. Une preuve que cette forme métallique ne vient que de cette partie huileuse , c'est que si on expose ce régule ou verre de Cuivre au foyer sur le charbon , il y reprend en peu de tems la couleur & la consistance du Cuivre fondu, & le laissant refroidir, il se fige en un bon Cuivre rouge malleable, aussi beau & aussi doux qu'il étoit avant que d'avoir été vitrifié.

Les écailles de Cuivre, la chaux de Cuivre ou *Æsustum*, exposez quelque tems en fonte sur la coupelle ou sur le grez , se réduisent de même que le Cuivre en un régule ou verre rouge. Si on les expose sur le charbon au lieu du grez ou de la coupelle, ils se fondent en Cuivre. Si on fond sur le charbon les régules qu'ils auront donnez sur la coupelle ou sur le grez , ils retourneront aussi en Cuivre.

Il s'ensuit de ces expériences , que le Cuivre a pour bāse une matiere rouge friable susceptible de vitrification.

Que cette matiere reçoit la forme métallique d'une substance huileuse, qui ne paroît point différente de l'huile des vegetaux & des animaux.

Qu'on peut priver le Cuivre de cette huile , en le tenant long-tems au feu du soleil , ou en le calcinant au feu de flāme.

Et que le charbon rend au Cuivre cette partie huileuse , & lui rend en même tems sa forme métallique.

Il paroît de plus que l'huile du charbon ne fait pas d'effet considérable sur le Cuivre comme elle en fait sur le Fer.

Le Cuivre exposé long-tems au foyer sur le grez ou sur la coupelle fume beaucoup , & diminuë de poids très considérablement. Je ne pense pas que cette fumée soit seulement la partie huileuse du métal dont l'évaporation

n'est peut-être pas sensible ; mais je crois qu'avec cette huile il se mêle beaucoup de la partie terreuse vitrifiable du métal que le feu du Soleil subtilise & élève en fleurs.

DE L'ETAIN.

L'Etain fin exposé sur le charbon au foyer du verre ardent, se fond, jette une grosse fumée blanche fort épaisse & se dissipe tout en fumée.

Si au contraire on fait fondre l'Etain fin sur la coupelle au foyer du verre, il fume beaucoup, sa surface se couvre d'une chaux blanche qui se rarefie extraordinairement, & il se forme peu à peu dans cette chaux une houppe ou un amas d'aiguilles cristallines transparentes herissées d'une infinité de petites pointes.

Si on continuë à tenir cette masse sur le grez exposée au foyer, ces cristaux cessent enfin de fumer, & ils restent fixes pendant que le grez se fond & se vitrifie. Il n'en est pas de même quand on se sert de la coupelle ; car en fondant elle fond à la fin une portion de ces cristaux en un verre ou émail blanc ou rousâtre.

J'ai pris de la chaux d'Etain qui est de l'Etain réduit en une poudre grise par le moïen du feu qui en a enlevé dans la calcination une grande partie de la substance huileuse. J'ai exposé cette chaux sur la coupelle au foyer du verre, elle y a encore beaucoup fumé, & elle s'est réduite en aiguilles cristallines, herissées d'autres pointes.

En reportant au foyer sur le charbon ces aiguilles cristallines, elles s'y sont fonduës assez aisément, & elles ont repris la forme d'Etain. Le charbon a refourni aux cristaux d'Etain la partie huileuse que le feu en avoit enlevé. Tout le monde sçait d'ailleurs que si on jette quelque graisse ou matiere inflammable sur de la chaux d'Etain rougie dans le creuset, elle reprend aussi-tôt sa forme d'Etain.

Ces expériences prouvent que l'Etain fin contient une huile très aisée à être enlevée, puisque le feu ordinaire

l'enleve avec tant de facilité, & puisque ce métal calciné ou dépouillé de son huile, se recharge si aisément de la partie huileuse de quelque matiere inflammable que ce soit.

Elles prouvent encore que la terre métallique, qui fait la bâte de l'Etain, est une terre cristalline très difficile à fondre, puisque le feu ordinaire ne peut point vitrifier ce métal seul, & que le feu du Soleil tel que nous l'avons au foyer du grand verre ardent du Palais Roial ne peut fondre parfaitement la chaux dans laquelle ce métal se réduit. Il est à présumer que la cristallisation, qui se fait de cette terre en aiguilles, arrive parce que la force du Soleil ne peut qu'amolir ces petits cristaux, & les souder, pour ainsi dire, les uns aux autres à mesure que la partie huileuse les abandonne, au lieu de les fondre tout à fait en une seule masse.

D U P L O M B.

J'ai pris du Plomb que j'ai tenu en fonte sur le charbon au foyer du verre, il s'y est entierement dissipé en jettant beaucoup de fumée.

J'ai exposé une pareille quantité de Plomb sur le grez au même foyer, il a jetté beaucoup de fumée, il s'est peu à peu changé en une liqueur fluide comme de l'huile ou semblable à de la resine fonduë. Cette liqueur en se refroidissant s'est figée en une espece de verre qui a ceci de particulier qu'il est disposé par lames transparentes comme le Talc de Venise, & qu'il est mollaſſe, doux au toucher, & d'une couleur jaune verdâtre & rougeâtre en quelqu'autres endroits.

En continuant à tenir cette matiere au foyer du verre elle s'étend dessus le grez comme un vernix, elle le pénètre à la fin & lui aide à se fondre.

J'ai tenté la même experience sur la cendre du Plomb, qui est du Plomb calciné legerement en une poudre grise, sur le *Minium* qui est du Plomb poussé à un degré de

calcination plus fort, & sur la litarge qui est le Plomb poussé jusqu'à la vitrification; toutes ces matieres se sont fonduës très promptement en une liqueur très fluide, & ont donné en se refroidissant un verre talqueux ou disposé par petites lames semblable au premier.

J'ai présenté au foyer sur le charbon ce verre talqueux, il s'y est fondu, & peu de tems après il y a repris la forme de Plomb fondu; je l'ai retiré du foyer, & l'ayant laissé refroidir, je ne l'ai point trouvé différent du Plomb.

Si on fond immédiatement sur le charbon la chaux de Plomb, le *Minium* & la Litarge, on les convertit aussitôt en plomb.

Ces experiences nous font connoître, qu'il y a dans le Plomb de même que dans les autres métaux imparfaits une partie huileuse qui s'en sépare aisément par le feu ordinaire ou par le feu du Soleil; & que ce métal a pour bête une substance foliée ou talqueuse.

D U I V F - A R G E N T .

J'ajouterais ici quelques experiences que j'ai faites sur le Vif-argent, quoique je n'en puisse encore rien conclure de positif, ne les ayant pas poussées aussi loin qu'il le faudroit pour cela.

J'ai présenté du Vif-argent au foyer du verre ardent sur le charbon, sur la coupelle & sur le grez; il s'est bientôt dissipé entierement; il s'est exhalé en une fumée très épaisse.

J'ai exposé au foyer sur le grez du Mercure précipité par lui-même au feu de digestion, il sembloit se fondre; mais aussitôt il se dissipoit en fumée. Il est seulement resté sur le grez en très petite quantité une poussiere fort rarefiée en maniere de Mousse, puis en continuant de la tenir au foyer, elle s'est fonduë & ramassée en un verre jaunâtre dans lequel on distinguoit quelques parcelles de métal comme de l'argent.

J'ai exposé sur le charbon du Mercure précipité par

lui-même. Cette matiere fumoit beaucoup, & à mesure qu'elle se fondoit on la voïoit se réunir & former sur le charbon même de petites boules de Mercure qui se dissipoient aussi bientôt après en fumée.

Ces experiences semblent prouver qu'il y a dans le Vif-argent une huile qu'on peut en séparer par un feu même fort doux, tel que le feu de digestion.

Que si-tôt que cette huile en est ôtée, il perd sa fluidité & son brillant.

Que la bâte du Mercure est une chaux ou terre rouge.

Que cette chaux ne se fond point en verre comme les chaux des autres métaux, parce qu'elle est trop volatile, & que si-tôt qu'elle se fond elle est emportée par le feu.

Que si on rend à cette chaux cette huile, en l'exposant sur le charbon au foyer du verre, elle reprend aussi-tôt son brillant métallique, sa fluidité, & devient Vif-argent.

Je ne puis pas dire si cette terre legere qui reste après l'évaporation de la chaux mercurielle sur le grez, seroit une portion de la terre du Mercure plus exactement dépouillée de son huile, & par conséquent plus fixe & plus propre à se vitrifier, ou bien si ce seroit quelque matiere étrangere au Mercure qui seroit fixe d'elle-même, & qui resteroit après son évaporation. C'est un fait à examiner plus particulièrement dans la suite.

IL RE'SULTE de toutes les Experiences que je viens de rapporter, que les métaux qu'on nomme imparfaits, sçavoir, le Fer, le Cuivre, l'Etain, & le Plomb sont composez d'un soufre ou d'une substance huileuse & d'une matiere capable de se vitrifier.

Que c'est de ce soufre ou de cette huile que vient l'opacité, le brillant & la malleabilité du métal.

Que ce soufre métallique ne paroît point du tout différent de l'huile des vegetaux ou des animaux.

Qu'il est le même dans les quatre métaux imparfaits & même dans le Mercure.

Que ces quatre métaux ont pour b  se une matiere susceptible de vitrification.

Que cette matiere est differente dans chacun de ces quatre métaux, puisqu'elle se vitrifie differemment :

Et que c'est de cette difference que dépend la difference des métaux.

Il reste à examiner plus particulierement la nature de ces matieres ou especes de verres métalliques, pour sçavoir si l'on en peut séparer d'autres principes ou substances. C'est ce que je tâcherai de faire dans la suite , en poussant l'analyse de ces quatre métaux aussi loin qu'il me sera possible.

OBSERVATIONS

DE LA PESANTEUR DE L'ATMOSPHERE

Faites au Château de Meudon avec le Barometre double de M. Hagens.

PAR M. DE LA HIRE.

1709.
5. Juin.

Monsieur l'Abbé de Louvois aiant eu la curiosité de voir les pratiques du nivellement, & comment on en concluoit la pesanteur de l'Atmosphere avec les observations du Barometre , je fis en sa présence avec toute l'exactitude possible celles qui sont rapportées ici. Nous nous serv  mes d'un fort bon Niveau à lunette & du Barometre double de M. Hagens , qui étoit pour lors dans les appartemens du Château , & qui avoit été construit avec un très grand soin.

Un matin au rez de chauffée du Château la liqueur étoit dans le tuyau du Barometre à 33 parties $\frac{1}{2}$. Ensuite on descendit à la grille de fer de l'avenue du côté du grand chemin qui va à Versailles, & l'on trouva que la liqueur étoit descendue dans le tuyau à 28 parties $\frac{1}{2}$, & l'on étoit descendu

descendu de 159 piés 3 pouces depuis la premiere station, & la liqueur étoit descenduë de 5 parties.

Ensuite on continua à descendre dans le grand chemin du côté de Paris jusqu'au commencement d'un petit sentier qui va à la riviere, & la liqueur étoit dans le tuyau à 24 parties $\frac{1}{2}$, & l'on étoit encore descendu de 106 piés 3 pouces, & la liqueur étoit descenduë depuis la station précédente de 4 parties.

Depuis cette station jusqu'à la riviere devant les Moulineaux, on descendit 134 piés 3 pouces, & la liqueur étoit dans son tuyau à 21 parties, la liqueur étoit donc encore descenduë de 3 parties $\frac{1}{2}$.

L'après midy on porta le Barometre sur l'appuy du reservoir des moulins qui sont dans le haut du Parc, & l'on y trouva la liqueur dans le tuyau à 38 parties $\frac{1}{2}$. Les nivellemens firent voir qu'on étoit monté depuis le rez de chaussée du Château jusqu'à l'appuy de ce reservoir, de 112 piés 4 pouces.

Mais étant revenus le soir au rez de chaussée du Château, j'y trouvai la liqueur dans le tuyau à 36. parties, donc pour ces 112 piés 4 pouces la liqueur avoit changé de 2 parties $\frac{1}{2}$. Mais comme le matin elle avoit été dans le même endroit à 33 parties $\frac{1}{2}$, on connut que depuis le matin jusqu'au soir il étoit arrivé un changement de 2 parties $\frac{1}{4}$ dans la pesanteur de l'atmosphere.

Toute la hauteur depuis la riviere jusqu'au haut du reservoir des moulins, fut nivelée fort exactement par stations, & elle fut trouvée comme il résulte des observations précédentes, de 512 piés 1 pouce, ou de 85 toises 2 piés 1 pouce; & c'est la plus grande hauteur que nous ayons aux environs de Paris.

J'observai vers le soir au rez de chaussée du Château, que dans le Barometre dont je me servois, la différence entre la superficie du mercure dans les deux boîtes, étoit de 29 pouces justement, & la liqueur du tuyau étoit au dessus du mercure de la boîte d'embas de 12 pouces 6 lignes. Les parties de la division du tuyau pour mesurer la

hauteur de la liqueur, valaient 4 lignes & $\frac{1}{2}$, que je pose pour 4 lignes $\frac{1}{2}$ à cause du peu de difference & pour la facilité du calcul.

Maintenant pour tirer de ces observations une connoissance exacte de la pesanteur de l'atmosphère, il faut les réduire suivant la construction de ce Barometre, comme nous les avons expliquées dans le Mémoire sur les Barometres. Mais premierement pour comparer les hauteurs de la liqueur au bord de la riviere & au haut du reservoir des moulins, il faut en réduire les observations à la même heure à cause du changement qui étoit arrivé à la pesanteur de l'atmosphère du matin au soir ; & comme l'observation au bord de la riviere fut faite vers le midy, je la réduirai à celle du soir faite au reservoir des moulins où la liqueur étoit à 38 parties $\frac{1}{2}$, en supposant que l'atmosphère a diminué uniformement du matin au soir : c'est-pourquoy au lieu des 21 parties trouvées au bord de la riviere à midy, j'en poserai 22 $\frac{1}{4}$ en ajoutant la moitié de la difference du matin au soir, & ôtant ces 22 parties $\frac{1}{4}$ des 38 $\frac{1}{2}$, il restera 16 parties $\frac{1}{4}$ pour le changement de la hauteur de la liqueur dans une élévation de 512 piés dans l'état où l'air étoit vers le soir de ce même jour.

Pour ce qui est de la réduction des parties du tuyau à la véritable hauteur du mercure qui répond à la pesanteur de l'atmosphère, elle sera facile par les regles que j'ay données & par l'observation que j'avois faite le soir de 29 pouces de difference entre les hauteurs du mercure, dans les boîtes, la liqueur étant alors à 12 pouces 6 lignes ou à 150 lignes au-dessus du mercure de la boîte inférieure. Car si l'on suppose comme je l'ai trouvé, que le mercure soit en pesanteur à la liqueur du tuyau comme 12 à 1, ayant divisé 150 lignes par 12, il viendra 12 lignes $\frac{1}{2}$ pour une hauteur de mercure équipollente aux 150 lignes de la liqueur ; il faudra donc ôter 12 lignes $\frac{1}{2}$ des 29 pouces observez entre les hauteurs du mercure dans ses boîtes, & il restera 27 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur de mercure qui pèseront autant que l'atmosphère au jour

de l'observation vers le soir à la hauteur du rez de chauffée du Château de Meudon qui est de 66 toises & près de 4 piés plus haut que la riviere de Seine devant les Moulineaux au mois de Septembre, qui est le tems où elle est ordinairement fort basse.

Il reste donc encore à connoître la valeur des parties du tuyau de la liqueur, par rapport aux hauteurs de mercure qui representent la pesanteur des parties correspondantes de l'atmosphere. Dans ces Barometres qui sont construits sur les proportions données par M. Hugens où le diametre des boëtes est de 14 lignes & celui du tuyau d'une ligne, on aura par la regle que j'ay trouvée dans mon autre Memoire, comme 12 fois le quarré du diametre des boëtes est au quarré de ce même diametre plus 23 fois le quarré du tuyau de la liqueur, ainsi les parties du tuyau ou les hauteurs de la liqueur, aux hauteurs du mercure qu'elles representent, ce qui est icy comme 2352 à 219: Ainsi les 16 parties $\frac{1}{4}$ que nous avons trouvées entre le plus haut & le plus bas, lesquelles suivant leur grandeur valent 73 lignes à très-peu près, à 6 lignes $\frac{3}{4}$ environ pour la vraie hauteur du mercure qui répond au changement de la pesanteur de l'atmosphere depuis le bord de la riviere jusqu'au haut du reservoir des moulins du Parc: C'est-pourquoy si l'on divise 512 piés qui est cette même hauteur par $6\frac{3}{4}$, on aura 75 piés & $\frac{23}{27}$, ou bien 12 toises & près de 4 piés de la hauteur de l'atmosphere pour une ligne de mercure dans le tems où la pesanteur de toute cette atmosphere étoit de 27 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$ à la hauteur du rez de chauffée du Château de Meudon, & au-dessus de la riviere quand elle est basse devant les Moulineaux au pié de la Montagne, à 66 toises & près de 4 piés. On n'a pas d'égard aux differentes pesanteurs de l'atmosphere suivant les differens endroits de cette hauteur, ny aux differentes elevations des liqueurs qui auroient pû être causées par la chaleur differente en differens tems de la journée, qui dilate plus ou moins les liqueurs & même le mercure, car elle étoit à

180 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
peu près la même au commencement & à la fin de ces observations.

Mais comme dans la construction de ces Barometres on auroit pû s'être un peu écarté du raport que j'ai posé entre le diametre des boëtes & du tuyau de la liqueur, j'ay fait encore le calcul pour voir ce qui arriveroit dans d'autres rapports, & j'ay trouvé que la difference n'étoit pas considerable lorsque les diametres des boëtes sont seulement plus grands ou plus petits d'une ou de deux lignes.

Quoyqu'on ne puisse pas douter que pour connoître la pesanteur de l'atmosphere, on operera bien plus justement sur des hauteurs considerables que sur de petites, lorsque d'ailleurs on connoît très-exactement ces hauteurs, à cause de la difficulté qu'il y a de mesurer bien justement les elevations du mercure dans les tuyaux, j'ay crû néanmoins que je ne devois pas négliger d'en faire quelques-unes pour voir comment elles s'accorderoient avec celles de Meudon.

J'ay donc observé plusieurs fois en différentes années & en différentes saisons l'élevation du mercure dans le Barometre simple sur le haut de la terrasse de l'Observatoire & au fond des caves ou carrieres, & en prenant un milieu entre routes, lequel convient à l'une de ces observations que j'avois faite en 1705 au mois de Septembre, qui est le tems où l'air est à peu près au même degré de chaleur au fond des caves & au dehors, & le mercure du Barometre étant à 28 pouces dans la grande sale, c'est-à-dire que l'atmosphere étoit fort pesante, comme elle étoit au tems des observations de Meudon, & la saison étant aussi la même, j'ay trouvé pour 28 toises de hauteur ou 168 piés un changement d'élevation du mercure de 2 lignes $\frac{1}{4}$; c'est pourquoy pour une ligne de mercure on aura 74 piés $\frac{2}{3}$ ou 12 toises 2 piés $\frac{2}{3}$; & par les observations faites à Meudon, j'avois trouvé 12 toises 4 piés à peu près, dont la difference de 1 pié $\frac{1}{3}$ n'est pas considerable dans ces sortes d'observations.

L'observation que je fis en 1682 à Toulon sur le mont Clairet qui est élevé sur le niveau de la mer de 257 toises, comme elle est rapportée dans le Livre des Voyages de l'Academie, donna dans ce tems-là & dans les circonstances de l'air qui y sont marquées, en supposant l'air également condensé dans toute cette hauteur, 12 toises à très-peu près pour une ligne de hauteur de mercure.

Mais comme il est certain que la chaleur ou le froid peut faire quelques changemens dans les Barometres, sans que l'atmosphere change pour cela de pesanteur, comme je l'ai démontré au commencement de mon précédent Memoire, à cause que quelqu'espace d'air proche de la terre étant plus ou moins échauffé, fera changer de volume tant au mercure qu'aux liqueurs; & de plus un air plus humide étant échauffé, fera un plus grand effort par sa dilatation que s'il étoit moins humide, & soutiendra le mercure à une hauteur beaucoup plus grande que celle où il seroit par la seule pesanteur de toute l'atmosphere, & par les autres causes; c'est pourquoy j'ai fait plusieurs observations & quelques experiences pour tâcher d'avoir quelques connoissances de tous ces effets.

J'ay placé dans une chambre un Baromettre simple à côté d'un Baromettre double à la maniere de M. Hugen, & j'ay mis tout proche un Thermomettre qui avoit été fait par M. Amontons, & pendant trois années j'ay observé exactement tous les jours, les hauteurs de ces Barometres & du Thermomettre, & je n'ay rien négligé des circonstances qui pouvoient me donner quelque connoissance de ce que je cherchois. Mais comme dans tout ce tems il n'a point fait de froid considerable, mais seulement de très-grandes chaleurs en Eté, j'ay comparé l'état de ces Barometres dans le grand chaud, à celui où ils étoient dans l'état moyen de chaleur de l'air, comme il est au fond des carrieres de l'Observatoire, ou tout au plus quand il a commencé à geler. J'ay observé que dans le Baromettre simple le mercure ne change pas sensiblement de hauteur, soit qu'il soit exposé au grand Soleil

182 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
même en Eté , ou à l'ombre dans un lieu médiocrement
frais.

Dans les observations suivantes je marque la hauteur
du mercure dans le Barometre simple par pouces , lignes
& points qui sont des sixièmes parties de lignes & pour
les hauteurs de la liqueur dans le Barometre double , je
les marque par les divisions qui sont sur ce Barometre les-
quelles valent chacune 4 lignes , & je les réduis ensuite
en lignes.

	Le Barometre simple marquant.	27 ^{po.} 6 ^{l.} 4 ^{poi.}
I ^{o.}	Le Barometre double marquoit dans les grandes chaleurs	45 ^{part.} $\frac{2}{3}$
	& dans l'état moyen de chaleur	41 $\frac{1}{2}$
	Difference	4 $\frac{1}{6}$
	ou bien	16 ^{li.} $\frac{2}{3}$
	Le Barometre simple marquant	27 ^{po.} 8 ^{l.} 0 ^{poi.}
II ^{o.}	Le Barometre double marquoit dans les grandes chaleurs	42 ^{part.}
	& dans l'état moyen de chaleur	37 $\frac{1}{2}$
	Difference	4 $\frac{3}{4}$
	ou bien	19 ^{li.}
	Le Barometre simple marquant	27 ^{po.} 11 ^{l.} 1 ^{poi.}
III ^{o.}	Le Barometre double marquoit dans de très-grandes chaleurs	33 ^{part.}
	& dans l'état moyen de chaleur	28 $\frac{1}{4}$
	Difference	4 $\frac{3}{4}$
	ou bien	19 ^{li.}
	Le Barometre simple marquant	27 ^{po.} 9 ^{l.} 1 ^{poi.}
IV ^{o.}	Le Barometre double marquoit dans la grande chaleur	38 ^{part.} $\frac{1}{2}$
	& dans l'état moyen de l'air	34
	Difference	4 $\frac{1}{2}$
	ou bien	18 ^{li.}

Le Barometre simple marquant	27 ^{po.} 10 ^{l.} 0 ^{poi.}
Le Barometre double marquoit dans	
V ^{o.} l'état moyen de chaleur	33 ^{part.} $\frac{1}{3}$
& au commencement de la gelée le	
Barometre ayant été transporté à l'air	30 $\frac{2}{3}$
Difference	2 $\frac{2}{3}$
ou bien	10 ^{li.} $\frac{2}{3}$

J'ay voulu voir aussi ce qui arriveroit au Barometre double étant exposé au Soleil vers l'heure de midy dans les plus grandes chaleurs du mois de Juillet de l'année passée 1708 ; & pour en connoître mieux tous les effets, j'ay mis à côté le petit Thermometre à esprit de vin de M. Amontons.

J'ay remarqué d'abord , que la liqueur du Barometre s'élevoit fort lentement , & peu en comparaison de l'esprit de vin du Thermometre ; & les ayant laissez au Soleil plus d'une heure , je les ay remis à leur place ordinaire qui est à l'ombre , & l'un proche de l'autre. Mais j'ay observé alors que la liqueur du Barometre ne laissoit pas de continuer à monter , & au contraire l'esprit de vin du Thermometre descendoit fort vite pour reprendre son premier état. Car quoique l'esprit de vin soit fort sensible à la chaleur , & l'eau fort peu en comparaison , il semble pourtant qu'il devoit arriver la même chose à l'eau du Barometre qu'à l'esprit de vin du Thermometre , puisque la cause cessant , l'effet doit aussi cesser ; cependant il se peut faire que le mercure ayant reçu du Soleil une impression de chaleur bien plus grande que la liqueur & la conservant plus long-tems à cause que c'est un corps plus solide , ne laisse pas de continuer à échauffer encore la liqueur plus qu'elle n'étoit , car elle le touche dans un espace assez grand , ce qui fait que cette liqueur continué à monter , & sur tout le changement de volume du mercure n'étant pas considerable par la chaleur & par le froid , comme je l'ay expérimenté en exposant au grand Soleil un Barometre simple.

Pour l'esprit de vin du Thermometre, il n'en est pas de même; car comme c'est un liquide fort facile à se dilater par la moindre chaleur, aussi se condense-t-il très-facilement par le moindre froid.

On ne peut pas douter que les différentes hauteurs de la liqueur du Barometre double que j'ai observée & que je viens de rapporter, dans des tems où le Barometre simple étoit à la même hauteur ou bien l'atmosphère pesant également ne viennent principalement de la dilatation de la liqueur qui est en assez grande quantité dans la phiole d'embas de ce Barometre, & dont le tuyau est fort delié: car pour peu que cette liqueur s'enfle par la chaleur, elle en donnera une marque très-sensible dans le petit tuyau, & c'est ce qui n'arrive pas tout-à-fait de même à mon Barometre, à cause que n'y ayant que très-peu de liqueur, cette élévation causée par la chaleur n'y sera pas considérable; cependant j'ay expliqué de quelle maniere on pouvoit s'en servir sans tomber dans l'erreur, en confondant l'action du Barometre avec celle du Thermometre, qui font ensemble des effets fort irréguliers dans le Barometre double de M. Hugens.



FORMULES GENERALES

Pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux.

PAR M. DE REAUMUR.

JE lus le 4 Mai un Memoire dans lequel je démontrai une Méthode pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites indéfiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque, vers le même côté, sous des angles égaux moindres ou plus grands qu'un droit. J'exceptois ainsi l'angle droit, parce que mon dessein étoit de donner seulement des choses nouvelles, & que de célèbres Géometres ont trouvé plusieurs Formules très-commodes pour déterminer la longueur des raïons osculateurs, ou, ce qui est la même chose, pour avoir le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe sous un angle droit. Je me servis de leurs découvertes pour arriver à ce que je cherchois; je supposai leurs Formules pour donner la mienne; mais le juste goût où l'on est à présent pour les généralitez, & la facilité qu'on a d'y parvenir avec le secours des nouvelles Méthodes, firent que le R. P. Gouïe proposa de résoudre ce Problème universellement sans en excepter l'angle droit, & sans supposer les Formules déjà trouvées. Voici une des manieres dont on le peut faire.

1709.
4. Juin.

186 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
P R O B L È M E.

Une Courbe quelconque $AMmG$ étant donnée, il faut trouver le point d'intersection N des droites FM , fm , infiniment proches qui font avec cette Courbe vers le même côté les angles FMA , fmA égaux, sans rien supposer de constant que ces angles.

S O L U T I O N.

Soient menées les ordonnées infiniment proches BM ,

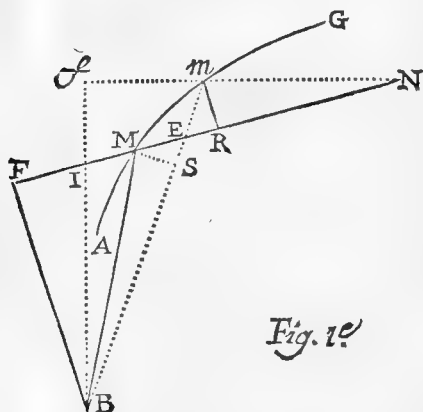


Fig. 1^e

Bm de la Courbe $AMmG$, qu'on suppose ici concourir au point B ; & de ce point soient tirées les perpendiculaires BF , Bf , sur FM , fm : la 2^e de ces perpendiculaires Bf , M coupera FM en I . Soient enfin abaissées les perpendiculaires mR (fig. 1.) sur MN , MS sur Bm , & (fig. 2.)

MR sur mN , MS sur Bm . La seule vûe des figures fait appercevoir deux cas différens. 1^o, ou les droites FM , fm , (fig. 1.) font avec la partie convexe de la Courbe les angles FMA , fmA plus petits que les angles BMG , BmG : 2^o, ou (fig. 2.) les droites FM , fm font avec la partie convexe de la Courbe les angles AMT , Amt plus grands que les angles BMG , BmG . Il est évident que dans le 1^r cas (fig. 1.) le point d'intersection N sera placé par delà BM par rapport à A ; & dans

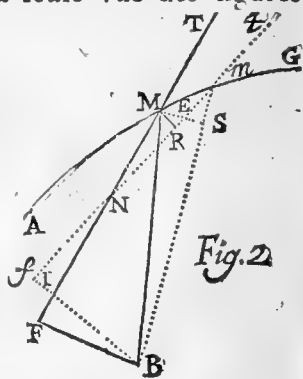


Fig. 2

le 2^d cas (fig. 2.) ce même point sera entre AM & BM ; ce qui apporte quelque changement aux figures. C'est pourquoy je considererai les deux cas séparément.

Cas 1. On nommera le sinus de l'angle donné (fig. 1.) mMR , n ; celui de l'angle MmR (qui est donné aussi, l'angle mRM étant droit) m ; le sinus total, ou de l'angle droit mRM , a ; MN , ou mN , z ; BM , ou Bm , y ; Mm , ds ; mS , dy ; MS , dx ; ME , du ; ES , dt : D'où on aura $MR = \frac{nds}{a}$, en faisant $a.m :: ds (Mm).MR$; & par un

semblable raisonnement $mR = \frac{nds}{a}$; par conséquent $ER = MR - ME = \frac{nds}{a} - du$; $Em = mS - ES = dy - dt$. Les trian-

gles rectangles semblables MES , mER , donnent les analogies suivantes $ME (du) . ES (dt) :: Em. (dy - dt) . ER$ ($\frac{nds}{a} - du$); d'où on tire (après avoir substitué pour du^2 sa

valeur $dt^2 + dx^2$) $dt = \frac{ndsdu - adx^2}{ady}$, & $mR (\frac{nds}{a}) . Em (dy - dt) :: MS (dx) . ME (du)$, ce qui donne $dt = \frac{adydx - ndsdu}{adx}$; or

comparant ces deux valeurs de dt , on en tire $du = \frac{adx dy^2 + adx^3}{mdx ds + nds dy} =$ (après avoir substitué pour dx^2 sa valeur

$ds^2 - dy^2$) $\frac{adx ds}{mdx + ndy}$; & substituant cette valeur de du en une des précédentes de dt , on aura (les operations necessaires étant faites) $dt = \frac{mdx dy - ndx^2}{mdx + ndy}$. Il est de plus visible que les

triangles rectangles MBF , MES , sont semblables; car si des angles SEM , EMS , égaux à un droit, & des angles BMF , EMS pareillement égaux à un droit, on ôte le même angle EMS , les angles restans SEM , BMF sont aussi égaux. On a donc les analogies suivantes: . . .

$ME (du = \frac{adx ds}{mdx + ndy}) . ES (dt = \frac{mdx dy - ndx^2}{mdx + ndy}) :: BM (y) .$

$FM = \frac{my dy - ny dx}{ads}$; & $ME (\frac{adx ds}{mdx + ndy}) . MS (dx) :: BM (y) .$

$BF = \frac{my dx + ny dy}{ads}$. Si on prend à present la difference de BF . en regardant toutes les quantitez comme

188 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
variables, on aura la valeur de

$$mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2$$

$$If = \frac{-nydydds}{ads^2}$$

mais on a enfin (à cause des triangles semblables)

$$IfN, NmR, NI = MN + MF = z \frac{+mydy - nydx}{ads}$$

$$mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2$$

$$If = \frac{-nydydds}{ads^2} :: Nm(z).$$

$$mR = \frac{nds}{a}; \text{ d'où l'on tire}$$

$$mnydyds^2 - nnydxds^2$$

$$z(MN) = \frac{amydsddx + anydsddy - amydxdds - anndsx^2}{-anydydds + amdsdxdy}, \text{ après}$$

avoir substitué dans le dénominateur de la fraction pour ds^2 , sa valeur $dx^2 + dy^2$. Si on multiplie à present le haut & le bas de la fraction qui exprime la valeur de $z(MN)$.

par $\frac{ndx}{mndy - nndx}$, on la changera en celle-cy : . . .

$$z = \frac{nydxds^2}{amnydsddx + annysdxdy - amnydx^2dds - annndx^3ds - annydx^2dydds + amndx^2dsdy} \text{ après}$$

$$mndy - nndx$$

quoi substituant pour $dxdds$, sa valeur $dsdds - dyddy$, & dans le terme où l'on trouvera ds^2 (après cette operation) mettant sa valeur $dx^2 = dy^2$, le dénominateur de cette fraction se réduira (la division qui devient par-là possible étant faite) à $aydydds - aydsddy + adsdx^2$, par conséquent on

$$auraz = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$$

Ce qu'il falloit trouver.

2. Cas. Un chemin assez semblable à celui qu'on a suivi dans le cas précédent, conduira à trouver la même Formule pour déterminer le point d'intersection N ; mais on nommera dans ce cas-cy le sinus de l'angle MmR , n , (fig. 2.) parce qu'il represente le sinus de l'angle mMR de la

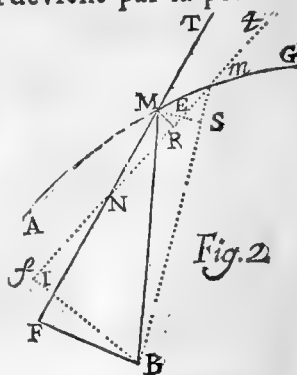


fig. 1^{re}, & le sinus de mMR , sera nommé m ; on nommera de plus mE , du ; ES , dt ; & le reste comme dans le cas précédent; ainsi on aura $MR = \frac{nds}{a}$; $mR = \frac{m ds}{a}$; $RE = mR - mE = \frac{m ds}{a} - du$; $ME = MS - ES = dx - dt$. Les triangles rectangles semblables MER , mES , donnent encore ici ces deux analogies: $mE (du) . ES (dt) :: ME (dx - dt) . ER (\frac{m ds}{a} - du)$; & $MR (\frac{nds}{a}) . ME (dx - dt) :: mS (dy) . mE (du)$. On tire de la 1^{re} (après avoir substitué pour dt^2 sa valeur $du^2 - dy^2$) $dt = \frac{m ds du - ady^2}{adx}$; & de la 2^e, $dt = \frac{adx dy - nds du}{ady}$. Or la comparaison de ces deux valeurs de dt en fournit une de $du = \frac{ady ds}{mdy + ndx}$, & substituant cette valeur de du en une de celles de dt , on trouve $dt = \frac{mdx dy - ndy^2}{mdy + ndx}$. Il sera à présent aisé d'avoir les expressions algébriques de FM , BF , & fI différence de BF , par le moyen des triangles rectangles semblables mES , MBF . Après quoi faisant de la proportion que donnent les secteurs fNI , MNR , une égalité, on en tirera comme dans le cas précédent, une valeur de $MN (z)$, & des préparations semblables à celles du même cas précédent, rendront aussi cette valeur la même qu'on a trouvée cy-dessus; car on aura

$$z(MN) = \frac{nydx ds^2}{ads dx^2 + aydy ds - ayds dy}$$

COROLLAIRE I.

Si dans la Formule générale des points d'intersection $z = \frac{nydx ds^2}{ads dx^2 + aydy ds - ayds dy}$, on substitue en la place de dds sa valeur $\frac{dx dx + dy dy}{ds}$, & après cette substitution on met dans le terme du dénominateur où l'on trouvera ds^2 sa valeur $dx^2 + dy^2$, cette 1^{re} Formule se changera en une 2^e $z = \frac{nyds^3}{ads^2 dx + aydy dx - aydx dy}$. Ou si l'on substitue dans la 1^{re} Formule de valeur de $ddy = \frac{ds ds - dx dx}{dy}$, & en la place de dy^2 (que cette substitution fera trouver dans le dénominat.)

$ds^2 - dx^2$, on aura une 3^e Formule $z = \frac{nydyds^2}{adydxds + aydsdx - aydxds}$.

COROLLAIRE II.

Lorsque les droites FM , fm , feront avec la Courbe $AMmG$ des angles droits, l'angle mMR (*fig. 1.*) deviendra égal à l'angle mRM , & (*fig. 2.*) l'angle MmR aussi égal à l'angle mRM ; de sorte que le sinus n de ces angles sera alors égal au sinus total a . Ce qui changera les trois expressions précédentes en celles-cy :

$$1^{\text{re}}. z = \frac{ydxds^2}{ds^2dx^2 + ydydds - ydsddy} : 2^{\text{e}}. z = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy} :$$

3^e. $z = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$: qui sont autant de Formules du raïon de la Développée. Ce sont aussi celles que M. Varignon a démontrées dans les Memoires de 1701, pag. 27, & dans ceux de 1707, pag. 503, de tant de manieres très différentes, mais encore plus ingénieuses. M. Vari-
gnon a aussi trouvé les trois Formules du Corollaire précédent par des chemins différens de celui que je viens de donner ; mais comme il attend une autre occasion pour les faire connoître au public, j'ai crû devoir montrer celui que j'ai suivi pour y arriver.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corollaire précédent, que si on nomme le raïon de la développée, r , on aura 1^o. $r = \frac{ydxds^2}{ds^2dx^2 + ydydds - ydsddy}$:

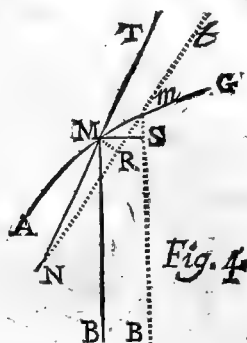
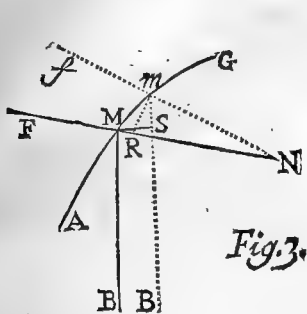
$$2^{\text{o}}. r = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy} : 3^{\text{o}}. r = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}.$$

Si l'on substitue r dans les Formules 1^{re}, 2^e, & 3^e, en la place de sa 1^{re}, 2^e & 3^e valeur (*Corol. 1.*) ces trois Formules se changeront en celle-cy $z = \frac{nr}{a}$, qui est aussi celle que j'ai démontrée le 4. Mai, avec cette seule différence que je nommai alors m , ce qui est ici appelé n , & que je mis dans la Formule en la place de a sa valeur $\sqrt{mm} = an$.

COROLLAIRE IV.

Le point de concours B , des ordonnées BM , Bm , étant

pris infiniment éloigné de la Courbe $AMmG$, ces ordonnées deviendront alors parallèles, & tous les termes qui



ne sont pas multipliés par y (BM) dans les Formules du Corol. 1. s'évanouissant, ces trois Formules se changeront en celles-ci : 1^{re}, $z = \frac{ndxds^2}{adydds - adsddy}$; 2^e, $z = \frac{nds^3}{adyddx - adxdy}$; 3^e, $z = \frac{ndyds^2}{dsddx - dxdds}$: Ces trois Formules serviront à déterminer le point d'intersection N des droites FM , fm , dans le cas des ordonnées parallèles entr'elles.

COROLLAIRE V.

Les Formules des Corol. 1 & 4, deviendront plus simples dans l'application ; car on sera obligé alors de regarder la différence d'une des variables comme constante ; d'où il arrivera que la différence 2^e de cette variable sera zero. En faisant ces différentes suppositions on changera les trois Formules du Corol. 1, dans les six qu'on voit cy-dessous, dans la 1^{re} colonne ; comme aussi dans les six autres qu'on voit dans l'autre colonne les trois du 4 Corol.

Formules qui naissent de celles du Corollaire 1.

Formules qui naissent de celles du Corollaire 4.

ds constante, ou $dds = 0$.

$$z = \frac{nydxds}{adsdx - ayddy}$$

$$z = \frac{ndxds}{-addy}$$

$$z = \frac{nydyds}{adydx + ayddx}$$

$$z = \frac{ndyds}{addx}$$

192 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dy constante, ou $ddy=0$.

$$Z = \frac{nydxds^2}{adxds^2 + aydydds} \quad Z = \frac{ndxds^2}{adydds}$$

$$Z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx} \quad Z = \frac{nds^3}{adyddx}$$

dx constante, ou $ddx=0$.

$$Z = \frac{nyds^3}{ads^2dx - aydxddy} \quad Z = \frac{nds^3}{adxddy}$$

$$Z = \frac{nydyds^2}{adydxds - aydxdds} \quad Z = \frac{ndyds^2}{adxdds}$$

On alongeroit inutilement ce Memoire si l'on appli-
quoit ici ces Formules générales à des cas particuliers.
Il n'est besoin pour cela que de calcul. Comme il arrive-
roit même qu'on trouveroit toujours l'expression du raïon
osculateur multipliée par la fraction constante $\frac{n}{a}$, il est
aussi commode dans les cas particuliers de chercher d'a-
bord ce raïon, après quoi on déterminera aisément le
point d'interfection *N*, en suivant la méthode du Corol-
laire 2, art. 1, du 4 Mai. Je ne repeterai pas non plus ici
ces choses qu'on trouve dans les Corollaires du même
Memoire, quoiqu'on en pût déduire la plus grande par-
tie de cette dernière Solution.



DES MOUVEMENTS

*Primitivement variés dans des milieux résistans en
raison des quarrés des vitesses effectives de
ces mouvemens.*

PAR M. VARIGNON.

DAns les Mem. de 1707, Probl. 1, pag. 391, &c. Et dans ceux de 1708, pag. 113, &c. j'ai fait voir ce que devrait arriver à des corps mûs dans des milieux qui leur résisteroient en raison de leurs vitesses actuelles ou restantes de leurs primitives malgré les résistances de ces milieux. On appelle ici & là *vitesse primitives*, celles que ces corps auroient dans des milieux sans résistance ni action, tels qu'on suppose d'ordinaire le vuide. On a aussi vû dans les Mem. de 1707, Prob. 2, pag. 397, &c. ce que des mouvemens primitivement uniformes deviendroient dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives qu'ils y auroient : hypothese ordinaire beacoup plus vrai semblable que la premiere. Voici presentement ce qui devrait arriver dans ces milieux à des mouvemens primitivement variés. Mais pour ne pas rendre ce Memoire-ci trop long, non-seulement nous n'y emploierons que des vitesses primitivement variés en raison des tems, comme dans l'hypothese de Galilée sur la pesanteur ; mais encore nous n'y traiterons que des primitivement accelerés en raison des tems écoulés, en commençant à zero de vitesse : Les primitivement accelerés en raison de ces tems écoulés après avoir commencé par des vitesses quelconques, & les primitivement retardés en raison des tems qui resteroient à écouler jusqu'à leur entiere extinction dans un milieu sans résistance, seront pour d'autres Memoires. Pour tout cela voici en peu

1799.

Bb.

1709.
15. Juin.

LEMME I.

Soient sur l'axe ATC les trois courbes ARC, HUC, KEC, rencontrées en R, U, E, par la droite EV perpendiculaire en T sur cet axe, & qui rencontre de même en V la droite FVC inclinée de 45 deg. sur ce même axe ATC, par le point A duquel soit aussi la perpendiculaire FK, laquelle rencontre en F, H, K, la droite FVC, & les courbes HUC, KEC. Soient aussi les courbes HUC, ARC, telles qu'elles aient par tout $UT = RV$ correspondante.

Après cela soient prises les abscisses $AT(t)$ pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement; $TV(v)$, pour les vitesses primitives à la fin de ces tems; $TR(r)$, pour les résistances totales, c'est-à-dire, pour les sommes des résistances instantanées (dr) que le milieu fait effectivement aux vitesses actuelles ou restantes de ces primitives à chaque instant (dt) des tems correspondans $AT(t)$; RV ou leurs égales $TU(u)$, pour ces vitesses restantes; & $ET(z)$, par des affections quelconques de ces vitesses restantes, suivant la raison desquelles affection les résistances instantanées (dr) se fassent, c'est-à-dire, auxquelles affections ces résistances soient proportionnelles.

Cela posé, si l'on prend par tout dt constante de même qu'une autre grandeur quelconque a , l'on aura ici

I. $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$ pour Règle générale des résistances des milieux, quelles que soient les vitesses primitives (v) ou la ligne FVC qui les exprime par ses ordonnées $TV(v)$, & suivant quelques affections (z) des vitesses effectives (u), ou de quelqu'autre chose à volonté, que se fassent ces résistances instantanées (dr) du milieu supposé : dans laquelle Règle l'on aura $du = dv - dr$, la construction donnant $u = v - r$.

II. Supposons presentement que FVC est une ligne droite inclinée (si l'on veut) de 45 deg. sur TV . Cette construction donnant aussi $AT(t) = TV(v)$, & consé-

quemment $dt = dv$ dans la fig. 1. des vitesses primitives TV accélérées en raison des tems écoulés depuis le premier instant du mouvement commencé à zero de vitesse; cette équation générale (art. 1.) $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$, s'y changera en $\frac{dr}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt - du}{z}$, qui fera passer par A les lignes FVC , HUC .

III. La même construction donnant $TV = TC$ dans la fig. 2. des vitesses primitives $TV (v)$ retardées en raison des tems qui resteroient à écouler jusqu'à leur entière extinction, si le milieu ne faisoit aucune résistance; & conséquemment aussi $AC = AF$: si l'on appelle ici a chacune de ces deux dernières grandeurs constantes AC , AF ; ayant déjà $TV (v) = TC (a - t)$, & conséquemment aussi $dv = -dt$, la précédente équation générale (art. 1.) se changera de même ici en $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{-dt - du}{z}$, qui y donne $AH = AF$, à cause qu'en A , $AH = TU = RV = AF$; & fait passer la courbe HUC par le point M où son axe ATC est rencontré par la perpendiculaire NM tirée du point N où la courbe ARC rencontre la droite FVC , à cause que UV en MN rend $UT = RV = 0$.

FIG. II.

IV. Dans la fig. 3. des vitesses primitives $TV (v)$ croissantes encore comme dans l'art. 2 en raison des tems écoulés depuis le premier instant du mouvement, lequel mouvement ait ici commencé, non à zero de vitesse comme dans cet art. 2. mais par une vitesse quelconque AF appelée b ; si l'on mène la droite FXC parallèle à l'axe ATC : cette addition à la construction précédente donnant $TX = AF = b$, & $XV = FX = AT = t$, donne ici $TV (v) = TX + XV = b + t$; d'où il résulte encore ici $dv = dt$, & (art. 1.) $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt - du}{z}$, comme dans l'art. 2: mais $AH = AF$ comme dans l'art. 3.

FIG. III.

Tout cela est démontré dans le Lem. 1, pag. 114, 115, 116, 117 des Mem. de 1708; & dans ses Corol. 1, 2, 3, 4, 5, 6,

L E M M E II.

FIG. I.
II.
III.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Lem. 1. les aires $ATUH$, $ARVF$, que la supposition qu'il n'y fait de $TU=RV$, rend égales entr'elles, seront par tout proportionnelles chacune aux espaces parcourus pendant les tems AT (t) correspondans en vertu des vitesses TU ou RV (u) restantes des primitives TV malgré les résistances supposées.

Cela est aussi démontré dans le Lem. 2. pag. 117 & 118 des Mem. de 1708, en ce que $ATUH=ARVF=sudt$, & que les espaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t), sont toujours entr'eux comme les sommes ($sudt$) des vitesses TU (u) employées à les parcourir.

On appellera encore ici (comme dans les Mem. de 1708, pag. 118.) FVC , Ligne des vitesses primitives; ARC , Courbe des résistances totales ou des vitesses perduës; HUC , Courbe des vitesses restantes; & KEC , Courbe des résistances instantanées.

P R O B L E M E.

FIG. I. Trouver les Courbes ARC des résistances totales ou des vitesses perduës, HUC des vitesses restantes des primitives, &c. Dans l'hypothèse 1^o, des résistances instantanées en raison des quarrés de vitesses actuelles ou restantes; & 2^o, des vitesses primitives accélérées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur des corps qui tomberoient en lignes droites dans un milieu sans résistance ni action, tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide.

S O L U T I O N

I. Suivant le Lem. 1. la premiere de ces deux hypothèses-ci donnera $TE(z) = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{RV \times RV}{AB} \left(\frac{u}{u} \right) = \frac{TV - TR^2}{AB}$ $\left(\frac{v - r^2}{a} \right)$ en supposant $AB=a$ constante; & la seconde donnera $TV(v) = AT(t)$: d'où résulte $t - r = v - r = u$. Donc en substituant ces valeurs de z & v , dans les deux formu-

les générales $\frac{dt}{x} = \frac{dt}{a}$, $\frac{dt-du}{x} = \frac{dt}{a}$, de l'art. 2. du Lem. 1.

La première de ces deux équations se changera ici en $\frac{dt}{x} = \frac{dt}{a}$ pour la Courbe *ARC* des résistances totales ou

des vitesses perduës ; & la seconde , en $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$ pour la Courbe *HUC* des vitesses restantes. Quant à *FVC*, son équation supposée $t=v$, fait évidemment voir que ce doit être une ligne droite inclinée en *A* de 45 deg. sur *AT* conformément au Lem. 1. & à son art. 2.

II. Pour construire les deux Courbes *HUC*, *ARC*, il faut considérer que la dernière équation (art. 1.) $\frac{dt-du}{uu} = \frac{aa}{dt}$ de la Courbe *HUG* donnant $aa dt - aa du = uu dt$, donne aussi $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ pour l'équation de cette même Courbe *HUC*.

III. Soit présentement $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$: l'on aura $du =$
 $\frac{x+a-x+a}{x+a} \times adx = \frac{2aadx}{x+a}$, & $aa-uu = aa - \frac{x-a}{x+a} \times aa =$
 $\frac{xx+2ax+aa-xx+2ax-aa}{x+a} \times aa = \frac{4a^3x}{x+a}$. Donc $\frac{du}{aa-uu} \left(\frac{dt}{aa} \right)$
 $= \frac{2aadx}{4a^3x} = \frac{dx}{2ax}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, qui est une équation à une
 Logarithmique d'une soûtangente $= \frac{1}{2}a$, & d'ordon-
 nées $= x$ perpendiculaires à son asymptote dont les abscis-
 ses correspondantes sont $= t$.

IV. Soit donc en *A* perpendiculairement sur *AT*, la droite *AB* $= a$, par l'extrémité *B* de laquelle passe cette Logarithmique *BLC*, ayant sa soûtangente $= \frac{1}{2}AB$ ($\frac{1}{2}a$), & *ATC* pour asymptote dont elle s'écarte du côté de *C*. Cela étant, si l'on prolonge *TU* jusqu'à la rencontre de cette Logarithmique en *L*, après avoir rencontré en *S* la droite *BSC* parallèle à *ATC* ; l'on aura *LT* $= x$, *LS* $= x-a$, & *LT* + *ST* $= x+a$. Mais la supposition précédente (art. 3.) de $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, donnera aussi $x+a$ (*LT* + *ST*). $x-a$ (*LS*) :: a (*AB*) . u (*TU*). Et par con-

FIG. IV

ſèquent $TU = \frac{AB \times LS}{LT + ST} = \frac{AB \times LS}{LT + AB}$. Donc en prenant TU de cette valeur, c'eſt-à-dire, quatrième proportionnelle aux trois grandeurs $LT + AB$, AB , LS , données par la Logarithmique BLC ; la ligne qui paſſera par tous les points U ainſi trouvés, ſera la courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes, exprimée (*art. 2.*) par l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{du}{aa - uu}$: laquelle courbe paſſera par le point A ; puis que $LS = 0$ en B , rend auſſi $TU \left(\frac{AB \times LS}{LT + AB} \right) = 0$ en A .
Ce qu'il falloit premièrement trouver.

V. Cette courbe HUC étant ainſi conſtruite, il n'y aura plus qu'à prendre par tout $UR = TV$ (*hyp.*) $= AT$, ou $VR = TU$; & la ligne qui paſſera par tous les points R ainſi trouvés, ſera ici (*Lem. I.*) la courbe des réſiſtances totales (r) ou des viteſſes perduë ($v - u$), exprimée (*art. 1.*) par l'équation $\frac{dr}{z - r} = \frac{dt}{a}$. *Ce qu'il falloit auſſi trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque (*Solut. art. 4.*) $TU = \frac{AB \times LS}{LT + AB}$, il eſt viſible que pour rendre $TU = AB$, il faudroit $LS = LT + AB = 2AB + LS$; ce qui ne pouvant arriver qu'à une diſtance infinie de AB qui alors ſeroit nulle par rapport à LS pour lors infinie, la courbe HUC ou (*Solut. art. 4.*) AUC ne peut arriver juſqu'en BC qu'à une diſtance infinie de AB . Ainſi BC en doit être une aſymptote.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit (comme du Prob. I. Corol. 9 pag. 123. des Mem. de 1708, quoique d'hypothèſe différente de celle qu'on fait ici touchant les réſiſtances) que les viteſſes reſtantes & effectives TU (u) augmenteront ici à l'infini ſans jamais devenir uniformes, quoiqu'elles ne puiſſent jamais devenir plus grandes que la finie AB (a), & qu'elles approchent touſjours de ſa valeur, ne pouvant l'égalier qu'après le tems infini AC de ſorte que cette plus

grande vitesse AB (a) en fera le terme d'aceroissement; ou (pour parler comme M. *Hughens*) la *vitesse terminale*. D'où il suit à cause de (*hyp.*) $AT = TV$, qu'il faudroit un tems infini au mobile pour acquérir dans le milieu résistant supposé une vitesse égale à ce qu'il en acqueroit dans un milieu sans résistance pendant un tems assez court $AT = AB$.

COROLLAIRE. III.

On voit aussi que le point A rendant (*Solut. art. 4.*) $TU(u) = 0$, l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ (*Solut. art. 2.*) de la courbe HUC des vitesses restantes (u), doit s'y changer en $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa}$, c'est-à-dire, en $dt = du$; ce qui fait voir que cette courbe HUC ou AUC divise l'angle droit BAC en deux parties égales, ou (ce qui revient au même) est inclinée de 45. degrez en A sur chacune des orthogonales AT, AB .

COROLLAIRE IV.

On voit de même que le point A rendant pareillement $AT(t) = 0$, & (*Lem. 1.*) $TR(r) = 0$, & conséquemment aussi $t - r = 0$; l'équation $\frac{dr}{t-r} = \frac{dt}{aa}$ (*Solut. art. 1.*) de la courbe ARC des résistances totales ou des vitesses perduës doit s'y réduire à $\frac{dr}{0} = \frac{dt}{aa}$, & conséquemment y avoir dt infinie par rapport à dr . Par conséquent cette courbe ARC doit être touchée ici en A par la droite ATC , de même que dans le *Prob. 1. Corol. 2. pag. 120 des Mem. de 1708.*

COROLLAIRE V.

Puisque (*Corol. 2.*) AB est la plus grande des vitesses TU que le mobile puisse jamais acquérir ici, même après un tems infini; les espaces ici parcourus pendant le tems $AT(t)$ en vertu de ces vitesses restantes $TU(u)$, doivent

200 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 être (Lem. 2.) à ce que le mobile en parcouroit pendant
 les mêmes tems AT d'une vitesse uniforme égale à cette
 terminale $AB :: ATU : ATSB$.

COROLLAIRE VI.

I. Quant à la comparaison entr'eux des espaces ici par-
 courus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses
 TU (u) restantes des primitives TV (v) à chaque instant
 de ces tems, on voit (Lem. 2.) que ces espaces doivent
 être ici entr'eux comme les aires correspondantes ATU
 ($\int u dt$). Mais l'art. 2. de la Solution donnant $\frac{dt}{a} = \frac{du}{aa - uu}$
 pour l'équation de la Courbe AUC des vitesses restantes
 (u), l'on aura ici $\int u dt (ATU) = \int \frac{a u du}{aa - uu}$. Donc les ef-
 spaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des
 vitesses restantes TU (u) doivent être ici entr'eux com-
 me les intégrales correspondantes, $\int \frac{a u du}{aa - uu} (ATU)$. Cela
 étant.

II. Soit $yy = aa - uu$, & conséquemment $y dy = -u du$.
 L'on aura $\int \frac{a u du}{aa - uu} (ATU) = - \int \frac{a y dy}{yy} = -a \times \int \frac{dy}{y} =$
 $-aa \times ly + q$. Mais le cas de $ATU = 0$, qui (Solut. art. 4.)
 rend aussi $TU(u) = 0$, rendant ici $y = a$, réduit cette in-
 tégrale à $0 = -aa \times la + q$ (en prenant a pour l'unité)
 $= -la + q = 0 + q$; ce qui rend aussi $q = 0$. Donc cette
 intégrale juste & précise sera $ATU = -aa \times ly$. Donc aussi
 (art. 1.) les espaces ici parcourus pendant les tems $AT(t)$
 seront entr'eux comme les grandeurs correspondantes
 $-aaly$, c'est-à-dire (à cause de $a=1$) comme les Loga-
 rithmes négatifs $-ly$ correspondans, ou (à cause de la sup-
 position qu'on vient de faire de $yy = aa - uu$) comme les
 Logarithmes négatifs $-lv \over aa - uu$ correspondans.

III. Mais si du centre A , & du rayon AB (a), on fait
 la quart de cercle $B\delta\beta$, que la droite CTA , & la paral-
 lele UG , continuées rencontrent en β , δ , & qu'on mene
 le rayon $A\delta$; aiant ici $AG = TU = u$, & $A\delta = AB = a$, l'on
 y aura

y aura aussi $G\delta = \sqrt{aa - uu}$; & par conséquent le Logarithme négatif de $G\delta$, égal au négatif $-\ln aa - uu$. Donc (art. 2.) les espaces parcourus pendant les tems AT , seront ici entr'eux comme les Logarithmes des sinus $G\delta$ des arcs $B\delta$ dont les complemens $\delta\beta$ auroient pour sinus les expressions AG ou TU des vitesses (u) acquises ici pendant ces tems malgré les résistances supposées, & pour sinus total l'expression AB (Corol. 2.) de la vitesse terminale ou de la plus grande (a) de tout ce qu'il y en a ici de possibles.

IV. Cela étant, si par le point β on suppose une Logarithmique $\beta\mu N$, d'une soûtangente $= A\beta(a)$ sur l'asymptote AB prolongée vers N , de laquelle elle s'approche du côté de N , & qui soit rencontrée en μ de part ou d'autre du point δ , par $\delta\mu$ parallèle à AN ; son ordonnée $\mu\pi$ parallèle à βA , & égale à δG , aiant $A\pi$ pour son Logarithme négatif en supposant toujours $A\beta(a) = 1$, cette même $A\pi$ sera aussi le Logarithme négatif du sinus δG . Donc (art. 3.) les espaces ici parcourus pendant des tems écoulés quelconques AT , seront aussi entr'eux comme les $A\pi$ correspondantes; & conséquemment l'espace ici parcouru pendant un tems infini, doit aussi être infini.

V. Cela se peut encore démontrer indépendamment de ce qui le précède, en prolongeant $\delta\mu$ jusqu'en a sur $A\beta$, & en lui faisant la parallèle infiniment proche mn qui rencontre βN , $\mu\pi$, en m, n . Car aiant $\mu\pi = G\delta = \sqrt{Ad^2 - AG^2} = \sqrt{aa - uu}$, & conséquemment $\mu n = \frac{udu}{\sqrt{aa - uu}}$ positive à cause que les $AG(u)$ croissent à mesure que $\mu\pi$ diminuent; l'on aura ici $\mu\pi(\sqrt{aa - uu})$, soûtangente (a) $:: \mu n \left(\frac{udu}{\sqrt{aa - uu}} \right) . mn = \frac{audu}{au - uu}$. Donc $\int \frac{audu}{aa - uu} = \int mn = \mu\pi = A\pi$, ou $a \times A\pi = \int \frac{aau du}{aa - uu} = (\text{art. 1.}) \int u d\pi = ATU$. Donc aussi (Lem. 2.) les espaces parcourus pendant le tems AT , seront encore ici entr'eux comme les $a \times A\pi$, ou simplement (à cause de a constante) comme les $A\pi$ correspondantes, ainsi que dans le précédent art. 4.

VI. La même chose se peut encore trouver autrement

202 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
en considérant que les Méthodes de M. Leibnitz & de
M. Bernouilli pour intégrer les fractions rationnelles, donnent

$\frac{u du}{aa - uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a - u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a + u}$, dont l'intégrale est
 $\int \frac{u du}{aa - uu} = -\frac{1}{2} \times \overline{la - u} - \frac{1}{2} \times \overline{la + u}$, le Logarithme de $a - u$
moindre que a pris ici pour l'unité, devant être négatif. Donc l'équation $\frac{dz}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ (*Solut. art. 2.*) de la Cour-

be AUC des vitesses restantes (u), donnant $\int \frac{a u du}{aa - uu} =$
 $= \int u dt = ATU$, l'on aura aussi $ATU = -\frac{aa}{2} \times \overline{la - u} - \frac{aa}{2}$
 $\times \overline{la + u}$. Par conséquent (*art. 1.*) les espaces parcourus
pendant les tems AT (t) en vertu de ces vitesses restan-
tes TU (u), seront ici entr'eux comme les grandeurs
 $-\frac{aa}{2} \times \overline{la - u} - \frac{aa}{2} \times \overline{la + u}$ correspondantes, ou simple-
ment (à cause de $\frac{aa}{2}$ constante) comme les correspondan-
tes $-\overline{la - u} - \overline{la + u}$: C'est-à-dire, comme les différen-
ces des Logarithmes de chaque sinus versé BG , & de
l'excès $AB + BG$ dont il est surpassé par le diametre en-
tier quart de cercle $B\delta\beta$.

VII. Mais $\sqrt{aa - uu}$ (δG ou $\mu\pi$) étant moyenne propor-
tionnelle géométrique entre $a - u$, $a + u$, soit Logarith-
me, qu'on vient de trouver (*art. 4.*) être $\sqrt{aa - uu} = -A\pi$,
doit aussi être moyen arithmétique entre $\overline{la - u}$, $\overline{la + u}$;
par conséquent $-2A\pi = \overline{la - u} + \overline{la + u}$, ou $A\pi =$
 $-\frac{1}{2} \times \overline{la - u} - \frac{1}{2} \times \overline{la + u}$. Donc (*art. 6.*) les espaces par-
courus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses restan-
tes TU (u), doivent encore être ici entr'eux comme les
Logarithmes négatifs $A\pi$ correspondans des sinus δG ou
 $\mu\pi$ des arcs $B\delta$ complemens de ceux $\beta\delta$ dont les sinus
sont les expressions AG ou TU des vitesses restantes ou
actuelles (u), & le sinus total AB pareille expression (*Co-*
rol. 2.) de la plus grande (a) qu'elles puissent jamais deve-
nir ici, ainsi qu'on l'a déjà vu dans les art. 3, 4, 5.

VIII. En continuant à l'infini la division de $\frac{a u du}{aa - uu}$, on

trouvera $\frac{aau du}{aa-uu} (udt) = udu + \frac{u^3 du}{aa} + \frac{u^5 du}{a^4} + \frac{u^7 du}{a^6} + \frac{u^9 du}{a^8}$
 $+ \&c.$ Dont l'intégrale est $\int udt (ATU) = \frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} +$
 $\frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6} + \frac{u^{10}}{10a^8} + \&c.$ à l'infini. Donc (art. 1.) les
 espaces parcourus pendant les tems $AT(t)$ en vertu des
 vitesses restantes $TU(u)$, seront pareillement ici entr'eux
 comme ces series ou suites infinies correspondantes.

COROLLAIRE VII.

Le rapport de ces espaces parcourus pendant les tems
 AT , se trouva encore, si tout ce qu'on voit de la Fig. 4.
 dans la Fig. 5, y demeurant le même que là, on imagine du
 centre B par l'angle β du quarré $ABX\beta$ circonscrit au
 quart de cercle $B\delta\beta$, une hyperbole équilaterre βQZ entre
 les asymptotes BX, BZ ; & que par chaque point δ où le
 quart de cercle $B\delta\beta$ est rencontré par $U\delta$ parallele à $A\beta$,
 soit une ordonnée PQ avec son infiniment proche pq ,
 lesquelles paralleles à BZ , rencontrent l'hyperbole βQZ ,
 en Q, q , & son asymptote BX en P, p . Car cette hy-
 perbole donnant $PQ = \frac{AB \times BX}{BP} = \frac{aa}{\sqrt{aa-uu}}$; & $G\delta$ ou BP

FIG. V.

$= \sqrt{aa-uu}$, donnant aussi $Pp = \frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}$ en différen-
 tiant $u (AG)$ négativement, à cause que BP ou $G\delta$ diminuë
 à mesure que AG augmente. L'on aura ici $PQ \times Pp (Qppq)$
 $= \frac{aau du}{aa-uu}$ (Corol. 6. nomb. 1.) $= udt$. Par conséquent $\int udt$
 $(ATU) = \int Qppq = \beta XPQ$. Donc (Lem. 2.) les espaces
 parcourus pendant les tems $AT(t)$ en vertu des vitesses
 TU ou $AG(u)$ restantes malgré les résistances du milieu
 supposé, doivent être ici entr'eux comme les aires hyper-
 boliques βXPQ correspondantes; & l'espace entier par-
 couru pendant un tems infini AC , comme l'aire entiere
 $Z\beta XBZ$, lequel espace seroit par conséquent ici infini,
 ainsi que dans le Corol 6. art. 4.

COROLLAIRE VIII.

Le rapport de ces espaces se trouvera encore par le

FIG. VI.

Cc ij

204 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 moïen de la Logarithmique BLC dont la soûtangente est
 $= \frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2} a$) dans l'art. 4. de la Solution, sans y employer
 celle $\beta\mu N$ qui vient de donner ce rapport dans l'art. 4. du
 précédent Corol. 6. laquelle avoit sa soûtangente $= AB(a)$.

I. Car puisque (Solut. art. 3.) $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, & $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$,
 ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$; l'on aura $u dt = \frac{a}{2} \times \frac{x dx - a dx}{xx + xa} = aa \times \frac{dx}{a+x}$
 $- \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale est $\int u dt$ ($ATU = aa \times \ln \frac{a+x}{a}$
 $- \frac{aa}{2} \times \ln x + q$, en prenant $\frac{a}{2} = 1$. Mais le cas de $ATU = 0$,
 rendant $LT(x) = BA(a)$, c'est-à-dire $x = a$, réduit cette
 intégrale à $0 = aa \times \ln 2a - \frac{aa}{2} \ln a + q$; d'où résulte $q = \frac{aa}{2}$
 $\times \ln a - aa \times \ln 2a$. Donc cette intégrale complete sera ATU
 $= aa \times \ln \frac{a+x}{a} - aa \times \ln 2a + \frac{1}{2} aa \times \ln a - \frac{1}{2} aa \times \ln x = aa \times \ln \frac{a+x}{2a}$
 $+ \frac{1}{2} aa \times \ln \frac{a}{x}$. Donc aussi (Lem. 2.) les espaces ici parcourus
 pendant des tems quelconques $AT(t)$ en vertu des vitesses
 restantes $TU(u)$, seront entr'eux comme les grandeurs
 correspondantes $aa \times \ln \frac{a+x}{2a} + \frac{1}{2} aa \times \ln \frac{a}{x}$, ou simplement
 comme les correspondantes $\ln \frac{2+x}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{x}$, en prenant
 (dis-je) $\frac{1}{2} a$ pour l'unité.

II. Presentement si après avoir pris $AX = \frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2} a$)
 avec $B\beta = AB$ sur AB prolongée du côté de β , & aussi
 $L\lambda = AB$ sur TL prolongée du même côté, ou fait XP ,
 $\beta\psi$, $\lambda\phi$, paralleles à CA prolongée vers \mathcal{Q} , lesquelles
 rencontrent la Logarithmique CLB prolongée vers P , en
 P , ψ , ϕ , desquels points on lui fasse des ordonnées $P\mathcal{Q}$, $\psi\omega$,
 $\phi\theta$, paralleles à BA , & qui rencontrent son asymptote $C\mathcal{Q}$
 en \mathcal{Q} , ω , θ : l'on aura $P\mathcal{Q} = \frac{1}{2} a$ (hyp.) \Rightarrow à la soûtangente
 de cette Logarithmique PBC , $\psi\omega = 2a$, & $\phi\theta = a+x$;
 puisqu'on a (hyp.) $AX = \frac{1}{2} a$, $L\lambda = B' = AB = a$, &
 $LT = x$. Donc en prenant encore ici $\frac{1}{2} a$ ($P\mathcal{Q}$) pour l'uni-
 té, & conséquemment a (AB) $= 2$; l'on y aura aussi
 $\mathcal{Q}A = \ln 2$, $\mathcal{Q}T = \ln x$, $\mathcal{Q}\omega = \ln 2a$, & $\mathcal{Q}\theta = \ln(a+x)$. Mais on

vient de trouver (art. 1.) $ATU = aaxla + x - aaxla + \frac{1}{2}aa \times la - \frac{1}{2}aaxlx$. Donc l'on aura pareillement ici ATU (*sudt*) $= aax \times \mathcal{Q}\theta - aax \mathcal{Q}\omega + \frac{1}{2}aax \mathcal{Q}A - \frac{1}{2}aax \mathcal{Q}T$ (à cause de $\mathcal{Q}\theta - \mathcal{Q}\omega = \omega\theta$, & de $\mathcal{Q}A - \mathcal{Q}T = AT$) $= aax \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$. Donc aussi (Lem. 2.) les espaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des vitesses restantes TU (u), seront ici entr'eux comme les grandeurs correspondantes $aax \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$, ou simplement comme les correspondantes $\omega\theta - \frac{1}{2}AT$, ou comme $2\omega\theta - AT$, dont ω est l'origine fixe de $\omega\theta$ de même que A l'est des AT .

COROLLAIRE IX.

On peut encore trouver ce rapport d'espaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses restantes TU (u), par le moïen d'une hyperbole équilatere quelconque $MY\phi$ entre les asymptotes orthogonales BA , $B\phi$, laquelle rencontre CA prolongée en M : en prenant par tout AZ (sur AB) troisiéme proportionnelle à AB , AG , de maniere qu'on ait par tout (pour chaque TU ou AG)

$AB(a) \cdot AG(u) :: AG(u) \cdot AZ = \frac{u^2}{a}$. Car si après avoir fait l'ordonnée ZY à l'hyperbole $MY\phi$ parallelement à son asymptote $B\phi$, on appelle les variables AZ , m ; ZY , n ; & la constante AM , c ; les noms du reste demeurant les mêmes que ci-dessus: l'on aura premierement $m = \frac{u^2}{a}$, &

$dm = \frac{2u du}{a}$ secondement l'hyperbole $MY\phi$ donnera BZ

$(a-m) \cdot BA(a) :: AM(c) \cdot ZY(n) = \frac{ac}{a-m}$ (à cause que

$m = \frac{u^2}{a}$ donne $a-m = a - \frac{u^2}{a} = \frac{aa-u^2}{a}$) $= \frac{aac}{aa-u^2}$. Donc

$ndm = \frac{2acu du}{aa-u^2}$, ou $\frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aau du}{aa-u^2}$ (Corol. 6. art. 1.) $= udt$.

Donc aussi en intégrant, *sudt* (ATU) $= \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c}$

$\times MAZY = \frac{AB}{2AM} \times MAZY$. Par conséquent (Lem. 2.) les

espaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des vitesses restantes TU (u), seront ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{AB}{2AM} \times MAZY$ correspondantes, ou

206 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 simplement (à cause de la fraction constante $\frac{AB}{2AM}$) com-
 me les aires hyperboliques $MAZY$ correspondantes, ainsi
 que M. Newton l'a aussi trouvé à sa maniere dans le liv.
 2. sect. 2. prop. 8. pag. 254. & 255. de ses Principes Ma-
 thématiques de la Philosophie naturelle.

COROLLAIRE X.

FIG. IV. I. Si l'on considère présentement que $\frac{du}{aa-uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a-u}$
 $+ \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a+u}$, & que l'art. 2. de la Solution donne $\frac{dt}{a^2} =$
 $= \frac{du}{aa-uu}$; l'on aura ici $dt \left(\frac{aadu}{aa-uu} \right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a-u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a+u}$,
 dont l'intégrale est $t(AT) = -\frac{a}{2} \times \ln a-u + \frac{a}{2} \times \ln a+u =$
 $= \frac{a}{2} \ln \frac{a+u}{a-u}$, en prenant ici a pour l'unité, laquelle sup-
 position doit rendre le Logarithme de $a-u$ négatif. Donc
 les tems $AT(t)$ employés ici à parcourir les espaces trou-
 vés dans les Corol. 6, 7, 8, 9, exprimés par exemple,
 par les Logarithmes $A\pi$ dans l'art. 4. du Corol. 6. doi-
 vent être entr'eux comme les grandeurs correspondantes
 $\frac{a}{2} \times \ln \frac{a+u}{a-u}$, ou simplement comme les Logarithmes $\ln \frac{a+u}{a-u}$
 correspondans, c'est-à-dire, chacun comme le Logarithme
 de la raison de $AB+AG$ au sinus verse GB corres-
 pondans, ou comme le Logarithme de la raison $\frac{a+u}{a-u}$
 de la somme $a+u$ faite de la vitesse actuelle (u) & de la
 terminale (a) à leur différence $a-u$.

II. Cela suit encore de l'équation Logarithmique
 $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution, en y suppo-
 sant $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$. Car cette supposition donnant $ax-aa =$
 $ux+ua$, ou $ax-ux = aa+au$, d'où résulte $x = \frac{aa+uu}{a-u}$;
 l'équation $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, donnera $t(AT) =$
 $\frac{a}{2} \times \ln x = \frac{a}{2} \times \ln \frac{aa+uu}{a-u} = \frac{a}{2} \times \ln \frac{a+u}{a-u}$ en prenant toujours a (AB)
 pour l'unité. Donc les tems écoulés $AT(t)$ seront encor^e

ici entr'eux comme les Logarithmes $\int \frac{a+u}{a-u}$, ou $\int \frac{AB+AG}{BG}$ correspondans, ainsi que dans le précédent art. 1.

III. Ces art. 1 & 2 fournissent encore une nouvelle construction de la Courbe AUC des vitesses restantes (u). Car si après avoir fait des orthogonales indéfinies AN , AC , on prend les abscisses AG de la première pour ces vitesses restantes ou actuelles (u), & que de la même origine A on prenne ensuite sur AC les abscisses $AT = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} = \frac{AB}{2} \times \int \frac{AB+AG}{BG}$ en supposant toujours $AB = a = 1$; il est manifeste (art. 1. & 2.) que la ligne AUC , qui passera par tous les angles U des parallelogrammes rectangles GT faits chacun des deux correspondantes AG , AT , fera la courbe des vitesses restantes (u), laquelle servira ici, comme dans l'art. 5. de la Solut. à construire celle ARC des résistances totales (r) ou des vitesses perduës.

IV. De ce que (art. 3.) il faut toujours ici $AT = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u}$, il est aussi manifeste que le cas de $u = a$ rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$ infinie, le tems AT seroit aussi pour lors infini : c'est-à-dire qu'il faudroit un tems infini pour que l'accélération des vitesses restantes (u) les pût rendre ici $= a$, ou TU ou TS (u) $= AB$ (a). Par conséquent (conformément au Corol. 2.) AB seroit encore la plus grande de tout ce qu'il y auroit aussi de vitesses possibles TU ou AG , lesquelles en approcheroient toujours sans jamais la pouvoir égaler, quoiqu'elle ne soit que finie, bien loin de pouvoir devenir uniformes, ainsi que quelques Philosophes l'ont pensé.

V. On voit aussi de-là qu'en prenant ainsi $AB = a$ sur AN , si l'on fait BC parallele à AC ; cette droite BC sera une asymptote de la Courbe AUC , ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 1. dont ceci est encore une nouvelle preuve.

COROLLAIRE XI.

Il suit des art. 1 & 2. du précédent Corol. 9, que si les raisons $\frac{a+u}{a-u}$ des sommes ($a+u$) aux différences ($a-u$)

208 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 de la plus grande a (*Corol. 2. & Corol. 10. art. 4.*) des vitesses u ici possibles , & de ces vitesses u (*TU* ou *AG*) successivement ajoutées & retranchées de cette plus grande ou terminale a (*AB*) , sont pris pour des nombres , les tems écoulés t (*AT*) à la fin desquels se trouvent ces vitesses restantes (u) , seront entr'eux comme les Logarithmes de ces raisons , ainsi que M. Leibnitz l'a dit dans les Actes de Leipfik de 1689. pag. 44. art. 5. nomb. 4. puisque (*Corol. 10. art. 1 & 2*) ces tems *AT* sont entr'eux comme les Logarithmes $\log \frac{a+u}{a-u}$, ou $\log \frac{AB+AG}{BG}$.

COROLLAIRE XII.

Imaginons presentement que le corps en question soit mû d'une vitesse primitivement uniforme quelconque , retardée (comme les variées d'ici) par des résistances en raison des quarrés des vitesses actuelles ou restantes de celle-là. Soit cette vitesse primitivement uniforme exprimée par *BN* prise telle sur *AB* prolongée du côté de *N* , qu'elle soit à *TU* comme cette vitesse primitivement uniforme est à la restante (u) des primitivement accélérées (v) à la fin de quelque tems *AT* (t) que ce soit. Sur *CB* prolongée vers *O* jusqu'à ce qu'on ait *BO* = *BN* , soit la perpendiculaire *OM* ; & par le point *N* entre les asymptotes *OC* , *OM* , soit une hyperbole équilatere *MNC* , laquelle soit rencontrée en *D* par *TL* prolongée (s'il en est besoin) de ce côté-là.

On a vû dans la Solution du Probl. 2. pag. 397, & 398. des Mem. de 1707 , que *SD* sera ici la vitesse restante de la primitivement uniforme *BN* à la fin du tems *AT* ou *BS* ; & dans le Corol. 3. de ce Probl. 2. pag. 399. que l'espace parcouru pendant ce tems *AT* ou *BS* , en vertu de ces vitesses restantes *SD* , sera exprimé par l'aire hyperbolique *NBSD* correspondante. On vient de voir aussi (*Lem 2.*) que l'espace parcouru pendant ce même tems *AT* en vertu des vitesses restantes *TU* dont il s'est agi jusqu'ici , est pareillement exprimé par l'aire *ATU* correspondante. Donc la présente hypothèse des résistances en raison des

des quarrés des vitesses, rendra l'espace parcourus pendant un tems quelconque AT ou BS en vertu des vitesses SD restantes de la primitivement uniforme supposée BN , au parcouru pendant le même ou en pareil tems en vertu des vitesses TU restantes des primitivement accélérées TV supposées ici en raison des tems écoulés, comme l'aire hyperbolique $NBSD$ est à l'aire correspondante ATU ; & par tout de même.

Les différentes expressions de ces espaces, démontrées pour le premier dans les Corol. 3. 4. 6. pag. 399. &c. des Mem. de 1707. & pour le second dans les Corol. 6. 7. 8. 9. de ce Problème-ci, serviront à en exprimer encore les rapports en d'autres manières présentement trop faciles pour nous y arrêter davantage.

REMARQUE I.

En prenant ici dv pour l'accroissement de vitesse qu'une pesanteur constante donneroit à chaque instant à un corps tombant dans un milieu sans résistances, dr pour ce qu'elle en trouve à chaque instant dans un milieu résistant, & du pour l'accroissement de vitesse que cette pesanteur ne laisse pas de donner à chaque instant au corps tombant dans ce milieu malgré cette résistance; on prouvera comme dans la Remarq. 1. pag. 126. des Mem. de 1708. que cette pesanteur, la résistance qui s'y oppose à chaque instant, & l'excès dont cette pesanteur surpasse cette résistance instantanée, seront ici entr'eux comme les grandeurs dv , dr , du , qui leur répondent.

REMARQUE II.

Les hypothèses de ce Problème-ci donnant (*Solut. art. 1.*) $dt = dv = dr + du$, & $\frac{dr}{uu} = \frac{dt - du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, cela seul donnera ici,

1°. $\frac{dr}{uu} = \frac{dt}{aa} = \frac{dv}{aa}$, d'ou résulte $dr, dv :: uu, aa$. c'est-à-dire (*Remarq. 1.*) que la résistance de chaque instant sera ici à la pesanteur du mobile, comme le quarré de la vi-

teffe actuelle ou restante dans cet instant, fera (*Corol. 2.*) au quarré de la vitesse terminale, ou de la plus grande que le mobile puisse acquerir en vertu de sa pesanteur malgré les résistances supposées : c'est-à-dire aussi (*Corol. 1. 2.*) :: $AG \times AG. AB \times AB.$

2°. Cette équation $\frac{dr}{uu} = \frac{dv}{aa}$, donnant $dr = \frac{uudv}{aa}$ (à cause de $dv = dr + du$) $= \frac{uudr + uudu}{aa}$, l'on aura ici $aadr = uudr + uudu$, ou $aadr - uudr = uudu$; d'où résulte $dr.du :: uu.aa - uu.$ c'est-à-dire (*Remarg. 1.*) que la résistance du milieu en chaque instant, fera ici à la différence ou à l'excès dont cette résistance est surpassée par la pesanteur du mobile, comme le quarré de la vitesse actuelle ou restante en cet instant, fera à la différence ou à l'excès dont ce quarré sera surpassé par celui de la vitesse terminale qui est (*Corol. 2.*) la plus grande que ce mobile puisse jamais acquerir en vertu de sa pesanteur malgré les résistances supposées : c'est-à-dire aussi (*Corol. 1. 2.*) :: $AG \times AG. AB \times AB - AG \times AG$ (à cause du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $AG \times AG. G\delta \times G\delta.$

3°. L'équation $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, donnant $aadt - aadu = uudt$, ou $aadu = aadt - uudt$ (à cause de $dv = dt$) $= aadv - uudv$; l'on aura ici $dv.du :: aa.aa - uu.$ c'est-à-dire (*Remarg. 1.*) que la pesanteur du mobile fera ici à la différence ou à l'excès dont elle surpassera la résistance du milieu en chaque instant, comme le quarré de la vitesse terminale de ce mobile, ou (*Corol. 2.*) de la plus grande qu'il puisse jamais acquerir en vertu de cette pesanteur malgré les résistances supposées, fera à l'excès dont ce quarré surpassera celui de la vitesse actuelle du même mobile: c'est-à-dire aussi (*Corol. 1. 2.*) :: $AB \times AB. AB \times AB - AG \times AG$ (à cause du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $A\delta \times A\delta. G\delta \times G\delta.$

4°. On voit de tout cela & de la Remarg. 1. que si l'on prend p pour la pesanteur (dv) du mobile, & f pour la différence (du) dont cette pesanteur surpassera ici chaque résistance instantanée (dr) du milieu; le nombre

premier donnera $dr = \frac{puu}{aa}$; le second, $dr = \frac{fuu}{aa - uu}$; & le troisiéme, $f = \frac{aap - uup}{aa}$. De sorte que de ces cinq choses : la résistance du milieu en quelque instant que ce soit, la pesanteur constante du corps qui y tombe malgré cette résistance, l'excès dont cette pesanteur surpasse cette résistance, la vitesse actuelle de ce corps en cet instant, & la plus grande vitesse qu'il puisse jamais acquérir en vertu de sa pesanteur dans ce milieu malgré les résistances qu'on y suppose : de ces cinq choses, dis-je, trois étant données à volonté, l'on aura toujours les deux autres, ainsi que dans la Remarq. 2. pag. 126. & 127. des Mem. de 1708. pour le Probléme qui s'y trouve, pag. 118.

S C H O L I E.

Pour ce qui est de la Courbe *KEC* des résistances instantanées, l'équation donnée $z = \frac{uu}{a}$ pour la premiere hypothése de ce Probléme-ci, rendant $u = \sqrt{az}$, & $du = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$, la substitution de ce valeurs de u , du , dans l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ trouvée (*Solut. art. 2.*) pour celle de la Courbe *AUC* des vitesses restantes (u), la changera en $dt = \frac{a^3 dz}{aa - az \times 2\sqrt{az}} = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$ qui sera celle de la Courbe *KEC*, laquelle.

10. Passera par *A* de même que (*Solut. art. 4.*) *HUC*; puisque le cas de u (*TU*) = 0, rend aussi z (*TE*) = 0. D'où l'on voit de plus qu'en *A* la précédente équation se réduisant à $dt = \frac{aadz}{0}$, la Courbe *KEC* qu'elle exprime, doit avoir dt infinie en *A* par rapport à dz ; & conséquemment y être touchée par son axe *ATC*, de même que (*Corol. 4.*) la Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perduës; au lieu que la Courbe *HUC* des vitesses restantes doit (*Corol. 3.*) faire en *A* avec le même axe *ATC* un angle de 45. deg.

20. Cette Courbe *KEC* ou (*nomb. 1.*) *AEC* ainsi tou-
D d ij

212 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ché en A par son axe ATC , lui présentera sa convexité jusqu'à une ordonnée $TE = \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} AB$, à l'extrémité E de laquelle elle aura un point d'inflexion, depuis lequel elle présentera toujours sa concavité à cet axe ATC en s'en éloignant jusqu'à une ordonnée $TE = AB$, qu'elle aura lorsque $TU = AB$; puisque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a} = \frac{TV \times TV}{AB}$, & par conséquent $TE = AB$ lorsque $TU = AB$; ce qui ne pouvant arriver (*Corol. 1.*) que lorsque AT fera devenuë infinie, fait voir que l'asymptote BC de la Courbe HUC ou (*Solut. art. 4.*) AUC des vitesses restantes ou effectives u , fera aussi une asymptote de la Courbe KEC ou (*nomb. 1.*) AEC des résistances instantanées z (*dr*).

FIG. VII. 3°. Il est aisé de voir dans la Fig. 7. que puisque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a}$, & que le *Corol. 9.* donne aussi $AZ = \frac{uu}{a}$; si l'on y prolonge YZ jusqu'à la rencontre de TU en E , ce point E sera un de ceux de la Courbe AEC des résistances instantanées z (*dr*); & ainsi des autres à l'infini. D'où l'on voit (*Solut. art. 5.*) que la construction d'une quelconque des trois Courbes AUC , ARC , AEC , donne tout d'un coup celles des deux autres dans la fig. 4.

4°. Si après avoir décrit cette Courbe AEC en prenant par tout TE troisième proportionnelle à TS , TU , c'est-à-dire $TE = \frac{TV \times TV}{TS} = \frac{uu}{a}$, ou même EY parallèle à TM , & qui rencontre l'hyperbole $MY\phi$ en T , & son asymptote BA en Z ; l'on aura par tout aussi $AZ = \frac{uu}{a}$, & conséquemment (*Corol. 9.*) les aires hyperboliques $MAZY$ en raison des espaces ici parcourus pendant les tems AT correspondans en vertu des vitesses restantes TU à chaque instant de ces tems malgré les résistances supposées.

AUTRE SOLUTION

FIG. VIII. I. On vient de trouver (*Solut. 1. art. 2.*) $\frac{dr}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$ pour l'équation de la Courbe HUC des vi-

teffes restantes (u) malgré les résistances supposées. Soit

$$\frac{a^4}{ss} = aa - uu : \text{l'on aura } uu = aa - \frac{a^4}{ss} = \frac{aass - a^4}{ss}, \text{ d'où}$$

$$\text{résulte } u = \frac{a}{s} \sqrt{ss - aa}, \text{ \& } du = \frac{-ads \sqrt{ss - aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss - aa}}}{ss}$$

$$= \frac{-ass + a^3 + ass}{ss\sqrt{ss - aa}} \times ds = \frac{a^3 ds}{ss\sqrt{ss - aa}}. \text{ Donc } dt \left(\frac{aadu}{aa - uu} \right) =$$

$$\frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}, \text{ qui est une équation à une hyperbole équilatere}$$

APC décrite du centre O , & du demi axe transverse $OA = a$, ayant ces abscisses $OQ = s$, & ses ordonnées $QP = \sqrt{ss - aa}$, auxquelles soit AB parallele rencontrée en G par une droite quelconque OP , qui tirée du centre O rencontre l'hyperbole APC en P .

II. L'on aura le triangle $OQP = \frac{s\sqrt{ss - aa}}{2}$, & (en supposant Op infiniment proche de OP , avec pq parallele à

$$PQ) \text{ sa différentielle } POP + PpqQ = \frac{\sqrt{ss - aa}}{2} \times ds +$$

$$\frac{ssds}{2\sqrt{ss - aa}} = \frac{ss - aa + ss}{2\sqrt{ss - aa}} \times ds = \frac{2ss - aa}{2\sqrt{ss - aa}} \times ds. \text{ Mais } PpqQ =$$

$$ds\sqrt{ss - aa} = \frac{ss - aa}{\sqrt{ss - aa}} \times ds = \frac{2ss - 2aa}{2\sqrt{ss - aa}} \times ds. \text{ Donc } POP =$$

$$\frac{2ss - aa - 2ss + 2aa}{2\sqrt{ss - aa}} \times ds = \frac{aads}{2\sqrt{ss - aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}. \text{ Mais on vient}$$

$$\text{de trouver (art. I.) } dt = \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}, \text{ \& conséquemment}$$

$$\frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}. \text{ Donc } \frac{adt}{2} = POP, \text{ ou } dt = \frac{2}{a} \times POP; \text{ \&}$$

en intégrant, $t(AT) = \frac{2}{a} \times PAO = \frac{2 \times PAO}{AO}$, c'est-à-dire, les tems écoulés AT en raison des secteurs hyperboliques PAO correspondans, ainsi que M. Newton l'a aussi démontré à sa manière dans ses Princ. Mathem. Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. pag. 258. & 259.

III. De plus la précédente supposition (art. I.) de $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$ donnant $u = \frac{a}{s} \sqrt{ss - aa}$, l'on aura $a(AO)$.

$u(TU) :: s(OQ) \cdot \sqrt{ss - aa} (QP) :: AO \cdot AG$. Et par conséquent $TU(u) = AG$.

IV. Donc (art. 2. & 3.) si l'on prend $AT(t) = \frac{2 \times PAO}{AO}$ & qu'on acheve le rectangle GT , son angle U sera un des points de la Courbe cherchée HUC des vitesses restantes (u); & ainsi de tous ses autres points à l'infini. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Cette Courbe HUC des vitesses restantes (u), ainsi construite, servira comme dans l'art. 5. de la Solut. 1. à construire la Courbe ARC des résistances totales (r), &c.

COROLLAIRE. XIII.

Il suit de cette Solut. 2. que lorsque $OQ(s) = OA(a)$ rend $QP(\sqrt{ss-aa}) = 0$, & conséquemment aussi $PAO = 0$, il en doit résulter non-seulement $t\left(\frac{2 \times PAO}{AO}\right) = 0$, mais encore $u\left(\frac{a}{s}\sqrt{ss-aa}\right) = 0$: c'est-à-dire, $AT(t) = 0$, & $TU(u) = 0$. Par conséquent la Courbe HUC des vitesses actuelles ou restantes (u) doit ici passer par A , ainsi qu'on l'a déjà vu dans l'art. 4. de la Solut. 1. & dans l'art. 2. du Lem. 1. pour tous les mouvemens dont les primitifs commencent, comme ici, à zero de vitesses; ce qui se voit sans calcul pour quelque hypothèse de résistances que ce soit, en ce que les vitesses restantes n'y sont que les restes des primitives qui au premier instant du mouvement, ne sont point encore diminuées.

COROLLAIRE XIV.

Si l'on prend $AB = AO(a)$, on sçait que la droite OBC sera une des asymptotes de l'hyperbole équilatère APC ; & qu'ainsi OP ne pouvant jamais couper AB par delà B , l'ordonnée $TU(AG)$ ne peut jamais être plus grande que AB , à l'égalité de laquelle elle approchera toujours sans jamais y arriver que lorsque le triline hyperbolique PAO fera infini, c'est-à-dire seulement lorsque AQ & (Solut. 2. art. 2.) AT le feront. D'où l'on voit encore que BC parallèle à ATC , doit être ici une asymptote de la Courbe AUC des vitesses actuelles ou restan-

tes TU (u) des primitives TV (v), ainsi qu'on l'a déjà vu dans le Corol. 1. & dans l'art 5. du Corol. 10. De-là suivent encore les Corol 2. & 5.

COROLLAIRE XV.

Puisque (*hyp.*) TV exprime ici la vitesse primitive du mobile à la fin du tems AT , c'est-à-dire, ce que la pesanteur constante de ce mobile lui en auroit donné de verticale de haut en bas pendant ce tems AT dans un milieu sans résistance ni action; & que (*Solut. 1.2.*) TU exprime de même ce que la résistance supposée du milieu où ce corps est supposé se mouvoir ici, lui laisse de cette vitesse primitive à la fin de ce même tems AT ; cette vitesse restante TU sera à cette primitive $TV :: TU . TV$ (à cause que la seconde hypothèse de ce Problème-ci donne

$$TV = AT) :: TU . AT. \text{ Mais (Solut. 2. art.) } AT = \frac{2 \times PAO}{AO}.$$

Donc chaque vitesse restante TU sera ici à la primitive correspondante $TV :: TU . \frac{2 \times APO}{AO}$ (la Solut. 2. art. 3. donnant

$$AG = TU) :: AG . \frac{2 \times PAO}{AO} :: \frac{AG \times AO}{2} . PAO :: GAO . PAO :$$

C'est-à-dire, comme triangle rectiligne GAO est au secteur hyperbolique PAO correspondant, ainsi que M. Newton l'a aussi démontré à sa manière dans le Corol. 3. Prop. 9. Sect. 2. pag. 259. de ses Principes Mathématiques.

COROLLAIRE XVI.

Il suit encore des Solut. 1. & 2. que le tems qu'il faudroit à la pesanteur constante du corps mû verticalement de haut en bas, pour lui donner dans un milieu sans résistance & sans action, une vitesse égale à la plus grande AB qu'il puisse (*Corol. 1. & 14.*) jamais lui donner dans un milieu qui (comme ici) lui résisteroit en raison des quarrés des vitesses de ce corps: il suit, dis-je, que ce tems seroit à ce qu'il en faudroit à cette pesanteur pour donner à ce même corps la vitesse TU ou

(*Solut. 2. art. 3.*) AG malgré les résistances de ce dernier milieu :: $AB. AT$ (*Solut. 2. art. 2.*) :: $AB. \frac{2 \times PAO}{AO} :: \frac{AB \times AO}{2}$.
 $PAO :: BAO. PAO$. c'est-à-dire, comme le triangle rectiligne BAO est au secteur hyperbolique PAO .

COROLLAIRE XVII.

I. Puisque (*Solut. 2. art. 1.*) $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa - \frac{a^4}{ss}$, l'on aura $u du = \frac{aas^3 - aas^3 + a^4s}{s^4} \times ds = \frac{a^4 ds}{s^3}$; & par conséquent $\frac{aau du}{aa - uu} = \frac{a^6 ds}{s^3} \times \frac{ss}{a^4} = \frac{aads}{s}$. Mais (*Solut. 1. art. 2.*) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$, ou $dt = \frac{aau du}{aa - uu}$, & conséquemment aussi $u dt = \frac{aau du}{aa - uu}$. Donc $u dt = \frac{aads}{s}$, & (en intégrant) $\int u dt = \int \frac{aads}{s} = aa \times ls + q$. Mais le cas de $\int u dt$ (ATU) = 0, rendant P en A , & conséquemment $0Q$ (s) = OA (a), réduit cette intégrale à $0 = aa \times la + q$, d'où résulte $q = -aa \times la$. Donc cette intégrale complète sera ATU ($\int u dt$) = $aa \times ls - aa \times la = aa \times l \frac{s}{a}$; ce qui se réduit à $ATU = ls$ en prenant a pour l'unité. Donc (*Lem. 2.*) les espaces parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2 \times PAO}{AO}$, doivent être ici comme les $aa \times l \frac{s}{a}$, ou simplement comme les $l \frac{s}{a}$ correspondantes : c'est-à-dire (*Solut. 2. art. 1.*) comme les Logarithmes des fractions ou des raisons $\frac{0Q}{OA}$ correspondantes, quelle que soit la valeur de la constante OA (a); ou simplement comme les logarithmes des abscisses $0Q$, lorsqu'on prend OA pour l'unité.

II. Si l'on considère présentement que l'équation $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$ de l'art. 1. de la *Solut. 2.* donne $s = \frac{aa}{\sqrt{aa - uu}}$, on trouvera par la substitution de cette valeur de s dans $aa \times l \frac{s}{a}$, que les espaces ici parcourus pendant les tems

AT

AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2 \times PAO}{AO}$, seront aussi entr'eux (*art. 1.*) en raison des grandeurs correspondantes $aa \times \sqrt[3]{\frac{a}{aa-uu}}$, ou simplement (à cause de a constante) en raison des Logarithmes $\sqrt[3]{\frac{a}{aa-uu}}$ correspondans : De sorte qu'en prenant encore ici a pour l'unité, cette supposition rendant $\sqrt[3]{\frac{a}{aa-uu}} = \sqrt[3]{\frac{1}{aa-uu}} = l1 - \sqrt[3]{aa-uu} = 0 - \sqrt[3]{aa-uu} = -\sqrt[3]{aa-uu}$; ces espaces se trouveront pareillement ici être entr'eux en raison des Logarithmes négatifs $-\sqrt[3]{aa-uu}$ correspondans, ainsi que dans l'art. 2. du Corol. 6.

COROLLAIRE XVIII.

Il suit encore de la *Solut. 2.* que si après avoir pris (sur AB) AZ troisième proportionnelle à AB , AG ; & Az troisième proportionnelle à AB , Ag ; en sorte qu'on ait $AB \times AZ = AG \times AG$, $AB \times Az = Ag \times Ag$, & par tout de même; on imagine une seconde hyperbole équilatère quelconque $MY\phi$ entre les asymptotes orthogonales AB , $B\phi$, laquelle rencontre AO en M , & ses parallèles ZT , zy , en T , y ; & de plus Op rencontrée en L par QP prolongée de ce côté-là : L'on aura les aires hyperboliques $AZTM$ en raison des espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ correspondans, ainsi qu'on l'a déjà conclu de la *Solut. 1.* dans le Corol. 9.

10. Car aiant ici $POP = POL$, l'on aura aussi POP . $GOG :: POL$. $GOG :: OP \times OP$. $OG \times OG :: OQ \times OQ$. $OA \times OA :: PQ \times PQ$. $AG \times AG$. Mais l'analogie de $OQ \times OQ$. $OA \times OA :: PQ \times PQ$. $AG \times AG$. donnant $OQ \times OQ$. $PQ \times PQ :: OA \times OA$. $AG \times AG$. donne aussi $OQ \times OQ - PQ \times PQ$. $PQ \times PQ :: OA \times OA - AG \times AG$. $AG \times AG$. ou $PQ \times PQ$. $AG \times AG :: OQ \times OQ - PQ \times PQ$. $OA \times OA - AG \times AG$. Donc POP . $GOG :: OQ \times OQ - PQ \times PQ$. $OA \times OA - AG \times AG$. Mais l'hyperbole APC , qui donne $PQ \times PQ = OQ \times OQ - OA \times OA$, donne aussi $OA \times OA = OQ \times OQ - PQ \times PQ$.

& l'on avoit cy-dessus (*hyp.*) $AG \times AG = AB \times AZ$. Donc $POp \cdot GOg :: OA \times OA - AB \times AZ$ (à cause de $OA = AB$ suivant le Corol. 14.) :: $AB \times AB - AB \times AZ :: AB \cdot AB - AZ :: AB \cdot BZ$. Mais le triangle rectangle $GOg = \frac{OA \times Gg}{2} = \frac{AB \times Gg}{2}$. Donc $POp \cdot \frac{AB \times Gg}{2} :: AB \cdot$

BZ . Par conséquent $POp = \frac{AB \times AB \times Gg}{2 \times BZ}$. Mais l'hyperbole $MY\phi$ donnant $BZ \times ZY = AB \times AM$, donne aussi $BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$. Donc $POp = \frac{AB \times ZY \times Gg}{2 \times AM}$; & par conséquent aussi $\frac{ZY \times Gg}{AM} = \frac{2 \times POp}{AB} = \frac{2 \times POp}{AO}$ (*Solut. 2. art. 2.*) = dt .

2°. Mais puisque (*hyp.*) $AB \times AZ = AG \times AG$, la différentiation de cette égalité donnera $AB \times Zz = AG \times Gg$, d'où résulte $Gg = \frac{AB \times Zz}{2 \times AG}$. Donc (*nombr. 1.*) $POp = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times M \times AG}$, ou $AG = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times AM \times POp} = \frac{AB \times AB \times Zz \cdot Y}{4 \times AM \times POp}$: c'est-à-dire, les vitesses restantes instantanées AG ou $TU(u)$ en raison des fractions correspondantes $\frac{Zz \cdot Y}{POp}$, à cause de la fraction constante $\frac{AB \times AB}{4 \times AM}$: ou bien aussi comme les correspondantes $\frac{AB \times Zz \cdot Y}{2 \times POp}$, c'est-à-dire (la *Solut. 2. art. 2.* donnant $dt = \frac{2 \times POp}{AB} = \frac{2 \times POp}{AB}$) comme les fractions correspondantes $\frac{Zz \cdot Y}{dt}$.

3°. Or ces mêmes vitesses sont aussi comme les fractions des espaces qu'elles font parcourir, divisés chacun par l'instant (dt) qui y est employé. Donc l'aire hyperbolique élémentaire $ZzyY$ fera aussi comme l'espace parcouru de la vitesse AG ou $TU(u)$ pendant l'instant dt ($\frac{2 \times POp}{AO}$) correspondant; & par tout de même. Donc (en intégrant) les sommes $AzyM$ ou $AZYM$ de ces petites aires $ZzyY$, doivent être ici par tout proportionnelles aux sommes (*sudt*) des vitesses (u) qui se sont successivement trouvées dans tous les instans des tems AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ (t). Donc aussi (*Lem. 2.*) les

espaces parcourus pendant ces mêmes tems $AT \left(\frac{2 \times PAO}{AO} \right)$ en vertu des vitesses AG ou TU successivement restantes des primitives supposées TV à chaque instant de ces tems, doivent être entr'eux comme les aires hyperboliques $AZYM$ correspondantes, ainsi que l'Analyse l'a aussi fait voir dans le Corol. 9.

COROLLAIRE XIX.

I. Puisque (Corol. 18.) les $AZ, Az, &c.$ sont entr'elles comme les quarrés $AG \times AG, Ag \times Ag, &c.$ des vitesses (Solut. 2. art. 3.) restantes ou actuelles (u), & que (hyp.) les résistances instantanées (dr) sont pareillement ici entr'elles comme ces quarrés de vitesses; $AZ, Az, &c.$ seront aussi entr'elles comme ces résistances instantanées conformément au nomb. 3. du Schol. de la Solut. 1. Donc en prenant ces AZ pour ces résistances, l'on aura AB , pour la plus grande ce qu'il y en a ici de possibles: puisque (Corol. 2. & 14.) AB est aussi la plus grande des vitesses ici possibles $AG (TU)$, aux quarrés desquelles ces résistances instantanées sont (hyp.) proportionnelles, & que l'analogie $AB. AG :: AG. AZ$. supposée au commencement du Corol. 18. donne $AZ = AB$ dans le cas de $AG = AB$. Mais en ce cas de la plus grande AB des vitesses AG , à laquelle répond aussi la plus grande AB des résistances AZ , la pesanteur du mobile doit être égale à cette plus grande résistance AB : autrement leur inégalité augmenteroit ou diminueroit la vitesse AB ; ce qui est également impossible suivant les Corol. 2. & 14. Donc en prenant ici les AZ pour les résistances instantanées (dr), l'on aura aussi AB pour la pesanteur constante du corps mû malgré elles en ligne droite de haut en bas en vertu de cette pesanteur laquelle est de même genre que ces résistances; & cette même pesanteur les devant surmonter chacune à chaque instant de l'excès BZ dont elle surpasse chacune d'elles, l'on aura pareillement BZ pour ce qui doit rester de force à cette pesanteur à la fin du tems AT pour augmenter la vitesse

AG (u) d'une quantité infiniment petite Gg (du) laquelle augmentera aussi la résistance AZ d'une quantité Zz infiniment petite par rapport à cette résistance. Donc BZ , Bz , &c. seront ici les restes agissans de la pesanteur AB à la fin des tems AT , At , &c.

II. On voit de là qu'en exprimant (*Corol. 9. & 18.*) les espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2}{a} \times PAO$, par les aires hyperboliques $AZYM$; la vitesse restante du mobile à la fin de ces tems ou de ces espaces, sa vitesse terminale, la résistance du milieu à la fin de ces mêmes tems ou espaces la pesanteur du mobile, & l'excès ou différence de force dont cette pesanteur surpasse cette résistance, pourront être exprimées de même par les lignes AG , AB , AZ , AB , BZ . De sorte que trois quelconques des deux espèces de grandeurs qu'elles expriment, étant données, pourvu que ce ne soient pas les trois dernières, l'analogie $AB . AG :: AG . AZ$. des *Corol. 9. & 18.* donnera toujours les deux autres; & même deux seulement des trois dernières étant données à volonté, l'on aura toujours la troisième d'entr'elles. Ceci comprend les *Corol. 1. 2. 3. pag. 296.* des *Princ. Math.* de M. Newton.

III. Si l'on imagine présentement chacune des aires hyperboliques $AzyM$, &c. divisée en parties égales quelconques $AZYM$, $ZzyY$, &c. parallèlement à $B\phi$: c'est à-dire (*Corol. 9. & 18.*) les espaces ici parcourus pendant des tems At , &c. divisés chacun en parties égales quelconques, les BZ , Bz , &c. seront en progression géométrique. Donc (*art. 1. & 2.*) les forces (BZ , Bz , &c.) restantes de la pesanteur (AB) diminuée à chaque instant de la valeur de celle des résistances (AZ , Az , &c.) qu'elle a pour lors à surmonter, seront aussi en progression géométrique à la fin des parties égales de chacun des espaces parcourus pendant les tems correspondans AT , At , &c. ainsi que M. Newton l'a aussi trouvé dans sa *Prop. 8. pag. 254. & 255.* de ses *Princ. Math.*

IV. On voit de-là, que si l'on prenoit ces restes BZ , Bz , &c. de pesanteur, pour des nombres, dont le plus grand AB , qui (*art. 1. & 2.*) exprimeroit cette pesanteur entiere du corps en question, fût pris pour l'unité; les espaces ici parcourus pendant les tems AT , At , &c. correspondans, en seroient les Logarithmes négatifs. D'où l'on voit aussi que si (*fig. 9.*) l'on exprimoit ces espaces par les abscisses BD de l'asymptote BC (parallele à ATC) d'une Logarithmique AMC d'une souîtangente $= AB = 1$, lesquelles fussent prises du côté C qu'elle s'en approche, depuis l'Ordonnée AB ; les autres Ordonnées extérieures DM correspodantes aux abscisses BD , y exprimeroient les restes de pesanteur du mobile à la fin de ces espaces, c'est-à-dire, les excès dont sa pesanteur surpasseroit alors les résistances qui s'y opposeroient; & les Ordonnées intérieures NM , ces résistances mêmes:

V. Cela étant, & cette Logarithmique AMC d'une souîtangente $= AB = 1$, étant ainsi ajoutée à la Courbe AUC (*Solut. 1. art. 4. & Corol. 13.*) des vitesses restantes^(u), & sur la même asymptote BC qu'elle; si l'on mène une Ordonnée quelconque TU de cette Courbe AUC ; qu'on fasse UG parallele à TA , & qui rencontre AB en G ; qu'on prenne AZ troisième proportionnelle à AB , AG ; qu'on fasse ZM parallele à ATC , & qui rencontre la Logarithmique AMC en M ; & qu'on mène par ce point M la droite DN parallele à AB , & qui rencontre perpendiculairement en N , D , les paralleles ATC , BC : il est visible.

1^o. Qu'en prenant, par exemple, AT pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois TU ou AG (*Solut. 1. & 2.*) pour les vitesses restantes à la fin de ces tems malgré les résistances supposées; BD ou AN (*art. 3. & 4.*) pour les espaces parcourus en vertu de ces vitesses TU pendant ces mêmes tems AT ; AZ ou NM (*art. 1.*) pour les résistances qui s'y opposent à la fin de ces espaces BD ou de ces tems AT ; AB ou ND (*art. 1.*) pour la pesanteur du mobile; BZ ou DM (*art. 2. & 3.*) pour les excès dont cette pe-

fanteur AB surpasse chacune des résistances AZ à la fin des tems AT , c'est-à-dire, pour ce qui reste alors de force à cette pesanteur pour accélérer le mobile.

2°. Il est pareillement visible que si au lieu de prendre AT pour les tems écoulés, l'on eût pris à volonté quelque une des autres grandeurs TU , BD , NM , DM , AB , &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. L'on auroit trouvé de même que les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, sont ici comme le AT correspondantes, & tout le reste comme dans ce nomb. 1. Ce détail est présentement trop aisé pour nous y arrêter davantage.

COROLLAIRE XX.

FIG. VII. I. La même chose peut encore se conclure de la Solut. 1.

Car puisque l'art. 2. de cette Solution donne $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$,

l'on aura ici $udt = \frac{aauu}{aa-uu}$, ou $mudt = \frac{maauu}{aa-uu}$. Donc en faisant $mudt$ constante, quelque nombre fini que m puisse exprimer; c'est-à-dire, en prenant ces parties $mudt$ de l'espace $fudt(ATU)$ ici parcouru (*Lem. 2.*) pendant un tems AT quelconque, par tout égales entr'elles; les fractions correspondantes $\frac{udu}{aa-uu}$ seront aussi constantes, puisque m , a , sont

supposées l'être. Par conséquent les $aa-uu$ ou $a - \frac{uu}{a}$ correspondantes seront alors en progression géométrique. Mais suivant le nomb. 3. de la Remarq. 2. qui suit le Corol. 11. la pesanteur du mobile sera ici à la différence ou à l'excès de force dont elle surpassera la résistance du milieu à chaque instant, c'est-à-dire, à ce que cette résistance instantanée laissera pour lors de force à cette pesanteur pour augmenter la vitesse du mobile :: aa , $aa-uu$:: a , $a - \frac{uu}{a}$. De sorte qu'en prenant (comme l'on vient de faire dans l'art. 1. du Corol. 19.) $AB(a)$ pour cette pesanteur, l'on aura ici $a - \frac{uu}{a}$, c'est-à-dire (*Corol. 9.*) BZ , pour ce qui lui reste de force à chaque instant correspondant nonobstant

la résistance supposée. Donc les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t), étant divisés en parties égales aussi quelconques, ces restes BZ de force ou de pesanteur à la fin de chacune de ces parties, seront en progression géométrique, ainsi que dans l'art. 3. du Corol. 19. D'où suivent aussi les art. 4. & 5. de ce même Corol. 19.

II. Cela se peut encore déduire de la Solut. 1. sans le secours de la Remarq. 2. qu'on en vient de citer. Car puisque mut constante (*hyp.*) aussi-bien que maa dans l'équation $mut = \frac{maadu}{aa-uu}$ résultante de celle $\frac{dz}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ de l'art. 2.

de la Solut. 1. rend (*art. 1.*) $aa-uu$ ou $a - \frac{uu}{a}$ en progression géométrique, dont a exprime ici la pesanteur absolue du mobile; & $\frac{uu}{a}$ (*Schol. nomb. 3.*) la résistance que lui fait à chaque instant le milieu où il tombe; cette difference ou ce reste $a - \frac{uu}{a}$ (BZ) de pesanteur doit être ici en progression géométrique à la fin des parties égales mut de l'espace $sudt$ (ATU) parcouru (*Lem. 2.*) en vertu de ces restes de force ou de pesanteur pendant le tems AT , ainsi que dans le précédent art. 1. & que dans l'art. 3. du Corol. 19. d'où suivent encore les art. 4. & 5. de ce Corol. 19.

COROLLAIRE XXI.

Puisque (*Corol. 19. art. 1. Corol. 20. art. 1. 2.*) BZ ($a - \frac{uu}{a}$) est ce qui reste de force à la pesanteur absolue AB (a) pour produire à chaque instant l'augmentation (du) de la vitesse AG ou TU (u) restante alors malgré la résistance AZ ($\frac{uu}{a}$) du milieu qui s'y oppose, il est visible que lorsque cette résistance instantanée sera égale à cette pesanteur absolue, c'est-à-dire, lorsque $AZ = AB$, il n'y aura plus ici du tout d'augmentation de vitesse. Ainsi AG pour lors aussi égale à AB , donnera cette même AB (a) pour la plus grande des vitesses (u) que le mobile puisse acquérir ici pendant le tems AT (t) qui pour lors sera infini, ainsi qu'on l'a déjà vû dans les

224 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 Corol. 2. & 14. & l'aire hyperbolique $AZYM$ alors égale
 à $\phi YMAE\phi$, fait voir (Corol. 9. & 18.) que l'espace ici par-
 couru pendant ce tems infini, seroit pareillement infini,
 ainsi qu'on l'a déjà vû dans les Corol. 6. 7. & qu'il suit en-
 core des Corol. 8. 9. 17. 18.

COROLLAIRE XXII.

De ce que (Corol. 19. art 1. & Corol. 21.) la plus grande
 des résistances instantanées AZ ici possibles est égale
 à la pesanteur absoluë AB du corps tombant en ver-
 tu de cette pesanteur malgré ces résistances, & que
 (Corol. 2. & 14.) la vitesse AG est à la plus grande que ce
 corps puisse acquérir ici : : $AG . AB$. On voit que de ces
 cinq choses dans l'hypothèse des résistances en raison
 des quarrés des vitesses: *Pesanteur absoluë AB ou plus gran-
 de AB des résistances instantanées, plus grande AB des vi-
 tesses ici impossibles, une quelconque AG d'entr'elles, la
 résistance instantanée AZ qui s'y oppose, & le reste BZ de
 pesanteur qui l'augmente: trois étant données à volonté,
 l'on aura toujous les deux autres, ainsi que dans le nomb.
 4. de la Remarq. 2. qui suit le Corol. 12.*

COROLLAIRE XXIII.

Puisqu'en général chaque vitesse instantanée ne con-
 siste que dans le rapport de l'espace parcouru en vertu
 de cette vitesse, à l'instant employé à le parcourir, l'on
 aura (Corol. 18. nomb. 3.) les vitesses $AG(u)$ en raison des
 fractions $\frac{ZY \times Zz}{dt}$ correspondantes (conformément au Co-
 rol. 18. nomb. 2.) ou les instans $dt(Tt)$ en raison des
 fractions $\frac{ZY \times Zz}{AG}$ pareillement correspondantes. Mais (Corol.
 18. nomb. 2.) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, d'où résulte $Zz = \frac{2AG \times Gg}{AB}$;
 & l'hyperbole $MY\phi$ donne $BZ \times ZY = AB \times AM$, ou
 $ZY = \frac{AB \times AM}{BZ}$. Donc en substituant ces valeurs de ZY, Zz
 dans l'expression précédente $\frac{ZY \times Zz}{AG}$ des instans $dt(Tt)$, il
 en résultera une autre fraction $\frac{2 \times AM \times Gg}{BZ}$ qui fera aussi com-
 me ces mêmes instans. Donc $2 \times AM$ étant constante, ces
 instans

stans dt (Tt), qu'on a vû (*Solut. 2. art. 2.*) être entre eux comme les trilignes hyperboliques élémentaires Pop correspondans, seront pareillement ici entr'eux comme les fractions $\frac{Gg}{Bz}$ ou $\frac{Gg}{Bz}$ correspondantes; & conséquemment aussi (à cause de $ZY. AM :: AB. BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$. & de $AB \times AM$ constante) comme les $ZY \times Gg$ correspondans, ainsi que M. Newton l'a aussi trouvé dans le Corol. 4. de la Prop. 8. citée à la fin de l'art. 3. du Corol. 19.

COROLLAIRE XXIV.

Si presentement on suppose que l'axe transverse, jusqu'ici arbitraire, de l'hyperbole $MY\phi$, soit $= AB\sqrt{2}$, en sorte qu'elle ait ici $AM = \frac{1}{4} AB$, il suit encore du Corol. 18. que l'espace ici parcouru pendant quelque tems AT que ce soit, en vertu de la pesanteur constante d'un corps qui tombe verticalement dans le milieu supposé, ou plutôt en vertu de ce que les résistances de ce milieu, laissent de cette force à ce corps en chaque instant, est à l'espace que ce même corps parcourroit en même tems AT ou (*Solut. 2. art. 2.*) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ d'une vitesse uniforme égale à la plus grande AB que sa pesanteur lui puisse donner (*Corol. 2. & 14.*) malgré ces résistances: $AZYM. PAO$.

Car puisque (*Corol. 18. nomb. 2.*) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, l'on aura $2 \times AG. AB :: Zz. Gg$. ou (en multipliant les antecedens par ZY , & les conséquens par $\frac{1}{2} AO$) $2 \times AG \times ZY. \frac{1}{2} AO \times AB :: ZY \times Zz. \frac{1}{2} AO \times Gg :: Zz y Y. GOG$. Mais (*Corol. 18. nomb. 1.*) $BZ. AB :: GOG. Pop$. Donc (en multipliant par ordre) $Zz y Y. Pop :: 2 \times AG \times ZY \times BZ. \frac{1}{2} AO \times AB \times AB$ (à cause de $AO = AB$) :: $AG \times ZY \times BZ. \frac{1}{4} AB \times AB \times AB$ (à cause de $ZY \times BZ = AM \times AB$) :: $AG \times AM. \frac{1}{4} AB \times AB$ (à cause qu'on suppose ici $AM = \frac{1}{4} AB$) :: $AG. AB$. C'est à dire les aires hyperboliques élémentaires $Zz y Y, Pop$, par tout entr'elles comme (*Solut. 2. art. 3.*) les vitesses correspondantes AG (u , AB (a)). Donc les espaces parcourus en vertu de ces vitesses pendant un même instant quelconque

Tt , étant entr'eux comme ces mêmes vitesses; ces espaces seront pareillement ici entr'eux :: $ZzyT$. *Pop*. Donc aussi le premier de ces espaces parcouru de la vitesse restante AG ou TU (u) pendant l'instant Tt , étant (*Corol.* 18. *nombr.* 3.) comme l'aire élémentaire hyperbolique $ZzyT$, si l'on prend cette aire infiniment petite pour cet espace instantanée, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique *Pop* correspondant pour l'espace parcouru de la vitesse AB (a) pendant le même instant Tt ; & par tout de même. Donc (en integrant) l'espace parcouru de la vitesse accélérée AG ou TU (u) pendant le tems AT (t) malgré les résistances supposées, sera à l'espace parcouru de la vitesse terminale uniforme AB (a) pendant le même tems :: $AZYM$. *PAO*. Et par tout ici de même. Ce qu'il falloit démontrer; & ce que M. Newton a aussi démontré à sa maniere dans ses princ. Math. Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. *Corol.* 1. pag. 259.

COROLLAIRE XXV.

Les deux derniers *Corol.* 23 & 24. font encore des suites presque immédiates des Analyses de la Solut. 1. & du *Corol.* 9. En effet.

I. L'art. 2. de la Solut. 1. donnant $\frac{dt}{a} = \frac{du}{a^2 - uu}$; l'on aura $dt = \frac{a du}{a^2 - uu} = \frac{a du}{a - \frac{uu}{a}}$ (à cause de $du = Gg$, $a = AB$, $\frac{uu}{a} = AZ$, $a - \frac{uu}{a} = BZ$) $= \frac{AB \times Gg}{BZ}$: c'est-à-dire (à cause de AB constante) les instans dt (Tt) en raison des fractions $\frac{Gg}{BZ}$ correspondantes, & conséquemment aussi (à cause de ZT . $AM :: AB \cdot BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$, & de $AB \times AM$ constante) comme les $ZY \times Gg$ correspondans, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le *Corol.* 23.

II. En appelant les variables AZ , m ; ZT , n ; la constante AM , c ; & le reste comme dans le *Corol.* 9. la supposition qu'on fait ici (*Corol.* 18.) de $AB(a)$. $AG(u) :: AG(u)$.

$AZ(m)$. donnera ici $m = \frac{u u}{a}$, & $\frac{2acudu}{aa-uu} = ndm = Zzy\gamma$,
 comme dans ce Corol. 9. De plus l'art. 2. de la Solut. 2. donne
 $POp = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}} (Solut. 2. art. 1.) = \frac{r}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu}$. Donc
 $Zzy\gamma.POp :: \frac{2acudu}{aa-uu} : \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu} :: 2cu. \frac{1}{2} aa$. Donc en sup-
 posant ici $AM(c) = \frac{1}{4} AB (\frac{1}{4} a)$ comme dans le précédent
 Corol. 24. L'on y aura $Zzy\gamma.POp :: u.a :: AG.AB$. &c.
 ainsi que dans ce Corol. 24.

*Voilà pour les mouvemens primitivement accélérés en rai-
 son des tems, en commençant à zero de vitesse, dans des
 milieux qui leur résisteroient en raison des quarrés de leurs
 vitesses effectives. On verra dans un autre Memoire ce qui
 devroit aussi arriver dans ces milieux à des mouvemens com-
 mençés par des vitesses quelconques, & ensuite accélérés de
 même primitivement en raison des tems écoulés.*

OBSERVATIONS

ET ANALYSES

DU CACHOU.

PAR M. BOULDU.

LE Cachou est une drogue qu'on nous apporte des
 Indes. Nous ne le connoissons que superficiellement,
 sans avoir pû jusqu'à présent sçavoir au vrai ce que c'est.
 L'on a d'abord voulu, au rapport de quelques Voïageurs,
 nous persuader, que c'étoit une terre qui se trouvoit au
 Japon; ce qui a donné lieu à ceux qui ont écrit de la
 Matière medicale, de le mettre dans la classe des Ter-
 res, sous le nom de *Terra Japonica*, d'où ils on prétendu
 qu'on la tiroit. Ceux qui depuis l'ont examiné de plus
 près, & qui en ont écrit, ont avec raison réfuté cette opi-

1709.
19. Juin.

nion. Ils ont prétendu que le Cachou étoit un suc épais d'une ou de plusieurs plantes. Quelques recherches que j'aie faite jusqu'à présent pour en découvrir la vérité, je n'ai rien appris de plus que ce qui en est écrit dans les Ephemerides d'Allemagne, & ailleurs; car les uns veulent que ce soit l'extrait du suc d'une seule Plante; d'autres, de plusieurs; & d'autres au contraire, que ce soit l'extrait du suc du fruit d'un grand arbre du même nom, qui croît en l'Isle de Sumatra, d'où on l'apporte au Japon. Comme je ne peux rien dire de nouveau sur la nature du Cachou, que ce que les Modernes en ont écrit, je ne m'étendrai pas davantage sur ces différentes opinions, je m'en tiendrai à la plus probable.

Les expériences & les différentes analyses que j'ai faites de ce mixte, me confirment que c'est un suc épais de vegetal, & de fait si c'étoit une terre, comme on l'a voulu dire d'abord, elle feroit comme toutes les autres terres un limon dans l'humidité, au lieu que le Cachou s'y dissout entierement, à quelques parties grossieres près, non-seulement dans les liqueurs aqueuses, mais encore dans les spiritueuses, comme je le vais dire.

Je ne crois pas, comme M. Lemery le dit dans son Traité des drogues, qu'il y ait de deux sortes de Cachou: Je demeurerai bien d'accord avec lui, que lorsqu'on le brise en morceaux il s'en trouve de différentes couleurs & de différentes consistences: que les uns se trouvent en dedans d'un rouge brun, luisans & compacts, les autres au contraire se trouvent plus legers, d'un rouge pâle comme de couleur de chair; ce dernier Cachou étant gratté avec l'ongle, se met aisément en poussiere, & fait dans la bouche un limon très-désagréable avant de s'y fondre; ce que ne fait point l'autre, qui au contraire s'y étend; & s'y dissout peu à peu. Je crois plutôt que cette difference vient seulement du défaut de préparation; que dans l'un on a eu soin d'en bien dépurer les sucs dont on le prépare, & d'en séparer exactement les résidues, que nous appellons fécules, ce qu'on a négligé de faire

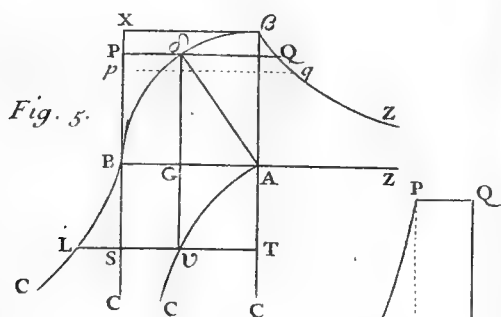
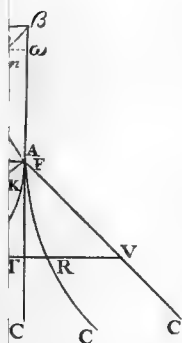
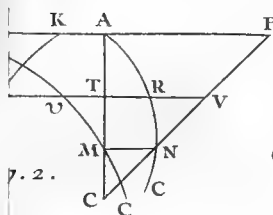
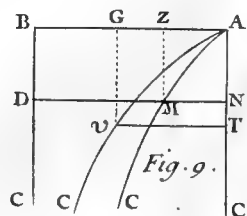
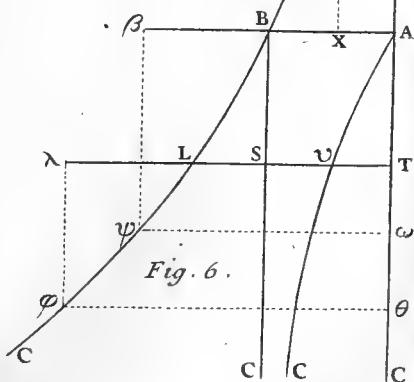
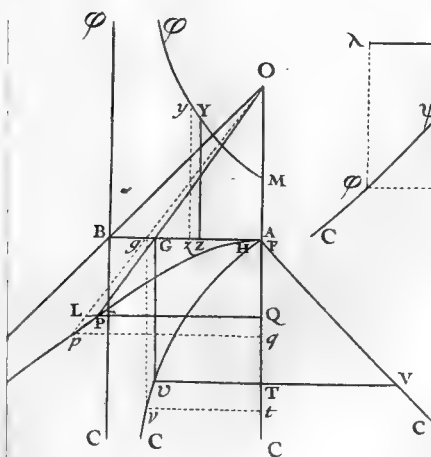
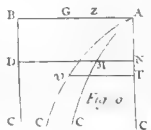
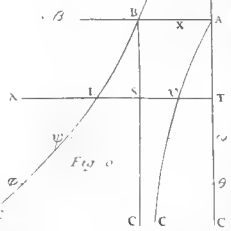
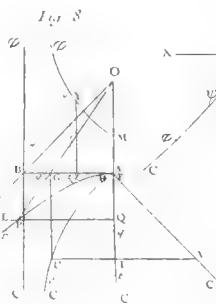
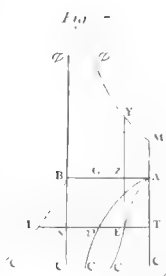
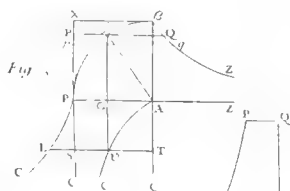
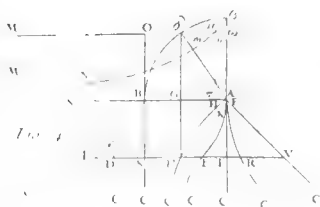


Fig. 8.





à l'autre ; cette considération n'est pas de grande conséquence ; car il est très-facile de choisir le meilleur , qui est , comme il le dit fort bien , le plus pesant , le plus luisant , & d'un rouge brun foncé.

Quant aux Analyses que j'en ai faites , je l'ai d'abord distillé à la cornuë au feu de reverbere clos , avec un intermede , pour faciliter l'élévation de ses principes ou des différentes parties qui le composent ; car autrement étant un suc épaissi & par conséquent visqueux , il se gonfleroit seulement , se rarefieroit & casseroit les vaisseaux.

J'en ai tiré comme de semblables matieres , un peu de flegme , un esprit acide , beaucoup d'huile épaisse & brune en couleur , mêlée de quelques gouttes d'esprit urineux , ce que j'ai remarqué par les essais ordinaires.

De quatre onces que j'avois mis dans la cornuë , le *caput mortuum* après la distillation ne s'est plus trouvé peser qu'un once , dont j'ai tiré après une forte calcination , douze grains de sel lixiviel.

Par cette distillation il est évident que le Cachou n'est point une terre mais un suc épaissi , on en fera encore plus certain par les différentes dissolutions que j'en vais rapporter.

J'ai dissous quatre onces de Cachou bien conditionné dans 24 onces d'eau , à chaleur modérée , il m'a paru d'abord entierement dissous , hors quelque parties grossieres qui se trouvent assez souvent dans ces sortes d'extraits : la dissolution en étoit d'un très-beau rouge foncé & très-claire ; l'ayant laissée reposer & refroidir , pour en séparer les fèces , j'ai été surpris de trouver cette dissolution prise en forme de mûssilage , d'un rouge couleur de chair , sans liaison , & qui paroissoit comme du bol très-fin , détrempé dans de l'eau ; j'ai donc été obligé d'y ajouter , sur un feu modéré , une suffisante quantité d'eau , pour en étendre davantage les parties ; de cette maniere il ne s'est plus fait de coagulation ou très-peu , en sorte que j'ai pû filtrer cette dissolution par le papier gris : je l'ai ensuite évaporée à une chaleur très-lente en consi-

130 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
stence d'extrait aussi sec que l'est ordinairement le Cachou.

J'ai remarqué que du soir au matin cette dissolution qui n'étoit encore qu'à demi évaporée, s'est encore coagulée comme elle l'avoit été la premiere fois ; il n'y avoit donc que la grande quantité de liqueur qui tenoit cette dissolution en fleur ; ce qui nous marque que les suc dont on fait cet extrait sont sans doute très visqueux & très mussilagineux, l'on pourroit croire aussi que ce sont les sels essentiels qui sont en abondance dans ce suc épais qui en condensent ainsi le peu de parties resineuses qu'il contient , à mesure que la dissolution se refroidit.

J'ai retiré de ces 4 onces de Cachou ainsi préparé, deux onces trois dragmes d'extrait très beau & bien sec.

Je n'ai point trouvé cet extrait different au goût du Cachou ordinaire & tel qu'on nous l'apporte, si ce n'est que ce premier s'étend plus agréablement sur la langue, qu'on n'y sent point sous la dent de gravier ou autres parties terrestres , & qu'il est ce me semble , plus agreable & moins acérbe.

Le residu de ces quatre onces de Cachou , que l'eau n'a pû dissoudre , & qui probablement en étoit la partie resineuse & les terrestreitez , ne s'est plus trouvé peser qu'une once , dont j'ai tiré encore cinq dragmes d'extrait avec l'esprit de vin rectifié.

Ce dernier extrait est beaucoup plus lié & plus onctueux que le premier , mais le goût en est bien moins délicat & plus aspre , ne laissant pas sur la langue une douceur si agreable.

Les parties grossieres de ces 4 onces de Cachou , que l'eau & l'esprit de vin n'ont pû dissoudre se sont trouvées peser deux dragmes , sans aucune qualité , si ce n'est une legere impression de stipticité.

J'ai encore dissous quatre onces de Cachou naturel dans suffisante quantité d'esprit de vin , comme en premier lieu, je l'avois dissous avec l'eau : j'en ai versé dessus, autant & autant de fois qu'il en a fallu pour en tirer tou-

re la teinture par une chaleur modérée & en vaisseaux convenables , la teinture s'en est trouvée plus vive & d'un plus beau rouge que celle que j'avois faite & préparée avec l'eau ; mais ce qu'il y a de particulier dans cette dissolution faite avec l'esprit de vin , c'est qu'il ne s'est point fait de coagulation , comme il s'en est fait avec l'eau , quoique je n'y aie employé que peu d'esprit en comparaison de la quantité d'eau que j'avois employée au premier extrait. Après en avoir retiré l'esprit de vin par la distillation à la maniere ordinaire , les teintures préalablement bien filtrées & séparées de ce que l'esprit de vin n'a pû dissoudre , j'ai trouvé deux onces six dragmes d'un très-bel extrait , très-luisant , mais qui ne peut se dessécher comme celui fait avec l'eau : aussi est-il plus gras & plus onctueux , moins doux sur la langue , beaucoup plus aspre , & très-désagréable.

Le résidu de ces quatre onces de Cachou que l'esprit de vin n'a pû dissoudre , s'est trouvé peser neuf dragmes : ce résidu étoit plus blanchâtre & plus décoloré que ne l'étoit celui dont j'avois tiré l'extrait avec l'eau.

J'ai encore tiré de ce résidu avec suffisante quantité d'eau cinq dragmes d'un extrait très-rude & mal lié , de très-peu de goût & désagréable.

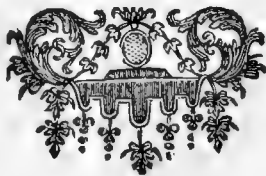
Nous voyons par ces différentes dissolutions que le Cachou se dissout dans l'esprit de vin aussi bien que dans l'eau , même qu'il se dissout dans l'esprit de vin en plus grande quantité , puisque je n'ai tiré par le dissolvant aqueux que deux onces trois dragmes d'extrait , & qu'avec l'esprit de vin j'en ai tiré deux onces six dragmes : aussi ai-je remarqué que ce qui est resté de Cachou après en avoir tiré la teinture avec l'esprit de vin , étoit presque sans qualité , & l'autre au contraire.

Outre ces différentes dissolutions , j'ai calciné dans un creuset & à grand feu une once de Cachou , ils'y est gonflé , a beaucoup bouillonné & s'est enfin réduit en cendres grises , au poids d'une dragme & demie , dont j'ai tiré par l'exiviation quelques grains de sel lexiviel qui a fermenté avec les acides.

Je finis mes observations sur le Cachou, par deux remarques que j'ai faites ; la premiere est que le Cachou crud, bien choisi & bien pur, tel qu'on nous l'apporte, est à préférer à toutes les différentes préparations qu'on a coûtume d'en faire ; & si quelque préparation lui peut convenir, la plus simple est la meilleure, qui est son entière dissolution dans l'eau, réduite ensuite en extrait bien solide, par le moïen de laquelle on le purifie & on le separe de ses parties terrestres & indissolubles, & de quelques petits graviers qu'il renferme ordinairement & qui fatiguent la dent lorsqu'on le mâche.

La seconde est, qu'outre les proprietéz que ceux qui en ont écrit lui attribuent, il est encore spécifique & souverain pour tous les maux de gorge ; l'usage est d'en laisser fondre dans la bouche un morceau de la grosseur d'un pois, le soir en se couchant.

Le Cachou se dissout dans l'eau sans se coaguler, si l'on joint à sa dissolution un peu de sel de tartre ou de quelque autre sel alkali, par ce moyen les parties resineuses qu'il contient s'étendent & se joignent aux parties salines ; mais cette addition est inutile, le Cachou renferme assez de parties salines pour étendre le peu de parties resineuses qu'il contient ; il n'y a, pour éviter cette petite coagulation, qu'à couler la dissolution encore chaude pour en separer les parties terrestres



COMPARAISON
DES OBSERVATIONS
DU BAROMETRE

Faites en differens lieux.

PAR M. MARALDI.

Pour parvenir à connoître la cause des Phénomènes que l'on remarque par le moien du Barometre, il ne suffit pas d'avoir des observations faites dans un seul endroit, il est nécessaire d'en faire aussi en differens païs, comparer ces observations ensemble, remarquer ce qu'elles ont de conforme, & les differens qui s'y rencontrent.

1709.
20 Juillet.

Sans un grand nombre de ces observations on est sujet à se tromper, en expliquant par des causes qui ne seroient propres qu'à un païs particulier, des phénomènes qui peuvent avoir des causes plus generales; & on pourroit considerer comme une propriété de toute la masse de l'air, ce qui ne lui convient que dans quelques circonstances, ou dans une certaine étendue de païs.

Plusieurs Scavans qui ont reconnu l'utilité qu'on pourroit tirer dans la Physique, des observations du Barometre, se sont appliquez depuis quelque tems à les faire en differens païs. M. le Marquis Salvago m'ayant communiqué celles qu'il avoit faites à Genes depuis trois ans, je les ai comparées avec les nôtres qui ont été faites en même tems à l'Observatoire. Dans la comparaison de ces observations nous y en avons trouvé qui ont quelque chose de particulier, & que j'ai crû devoir remarquer. Je rapporterai ensuite des expériences sur la dilatation de l'air faites proche de l'équinoxial, que j'ai eu occasion d'examiner.

1709.

G g

Dans les observations que M. le Marquis Salvago a faites à Genes, il s'est servi d'un Barometre simple divisé en pouces & en lignes du pied de Paris. Ce Barometre est situé dans un appartement où le mercure se tient une ligne plus bas qu'au bord de la mer, ainsi qu'il a été trouvé par l'observation; de sorte que si on veut réduire au niveau de la mer les observations de Genes, il faudra ajouter une ligne à chaque hauteur du mercure que je rapporterai dans la suite.

Dans le rapport de ces observations on ne suivra pas l'ordre du temps dans lequel elles ont été faites; mais je commencerai par les plus remarquables.

L'an 1707. à Paris depuis le 15. Novembre jusqu'au 18. le Barometre resta pendant quatre jours à la hauteur de 28 pouces à une demi-ligne près; le jour suivant 19 Novembre il descendit à 27 pouces 4 lignes, ayant baissé 8 lignes en 24 heures; le jour suivant il s'éleva de nouveau de dix lignes, s'étant trouvé le 20 Novembre à 28 pouces 2 lignes; pendant cette variation la constitution de l'air n'a point changé, le ciel ayant été tranquille & serein.

La même année 1707. à Genes depuis le 15 Novembre jusqu'au 18, le mercure resta à la hauteur de 28 pouces un peu plus, comme il avoit été les mêmes jours à Paris. Le jour suivant 19 Novembre à Genes le vent étant Sud, le Barometre étoit descendu à 27 pouces 5 lignes, ayant baissé en un jour de 7 lignes à Genes à peu près comme il fit le même jour à Paris. Il ne resta que ce jour-là dans la même situation; mais il s'éleva de nouveau le jour suivant à 28 pouces, & le 21 à 28 pouces 2 lignes, comme il étoit arrivé à Paris, le vent étoit tourné au Nord.

La même année 1707 depuis le 20 Novembre jusqu'au 28, le Barometre resta à Genes & à Paris presque toujours à 28. pouces une ligne. Pendant ces 8 jours à Paris le vent a été quelquefois à l'Oüest & quelquefois au Nord-Oüest; à Genes le vent étoit toujours Nord.

Le 30 Novembre à Paris le Barometre baissa à 27 pouces 0 lignes, le vent étant Nord-Oüest. Le premier de De-

cembre il s'éleva de nouveau à 27 pouces 10 lignes, le vent étant Oüest & le ciel serein; le jour suivant il s'éleva encore de deux lignes aïant été à 28 pouces; de sorte que à Paris depuis le 28 Novembre jusqu'au 30 il baissa en deux jours de plus d'un pouce, & du 30 Novembre au premier Decembre en 24 heures il s'éleva de 10 lignes.

Les mêmes variations à peu près sont aussi arrivées à Genes dans les mêmes jours. Par les observations de M. le Marquis Salvago depuis le 28 Novembre que le Barometre étoit à 28 pouces une ligne, il descendit le 30 à 27 pouces 4 lignes, aïant baissé de 9 lignes en deux jours, le vent étant Nord-Est; le jour suivant il s'éleva de 5 à 6 lignes un peu moins de ce qu'il avoit fait le même jour à Paris.

On voit par ces observations, qu'il arrive en peu de temps des grandes variations dans la hauteur du Barometre tant à Paris qu'à Genes, & qu'il y a une grande conformité dans ces variations qui sont arrivées en même tems en des païs aussi éloignez. On voit aussi qu'elles n'ont pas beaucoup de rapport avec les changemens des vents; car les variations du Barometre qui arriverent du 19 au 20 Novembre, se firent à Paris sans aucun changement remarquable de vent, & si ce jour là le Barometre baissa à Genes par un vent de Sud-Est, & s'éleva par un vent de Nord; dans la variation qui arriva le 28, le Mercure y baissa par le Nord-Est, vent qui pour l'ordinaire le fait monter. De même à Paris le Barometre y baissa par un vent de Nord-Oüest, & s'éleva par un vent d'Oüest par lequel il a coûtume de baisser. Mais quelle rapidité ne faudroit-il pas donner aux vents pour causer en même temps des changemens si prompts en des villes aussi éloignées?

Ce n'est pas seulement dans ces variations subites & qui arrivent fort rarement, que l'on trouve cette conformité; il y a encore le même accord dans les changemens du Barometre qui se font plus lentement, & qui arrivent en ces deux villes pendant toute l'année.

236 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Comme il seroit long de rapporter toutes les observations faites pendant les trois dernieres années dans lesquelles on trouve cet accord, j'ai fait un choix des plus remarquables.

L'an 1706. *Barometre. Vent.* *Barom. Vent.*

Le 1 Janvier à Paris 27 0 Sud. à Genes 27 3
Le 7 Janvier à Paris 28 0 tranquille. à Genes 28 0 $\frac{1}{2}$ Nord.

Depuis le 1 Janvier jusqu'au 7 dans l'intervalle de six jours le mercure s'éleva de 12 lignes à Paris, & de 9 & demi à Genes.

Le 13 Fevrier à Paris 27 3 Sud. à Genes 27 5 Sud-Est.
Le 19 Fevrier à Paris 28 1 tranquille. à Genes 27 11 $\frac{1}{2}$ Nord.

Depuis le 13 jusqu'au 19 en six jours le Barometre s'est élevé de 10 lignes à Paris, à Genes de six.

Le 31 Octob. à Paris 28 0 tranquille. à Genes 28 0 tranquille.
Le 4 Novemb. à Paris 26 9 S. E. pluie. à Genes 27 1 Sud-Ouest.
Le 20 Nov. à Paris 27 11 Sud. à Genes 28 1 Nord.

Par les observations du 31 Octobre & du 4 Novembre en 4 jours le Barometre baissa à Paris de 13 lignes; il baissa dans le même tems à Genes de 11 lignes, quoique les vens fussent differens. Le 20 Novembre le Barometre s'étoit élevé à une grande hauteur, étant la même à deux lignes près en ces deux villes, quoique le vent fût Sud à Paris, & Nord à Genes.

Le 10 Dec. à Paris 28 1 tranquille. à Genes 28 4 Nord.
Le 15 Dec. à Paris 27 1 Ouest. à Genes 27 5 Sud-Est.

Par ces observations le Barometre baissa en cinq jours environ un pouce à Paris & à Genes.

L'an 1707.

Le 13 Mars à Paris 27 11 Ouest. à Genes 28 0 Nord.
Le 17 Mars à Paris 27 5 Nord-Est. à Genes 27 8 Sud-Est.

En quatre jours le Barometre baissa de 6 lignes à Paris, & de 4 à Genes, quoique le vent fût fort different.

Le 20 Juillet à Paris 27 11 S. foible. à Genes 28 0 Nord foib.
Le 24 Juillet à Paris 27 4 $\frac{1}{2}$ Nord-O. à Genes 27 6 Sud-Est.

Le 20 Juillet les vens étant opposés à Paris & à Genes, le Barometre s'y trouva presque également élevé; il baissa

ensuite de six lignes de part & d'autre en quatre jours, les vens aiant changé & étant encore opposez, c'est à-dire, Nord-Ouest à Paris, & Sud-Est à Genes.

Le 22 Dec. à Paris 27 10 Sud-Ouest. à Genes 28 0 Sud-Est.

Le 27 Dec. à Paris 27 2 tranquille. à Genes 27 2 Nord-Est.

En cinq jours le Barometre baissa de 8 lignes à Paris, & de 10 à Genes.

L'an 1708. *Barometre. Vent.* *Barom. Vent.*

Le 11 Janv. à Paris 26 10 tranq. ferein. à Genes 27 3 S.O. couv.

Le 17 Janv. à Paris 27 8 Sud-Ouest. à Genes 27 11 S.E. ferein.

Le Barometre s'éleva en six jours à Paris de 10 lignes, à Genes de 8, les vens étant fort differens en ces deux Villes.

Le 6 Fevr. à Paris 27 2 $\frac{1}{4}$ Ouest. à Genes 27 6 $\frac{1}{2}$ Nord.

Le 10 Fevr. à Paris 27 10 tranquille. à Genes 28 0 Nord.

Par ces observations le Barometre s'éleva de six lignes en ces deux Villes, à Paris le vent aiant été variable, à Genes il étoit toujours Nord.

Le 20 Mars à Paris 27 8 $\frac{1}{2}$ tranq. ferein. à Genes 27 7 tranquille.

Le 22 Mars à Paris 27 2 Nord. à Genes 27 3 $\frac{1}{2}$ Nord.

Le Barometre étant à une hauteur moïenne baissa en deux jours de six lignes à Paris, de quatre à Genes par un vent de Nord qu'il faisoit en ces deux villes.

Le 8 May à Paris 27 11. à Genes 28 0 Nord.

Le 17 May à Paris 27 4 Sud-Ouest. à Genes 27 5 $\frac{3}{4}$ Sud-Est.

Le 19 Nov. à Paris 28 2 $\frac{1}{2}$ tranquille. à Genes 28 2 tranquille.

Le 23 Nov. à Paris 27 6 Nord-Ouest. Le 24 à G. 27 5 pluie.

Le 24 Nov. à Paris 27 11 $\frac{3}{4}$ N. Ouest. Le 25 à G. 27 10 Nord.

Le 19 le Barometre étant à une grande hauteur, baissa ensuite jusqu'au 23, & du 23 au 24 il s'éleva de six lignes en un jour. Mais à Genes il ne fit cette variation qu'un jour après qu'elle arriva à Paris.

Le 10 Dec. à Paris 27 11 $\frac{1}{2}$ tranquille. à Genes 27 11 Nord.

Le 15 Dec. à Paris 27 1 pluie. à Genes 27 5 pluie.

Par toutes ces observations & par beaucoup d'autres que je ne rapporte point, il est constant qu'il y a un grand accord dans les variations qui arrivent en même-tems au

238 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
Barometre à Paris & à Genes, soit que ces changemens
soient prompts & subits comme ceux qui ont été rappor-
tez les premiers, soit que ces changemens se fassent plus
lentement comme ces derniers.

Cette correspondance des changemens du Barometre
paroît n'avoir pas beaucoup de rapport avec la constitu-
tion de l'air, ni avec les vents qui regnent en même tems
en differens païs; car le mercure s'éleve à Genes lorsqu'il
s'éleve à Paris, & il baisse de même, soit qu'en ces deux
Villes il y ait la même constitution d'air ou qu'il y regne
le même vent, ce qui est fort rare; soit que l'un & l'autre
soient differens. Ce seroit une chose digne d'être exami-
née par des observations faites en des lieux fort éloignez,
jusqu'à quelle distance se trouve une telle conformité des
variations du Barometre.

Cette longue suite d'observations de Paris & de Genes
comparées ensemble, fait connoître que pour trouver la
hauteur des Montagnes par les experiences du Barometre
faites en même-tems en differens endroits de la maniere
qui a été proposée dans les Memoires de l'Academie, il
faut se servir de celles où le mercure se tient dans le Baro-
metre à une hauteur moïenne, & préférer celles-cy aux
autres dans lesquelles le mercure se trouve proche des plus
grandes & des plus petites élévations, parce que dans les
hauteurs moïennes du mercure les differences entre diffé-
rens païs sont plus uniformes.

Par la comparaison des observations faites avec ce
choix, on trouve entre Paris & Genes une difference de
trois lignes de hauteur de mercure dont il se tient plus
élevé à Genes qu'à Paris; & puisque dans les observations
de Genes le Barometre est une ligne plus bas qu'il ne se-
roit au bord de la mer, il résulte une difference de 4 li-
gnes de mercure entre les observations de Paris & celles
qui auroient été faites à Genes au bord de la mer. Cette
difference entre le niveau de la mer de Genes & Paris,
s'accorde avec celle qui a été conclüe par les observations
de Paris & de Collioure, rapportées dans les Memoires

de l'Academie du mois de Novembre 1703.

Il a été remarqué dans ce Memoire, que les differences qui arrivent au Barometre dans un même lieu entre la plus grande & la plus petite élévation, sont plus grandes dans les pais Septentrionaux que dans les Meridionaux où ces differences vont en diminuant; de sorte que vers l'Equinoxial elles se réduisent à peu de chose.

Plusieurs observations que nous avons reçues depuis ce tems-là de divers endroits, sont conformes à cette remarque. A Upminster en Angleterre qui est plus Septentrional que Paris, les variations du Barometre y sont aussi plus grandes qu'à Paris; celles de Paris sont plus grandes qu'à Genes, & les variations observées à Genes sont aussi plus grandes que celles qui résultent des observations du P. Laval faites l'année derniere à Marseille qui est plus meridionale que Genes.

Cette remarque qui est confirmée par un grand nombre d'observations faites en même-tems en differens endroits, ne se verifie pas à l'égard des observations faites par M. Scheuchzer à Zuric ces trois dernieres années; car quoique Zuric soit beaucoup plus Septentrional que Genes, les variations ont été observées un peu plus petites à Zuric, bien loin d'y avoir été plus grandes qu'à Genes. L'an 1706 la difference entre la plus grande & la plus petite élévation du Barometre, a été à Zuric de 10 lignes. A Genes la même année cette difference fut d'un pouce & une ligne. L'an 1707 à Zuric elle résulte de 11 lignes, à Genes elle fut d'un pouce. L'an 1708 par les observations faites à Zuric avec le Barometre droit que je crois préférable au Barometre incliné, la variation se trouva de 10 lignes, à Genes un pouce, à Marseille de 10 lignes & demi comme à Zuric.

Il faut remarquer que les lieux des observations où cette règle se trouve, sont situez à des hauteurs peu differentes les unes des autres, & sont peu élevez sur la surface de la mer, ainsi qu'il paroît par la difference des hauteurs du Barometre qui se trouve entre ces observations.

& à l'égard de celles qui ont été faites proche le niveau de la mer. Mais il n'en est pas de même des observations de Zuric dont les observations ne sont pas conformes à cette règle. Car par les observations faites pendant toute l'année 1708 à Genes & à Zuric & comparées ensemble, on trouve entre le niveau de la mer & Zuric une différence d'un pouce & 8 lignes de mercure; ce qui fait voir que le lieu des observations de Zuric est fort élevé au dessus des lieux des autres observations, & encore plus sur le niveau de la mer.

Cette variation du Barometre moindre dans les lieux élevez que dans les lieux bas, est aussi confirmée par des observations que le P. Laval Jesuite envoya l'année dernière à l'Academie; car ayant fait pendant dix jours de suite les observations du Barometre sur la montagne du S. Pilon qui est plus Septentrionale de deux minutes de degré que Marseille, & qui est élevée sur le niveau de la mer d'environ 480 toises; les ayant comparées avec celles qu'on faisoit en même-tems à l'Observatoire de Marseille, il trouva qu'à Marseille le Barometre y varia de deux lignes & trois quarts, lorsqu'il ne varia qu'une ligne & trois quarts au S. Pilon.

Le P. Laval attribue cette difference, partie à la chaleur qui est moins grande dans les lieux élevez que dans les lieux bas, partie à la nature de l'air qui dans les lieux élevez étant plus rarefié, est moins sujet aux alterations qui contribuent à sa pesanteur ou à sa legereté.

On pourroit supposer que c'est quelque matiere étherogene répandue dans l'air, qui cause une partie de ces variations & qui fait un plus grand effet dans l'air inférieur que dans le supérieur.

Ayant comparé ensemble les experiences du Barometre faites jusqu'à present en diverses parties de la Terre pendant toute l'année, j'ai reconnu que les variations du Barometre observées à Zuric, approchent beaucoup plus des variations observées proche de l'Equinoxial, que ne sont les autres faites jusqu'à present en Europe.

J'ai

J'ai examiné par cette occasion diverses expériences faites près de l'Équinoxial sur la dilatation de l'air, pour voir si l'air de ce climat en se dilatant suivoit la raison reciproque des poids dont il est déchargé, suivant la regle de M. Mariote.

Ces expériences ont été faites à Malaque par le P. de Beze Jesuite, durant un séjour de sept mois qu'il fit dans la même ville, qui quoique située à deux degrez de Latitude Septentrionale, jouit, suivant le rapport du même Pere, d'un air assez temperé pour le climat, la chaleur y étant modérée & presque toujours la même.

Ces expériences sont rapportées parmi les Observations Physiques & Mathématiques imprimées l'an 1692 avec des Notes du P. Gouïe en ces termes :

Un habile Physicien me dit avant mon départ de France, qu'on l'avoit assuré qu'il ne se trouvoit pas de difference sensible au Barometre dans tous les lieux qui sont situez entre les Tropiques, pourvû que l'observation se fit dans un lieu de niveau de la mer. Je voulus lorsque je fus arrivé aux Indes m'assurer moi-même si ce qu'on lui avoit dit étoit vrai ; & comme je n'avois pas de Barometre monté, je me servis d'un tube de verre long de 29 pouces, scellé hermetiquement, & exactement divisé en pouces & en lignes, avec lequel je fis l'expérience de Toricelli en divers lieux entre les Tropiques ; mais j'ay partout trouvé une difference assez sensible dans l'élévation du mercure, non-seulement par rapport aux differens endroits où j'ai observé, mais souvent aussi dans un même lieu où le vis-argent étoit plus ou moins élevé suivant les diverses dispositions de l'air ; quoiqu'à dire le vrai cette difference n'égale pas celle qu'on trouve hors des Tropiques, puisque suivant ce que j'en ai pû observer, elle n'excede pas 5 ou 6 lignes.

J'ai déjà envoie en France les expériences que j'avois faites sur ce sujet à Siam & à Pondicheri. Voici celles que nous avons faites à Malaque & à Batavia.

Ayant choisi à Malaque un jour où l'air paroïssoit fort

„ pur & le ciel n'étoit chargé d'aucuns nuages, pour faire
 „ l'expérience: nous trouvâmes que le mercure du tube se
 „ souûtenoit constamment à la hauteur de 26 pouces 6 lignes
 „ au-dessus de la surface de celui qui étoit dans le bassin.

„ La chaleur étoit pour lors assez grande pour le climat,
 „ & le Thermometre étoit à 69 degrez.

„ Comme j'ai remarqué par plusieurs expériences, que le
 „ mercure se souûtenoit ordinairement à une plus grande
 „ élévation lorsque la chaleur étoit moins grande, & qu'il
 „ descendoit au contraire lorsque la chaleur augmentoit,
 „ quoique le Ciel fût également serein & découvert, j'ai
 „ crû qu'il seroit bon de marquer en faisant l'observation du
 „ Barometre, les degrez du Thermometre, quoiqu'il n'y
 „ ait pas une exacte proportion entre l'un & l'autre.

„ Voulant ensuite éprouver la force élastique de l'air,
 „ on a laissé trois pouces d'air en haut du tube, & l'ayant
 „ renversé dans le vif-argent où il enfonçoit de 7 lignes,
 „ celui du tube est resté à la hauteur de 20 pouces 7 lignes
 „ au-dessus de la superficie de l'autre; & l'air dilaté a occu-
 „ pé 7 pouces 10 lignes.

„ Aiant laissé après cela 7 pouces 6 lignes d'air, le mer-
 „ cure est resté à la hauteur de 16 pouces, & l'air dilaté oc-
 „ cupoit 12 pouces 5 lignes.

En considérant ces observations, il est aisé de voir qu'elles ne suivent pas la regle de M. Mariotte; car dans la premiere expérience 7 pouces 10 lignes d'air dilaté après le renversement du tuyau, à 3 pouces d'air naturel avant le renversement, n'a pas la même proportion que 26 pouces 6 lignes de mercure dans le vuide, à 5 pouces 5 lignes excès de 26 pouces 6 lignes à 20 pouces 7 lignes, hauteur qu'avoit le mercure avec l'air dilaté, comme il devoit être suivant la regle. Il en est de même de la seconde expérience; mais dans ces deux expériences la proportion de l'air dilaté à l'air naturel est moindre que l'atmosphère, à la difference entre la hauteur du mercure dans le vuide & la hauteur du mercure avec l'air dilaté

Aiant calculé ces deux expériences pour connoître

quelle devoit être la dilatation de l'air par la regle ordinaire; dans la premiere où l'air naturel étoit de trois pouces, après le renversement l'air dilaté devoit occuper suivant la regle 9 pouces 11 lignes; mais par l'expérience il n'occupoit que 7 pouces 10 lignes; la différence entre l'expérience & la regle est deux pouces & une ligne, dont l'espace occupé par l'air dilaté étoit moindre.

Dans la seconde expérience, 7 pouces & six lignes d'air naturel après le renversement devoit se dilater & remplir suivant la regle l'espace de 15 pouces 1 ligne; mais par l'observation il n'en occupoit que 12 pouces & 5 lignes; la différence entre l'observation & la regle est deux pouces 8 lignes, dont l'observation est moindre, & par conséquent suivant ces expériences l'air de Malaque ne suit pas la regle & se dilate moins que celui de l'Europe.

Outre ces expériences faites dans un tems que l'air étoit pur & serein, le P. de Beze en fit encore d'autres pendant que le Ciel étoit moins pur & fort couvert des nuages, & que la hauteur du mercure dans le vuide étoit plus grande que dans les observations précédentes.

Voici comment elles sont rapportées à la suite des premières.

A la fin de la Lune le Ciel étant fort couvert, & l'air « moins pur qu'à l'ordinaire, je réitérai ces expériences « dans le même lieu, le Thermometre étoit à 63 degrez. «

Ayant rempli le tube de mercure & l'ayant renversé « dans celui du bassin où il enfonçoit d'un pouce, il se sou- « tint à la hauteur de 26 pouces 10 lignes, & un quart au- « dessus de la surface du vif-argent. «

Ayant mis ensuite du mercure dans le tube jusqu'à la « hauteur de 26 pouces, afin qu'il restât 3 pouces d'air, « l'ayant plongé dans le mercure, l'air se dilatant a occupé « 7 pouces 5 lignes & demi, & le vif-argent 20 pouces 6 li- « gnes & demi. «

Ayant laissé 6 pouces d'air le mercure s'est soutenu à la « hauteur de 17 pouces 2 lignes & un quart, & l'air dilaté «

„ a rempli le reste de l'espace 10 pouces 9 lignes & trois
 „ quarts.

„ Aiant laissé 9 pouces d'air le mercure n'a occupé que
 „ 14 pouces 6 lignes, & l'air dilaté 13 pouces 6 lignes. Ces
 „ experiences ont été faites dans un lieu élevé de 15 ou 20
 „ pieds perpendiculaires au-dessus du niveau de la mer.

Par la comparaison que nous avons faite de ces observations avec la regle, on trouve entre l'une & l'autre les mêmes différences que dans les observations précédentes; car les trois pouces d'air naturel après le renversement s'est dilaté de sorte, qu'il occupoit seulement 7 pouces 5 lignes & demi, au lieu que par la regle il devoit contenir un espace de 9 pouces 6 lignes & demi. La différence entre l'observation & la regle est deux pouces une ligne & demi, à une demi-ligne près de ce qui s'est trouvé dans la premiere des experiences précédentes; ce qui marque la précision des unes & des autres.

Dans la seconde experience, six pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau, après le renversement remplit l'espace de 10 pouces 9 lignes & trois quarts; cet espace par le calcul fondé sur la regle, devoit être 13 pouces 3 lignes. La différence est deux pouces 5 lignes & trois quarts, dont la dilatation se trouve moindre par l'observation que par la regle.

Dans la dernière experience, 9 pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau s'étant dilaté par le renversement, occupoit 13 pouces 6 lignes, & par le calcul fondé sur la regle, il devoit remplir 16 pouces 1 ligne & un quart. La différence est deux pouces sept lignes & un quart, dont l'experience donne moins que la regle.

Il est donc constant par toutes les experiences du P. de Beze, que la dilatation de l'air qui en résulte, est beaucoup plus petite que celle de nôtre air, & qu'elle ne suit pas la proportion qu'on trouve par les experiences d'Europe.

On pourroit supposer que ce phénomène vient de la constitution particulière de l'air de Malaque, qui étant

fort rarefié par la chaleur du climat, est ensuite moins susceptible d'une aussi grande dilatation que le nôtre; mais autant qu'on en peut juger par des expériences faites en Europe, cette seule explication n'est pas suffisante pour rendre raison de la grande différence qui se trouve entre la dilatation de nôtre air & celui de Malaque, quand même on supposeroit que la chaleur qui causeroit cette rarefaction est aussi grande que celle de l'eau bouillante. Voici les observations que nous avons faites.

J'ai pris un tuyau long de 38 pouces dans lequel j'ai mis du mercure jusqu'à la hauteur de 35 pouces, de sorte qu'il restoit 3 pouces d'air; j'ai plongé tout ce tuyau dans l'eau bouillante pour faire rarefier l'air qui y étoit contenu; j'ay bouché ensuite avec le doigt l'ouverture, & aiant retiré le tuyau de l'eau, je l'ai renversé dans le vif-argent; en sorte qu'il y enfonçoit d'un pouce. Immédiatement après le renversement le mercure se tenoit à peu de lignes près où il se tient par la seule dilatation sans l'avoir rarefié. Mais on voïoit monter le mercure dans le tuyau, à mesure que l'air se condensoit en se refroidissant; & lorsqu'il a été entierement refroidi, le mercure est monté un pouce & deux lignes plus qu'il n'étoit immédiatement après le renversement, & plus que ne demandoit la regle de M. Mariotte, & par conséquent l'air rarefié étoit moins dilaté que par la regle de la même quantité d'un pouce & deux lignes. Nous avons trouvé par les expériences de Malaque que les trois pouces d'air se sont dilatés deux pouces & une ligne moins que par la regle; l'air de Malaque se dilate donc moins que nôtre air rarefié par la chaleur de l'eau bouillante.

J'ai fait la même expérience sur six pouces, ensuite sur 9 pouces d'air, & j'ai toujours trouvé que nôtre air rarefié par la chaleur, se dilatoit beaucoup moins que l'air de Malaque, & que la différence qui s'y trouve à l'égard de la regle, est le double plus grande dans l'air de Malaque que dans le nôtre rarefié. D'où l'on peut inferer que cette moindre dilatation de l'air de Malaque ne vient

246 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
pas seulement des grandes chaleurs du climat ; mais de sa nature moins propre à se dilater que le nôtre.

Puisque l'air se dilate autrement à Malaque qu'il ne fait en France à pareille hauteur à peu près de la surface de la mer , & qu'en France à des grandes hauteurs la dilatation se trouve différente de celle qui arrive à l'air inférieur , ainsi qu'il résulte des observations faites sur les Montagnes d'Auvergne & du Roussillon , on peut inferer , que toute la masse de l'air n'a pas la propriété de se dilater suivant la raison des poids. On peut aussi inferer de ces différentes dilatations , que l'air est estherogene dans ces différentes parties , & qu'ainsi on doit être circonspect à fonder un système general sur des experiences particulieres , quelque sûres & quelque nombreuses que soient ces experiences.

Il faut remarquer qu'en Cayenne, dont le parallele n'est éloigné de celui de Malaque que de deux degrez & demi vers le Septentrion, les réfractions des Astres ont été trouvées plus petites qu'en Europe. Ce seroit une chose à examiner , s'il se trouve quelque rapport entre la maniere dont l'air se dilate sous divers climats , & les différentes réfractions des objets celestes qu'on observe à des hauteurs égales sur la surface de la mer.



DU MOUVEMENT

APPARENT

DES PLANETES

à l'égard de la Terre.

PAR M. CASSINI.

L'Astronomie ancienne avoit trouvé des méthodes pour représenter assez exactement les longitudes apparentes des Planetes & leurs latitudes. Elle les donnoit calculées jour par jour dans les Ephemerides ordinaires ; mais elle n'avoit pas trouvé la maniere de représenter la proportion de la veritable distance de diverses Planetes à la Terre. Les premiers Astronomes se servoient de certaines hypothèses que l'on a depuis trouvé en partie évidemment fausses, d'autant qu'ils plaçoient les Planetes sur des orbes à diverses distances de la Terre sans qu'aucune des Planetes superieures pût jamais approcher de la Terre autant que son inferieure.

1709.
7. Août.

Ils voioient qu'une même Planete tantôt augmentoit, tantôt diminuoit en grandeur apparente, ce qu'ils jugeoient dépendre uniquement de sa diverse distance à l'égard de la Terre, & ils inventerent des hypothèses par lesquelles ils representoient la proportion de la variation de la distance de la même Planete à la Terre en divers tems.

Ils avoient distingué les mouvemens de la même Planete en periodiques & synodiques. Les mouvemens Periodiques des Planetes superieures étoient representez par un cercle Excentrique à la Terre, sur la circonférence duquel on mettoit le centre d'un Epicycle mobile du mouvement Periodique ; de sorte que le centre de l'Epicycle de Saturne, par exemple, parcourroit son

Excentrique en trente ans, celui de Jupiter en douze, celui de Mars en près de deux ans, pendant que la Planette parcouroit la circonférence de l'Epicycle par un mouvement Synodique beaucoup plus vite. Ainsi la Planete s'aprochoit & s'éloignoit de la Terre par la composition de ces deux mouvemens. Dans la proportion des distances de diverses Planetes, ils mettoient la Lune la plus proche de la Terre, & déterminoient sa plus grande distance de la Terre par l'observation de sa parallaxe qui est alors un peu moindre d'un degré.

Ayant déterminé par cette maniere la plus grande distance de la Lune à la Terre & considéré que les autres Planetes n'avoient pas une si grande parallaxe, & que leur mouvement étoit plus lent que celui de la Lune, ils jugerent que plus le mouvement d'une Planette est lent à l'égard des autres, & plus elle étoit éloignée de la Terre, & supposèrent que la plus petite distance de la Planete superieure, n'excedoit que très-peu la plus grande distance de son inferieure; ayant calculé dans la même Planete la proportion de la plus petite distance à la plus grande qui résulloit de la composition du mouvement Periodique & Synodique, ils donnoient à l'orbe de la Planete toute l'épaisseur que cette composition demandoit. Par cette maniere ils placerent Mercure immédiatement au-dessus de la Lune, parce que son mouvement propre leur parut plus vite que celui des autres Planetes: ils placerent de même Venus au-dessus de Mercure.

Ils observerent que Mercure & Venus avoient le centre de leur Epicycle sur une ligne, qui étant tirée du centre de la Terre passoit aussi près du centre du Soleil d'où Mercure pouvoit s'éloigner de part & d'autre de près de 28 degrez & Venus de près de 48.

Ils observerent aussi que Mars, Jupiter & Saturne s'éloignoit du Soleil jusqu'à l'opposition; & Ptolemée ne trouva rien de plus raisonnable que de supposer l'orbe du Soleil placé au milieu entre les Planettes qui ne s'en peuvent éloigner qu'à certaine distance, comme sont Mercure

&

& Venus, & celles qui peuvent s'en éloigner à toute sorte de distance qui furent appellées les Planetes superieures. Ils donnoient à Mercure & à Venus un mouvement apparent Periodique sur leur excentrique, peu different du mouvement apparent du Soleil, pendant que ces Planetes parcouroient leurs Epicycles par des mouvemens fort differens entre eux.

Copernic supposa le Soleil fixe & substitua au mouvement annuel du Soleil le mouvement annuel de la Terre. Il disposa aussi autour du Soleil les Excentriques des autres Planetes sur la circonference desquels il faisoit mouvoir le centre d'un Epicycle dont la Planete parcouroit la circonference par un mouvement Periodique. Cet Epicycle avoit pour diametre l'Excentricité que Ptolemée attribuoit aux cecles des Planetes.

Kepler réduisit cette hypothèse à une plus grande simplicité; car il substitua aux Excentriques & aux Epicycles, que Copernic avoit attribué aux Planetes, des Ellipses qui representent à peu près les mêmes apparences.

Il plaça donc de même que Copernic le Soleil au centre du Monde, & l'orbe de la Terre entre ceux de Venus & de Mars; & parce qu'on ne voioit point que la Terre faisant un si grand circuit autour du Soleil; causât aucune parallaxe sensible aux Etoiles fixes, les Astronomes furent obligez de supposer que les Etoiles fixes sont éloignées du Soleil à une distance immense, & qu'à son égard la distance du Soleil à la Terre, n'est que comme un point.

Tychobrahé trouva cette distance des Etoiles fixes au Soleil peu vrai semblable, & supposant de même que Copernic, que les cinq Planetes tournent autour du Soleil, il aima mieux attribuer au Soleil le mouvement annuel autour de la Terre comme les Anciens; de sorte que le Soleil & la Lune tournassent autour de la Terre, qu'il supposa immobile.

Dans cette hypothèse, Saturne, Jupiter, Mars, Venus & Mercure seroient des Satellites du Soleil, au nombre

250 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
de cinq, de même que ceux que l'on a découvert depuis
autour de Saturne.

Pour ce qui est du mouvement des Planetes sur leur
cercle, Ptolemée avoit donné au cercle du Soleil une ex-
centricité suffisante pour représenter toute l'inégalité ap-
parente de son mouvement annuel qu'il supposoit égal sur
la circonférence de l'Excentrique de $59' 8''$ & quelques
tierces par jour.

A l'égard des Planetes superieures, il supposoit que le
mouvement de leur Epicycle sur la circonférence de l'Ex-
centrique étoit inégal plus lent vers l'Apogée que vers le
Perigée. Il le réduisoit à l'égalité en rapportant le mou-
vement du centre de l'Epicycle à un point pris dans la
ligne de son Apogée éloigné du centre de la Terre du
double de l'excentricité. Car s'il avoit placé le centre de
l'Excentrique aussi éloigné de la Terre que le centre du
moïen mouvement, la variation de la grandeur des Epi-
cycles vûe de la Terre auroit été évidemment trop gran-
de; ainsi l'excentricité du moïen mouvement étoit divi-
sée en deux parties égales par le centre de l'excentri-
que.

Cette division de l'excentricité du moïen mouvement
en deux parties égales, a été imitée par plusieurs Astro-
nomes modernes dans la Theorie du Soleil, pour repre-
senter la variation du diametre apparent du Soleil plus
petite de la moitié que celle qui répondroit à toute l'Ex-
centricité.

Ainsi le seul cercle annuel du Soleil suffit pour faire
la fonction des Excentriques de Venus & de Mercure &
des Epicycles de Saturne, de Jupiter & de Mars. Comme
l'on sçavoit déjà la proportion des Excentriques aux Epi-
cycles de ces cinq Planetes, requise pour représenter les
inégalitez apparentes de leur mouvement, on connut
aussi la proportion des cercles de ces cinq Planetes au
cercle du mouvement annuel du Soleil qui étoit ignoré
auparavant.

Ayant disposé ces cinq cercles autour du Soleil, ceux

des trois Planetes superieures comprenoient la Terre qui restoit située entre le cercle de Venus & celui de Mars. Le systême de Thychobrahé reçut aussi une plus grande perfection de quelques Astronomes, qui à l'imitation de Kepler assignerent à ces Planetes des excentricitez à l'égard du Soleil qu'on leur avoit attribué à l'égard de la Terre.

L'on peut donc dans les Systêmes de Copernic & de Tycho ainsi perfectionnez, trouver à chaque tems donné la proportion de leur distance à la Terre & de toutes les cinq Planetes entre elles. Mais comme nous sommes dans la Terre nous avons besoin de considerer principalement à chaque tems donné, les distances des Planetes à l'égard de la Terre; car par le moïen de ces distances on peut trouver le tems les plus propres pour les observations & principalement pour chercher leur parallaxe.

Par les essais que l'on a faits jusques à present dans l'Academie, on a trouvé qu'il n'y a que les parallaxes de Venus & de Mars qui soient évidemment sensibles lorsque ces deux Planetes sont plus proches de la Terre; mais alors Venus est ordinairement cachée dans les raïons du Soleil. Il est vrai qu'on la peut distinguer très-souvent à la Lunete quand elle est cachée à la vûe simple, & nous avons aussi par ce moïen tâché de déterminer sa parallaxe, la comparant au Soleil & aux Etoiles fixes éloignées; car il est très-difficile de la comparèr par la Lunete aux Etoiles qui en sont fort proche, que l'on ne peut pas apercevoir à la presence du Soleil: Pour ce qui est de Mars, sa moindre distance de la Terre qui arrive dans son opposition avec le Soleil, & particulièrement lorsqu'il est aussi dans son Perihelie, est visible pendant la plus grande partie de la nuit avec les plus petites Etoiles. On en trouve souvent de celles qui en sont très-proches, avec lesquelles il peut être comparé aisément à diverses heures de la même nuit fort éloignées entre-elles. Nous en avons donné plusieurs exemples dans les Livres des Voïages de l'Academie, & nous avons emploïé la même Méthode

252 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dans le Livre de la Comete de 1680, l'ayant jugé la plus propre pour la recherche des parallaxes des objets célestes qui sont plus éloignés que la Lune. Or les parallaxes de Planetes en chaque tems sont en raison reciproque de leurs distances; ainsi la proportion des distances étant donnée, on a la proportion des parallaxes, & reciproquement; par exemple l'an 1672, la distance de Mars à la Terre, & la distance du Soleil à la Terre étoit comme 2 à 5. La Parallaxe de Mars fut trouvée de 25. secondes, d'où l'on conclut la parallaxe du Soleil de 10 secondes qu'il seroit très difficiles de déterminer immédiatement.

La proportion des diametres apparens d'une même Planete en divers tems, se trouve aussi par la proportion des distances qui lui est réciproque. C'est pourquoi si l'on a mesuré le diametre apparent d'une Planete lorsqu'elle est la plus proche de la Terre où elle paroît plus grande, on l'aura aussi dans sa plus grande distance, quand il seroit difficile de le mesurer exactement à cause de sa petitesse apparente.

La description des traces des mouvemens particuliers des Planetes, tant dans l'hypothese de Tycho que dans celle de Copernic réduites à leur perfection, sert donc à trouver les tems plus propres pour observer leur parallaxe; & c'est principalement dans ce dessein que nous avons représenté en diverses Planches les mouvemens de Saturne, de Jupiter, de Mars, du Soleil, de Venus & de Mercure à l'égard de la Terre.

Dans les Planetes de Mercure, de Venus & de Mars, dont nous avons réduit les traces dans la même proportion que l'orbe annuel, on peut aussi déterminer à chaque tems les phases de ces Planetes, par exemple lorsque Venus & Mercure doivent paroître comme la Lune dans ses quartiers. Car alors une ligne droite tirée de la Terre par une de ces Planetes, doit faire un angle droit avec la ligne tirée du centre de ces Planetes au Soleil & de la maniere que l'on observe, qu'il y a quelque correspon-

dance entre le changement des phases de la Lune & celle des marées, l'on pourroit effaier s'il n'y en a point qu'une qui réponde aux diverses phases de ces Planetes.

L'Astronomie ancienne qui n'avoit pas la maniere de déterminer ces phases ni la proportion des distances d'une Planete à l'égard de l'autre, ne pouvoit pas entrer dans cette discussion; ce qui suffit pour faire voir que ceux qui leur ont attribué des effets sur la Terre, n'avoient pas de principes necessaires pour juger de cette diversité.

Pour ce qui est de Jupiter & de Saturne, la diversité des phases n'est pas sensible à la Terre, parce que les lignes droites tirées du centre du Soleil & du centre de la Terre au centre de ces Planetes, ne font jamais un angle assez grand pour pouvoir distinguer avec évidence l'hémisphere vû du Soleil de celui qui est vû en même tems de la Terre, la difference entre la Phase & le cercle entier étant mesurée par le sinus versé de cet angle qui est peu sensible à cette distance.

A l'égard de la figure décrite par le mouvement des Planetes autour de la Terre. Celle du mouvement annuel du Soleil paroît circulaire. Elle est veritablement Elliptique; mais dans cette grandeur on ne la distingue pas sensiblement du cercle qui circonscrit l'Ellipse. Elle a deux foyers sur la ligne de l'Apogée, qui dans ce siecle est dirigée au 8°. degré du Cancer. Un de ces foyers qui est celui du mouvement apparent, concourt avec le centre de la Terre représenté au centre de la figure éloigné du centre de l'Ellipse de la dix-sept milliême partie de son demi-diametre; l'autre foyer est le centre du moïen mouvement éloigné du centre de la Terre du double de l'excentricité simple.

Cette excentricité simple suffit pour représenter la variation annuelle du diametre apparent du Soleil, qui n'est que d'une minute & 5 ou 6 secondes à l'égard du diametre qui est d'environ 32 minutes; mais l'excentricité double est nécessaire pour représenter la variation apparente du mouvement journalier du Soleil, qui dans l'Apogée est

254 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
de 57', & dans le Perigée de 61'; la difference est de 4
minutes, qui a une proportion au mouvement journalier
moïen double de celle qui convient à la proportion de
la variation du diametre apparent.

Pour ce qui est des lignes des mouvemens des cinq
Planetes autour de la Terre, ce sont des Spirales qui ré-
sultent de la composition du mouvement apparent du So-
leil autour de la Terre, & du mouvement de la Planete
sur son Ellipse particuliere, dont l'excentricité qui est di-
verse en ces differentes Planetes est réglée de la même
maniere que nous avons dit celle du Soleil, & dont les
Aphelies sont dirigez du Soleil à divers degrez du Zodia-
que. La proportion du diametre de Ellipses à celui de
l'Ellipse du Soleil dans l'Astronomie moderne est déter-
minée dans la Theorie de chacune de ces Planetes.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA premiere Planche represente le mouvement ap-
parent de Saturne, de Jupiter, de Mars & du Soleil
à l'égard de la Terre qui est au centre de la Figure. La
proportion de la distance de ces trois Planetes entr'elles
& à l'égard de la Terre y est observée.

La Spirale superieure represente le mouvement appa-
rent de Saturne depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Jan-
vier 1737.

La seconde Spirale represente le mouvement apparent
de Jupiter depuis l'année 1708 jusqu'à l'année 1720, & la
Spirale inferieure le mouvement apparent de Mars dans
l'espace de deux années. Le cercle ponctué represente le
mouvement annuel du Soleil, qui differe peu d'une an-
née à l'autre.

Ces Spirales sont divisées par des traits qui marquent
la situation de la Planete pour le premier jour de cha-
que mois. L'on pourra trouver la situation de chaque
Planete pour les autres jours, en divisant l'intervalle entre
chaque mois en parties proportionnelles.

Le cercle extérieur qui enveloppe les Spirales, est divisé en signes & degrez de l'Ecliptique.

L'on voit par cette figure le tems auquel ces Planetes sont dans leur plus grande ou dans leur plus petite distance à l'égard de la Terre, & l'on peut connoître aisément leur longitude par le moïen d'un fil, qui passant par le centre de la Terre & par la Planete, marque sur le cercle extérieur les degrez & signes du lieu de la Planete.

Lorsque la Planete est dans la partie supérieure, elle est directe; lorsqu'elle est dans la partie inférieure, elle est retrograde; & lorsque le fil raze la Spirale de côté & d'autre, elle est stationnaire.

La 2^e Planché represente le mouvement de Mars depuis l'année 1708 jusqu'à l'année 1723, pendant lequel tems cette Planete fait plusieurs révolutions à l'égard de la Terre. La révolution du Soleil est representée par un cercle ponctué, lequel est divisé de même que la Spirale de Mars par des traits qui marquent la situation du Soleil & de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. L'on voit par cette Figure les tems auxquels cette Planete est plus ou moins éloignée de la Terre que le Soleil. Lorsque Mars se trouve dans la partie inférieure de la Spirale, il est en opposition avec le Soleil, & il est en conjonction lorsqu'il se trouve dans la partie supérieure. Entre les oppositions qui sont representées dans cette Figure, celle où Mars approchera le plus près de la Terre, arrivera au commencement de Septembre de l'année 1719, où sa distance à la Terre est sept fois plus petite qu'au mois de Septembre de l'année 1718.

L'on peut de même que dans la Figure précédente par le moïen d'un fil qui passe par le centre de la Terre & va terminer au cercle extérieur où sont marquez les degrez & signes du Zodiaque, trouver la situation de la Planete de dix en dix jours & pour tous les jours en prenant des parties proportionnelles, & sçavoir lorsqu'elle est directe stationnaire ou retrograde.

La 3^e Planche represente le mouvement de Venus à l'égard de la Terre depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Janvier 1716; & la 4^e Planche le mouvement de Mercure depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Janvier 1715. Ces figures de même que les cercles qui representent la révolution du Soleil, sont divisées par des traits qui marquent la situation de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. Lorsque ces Planetes sont dans la partie inferieure de leur cercle, elles sont en conjonction avec le Soleil; & lorsqu'elles se trouvent dans la partie superieure, elles sont dans leur opposition.

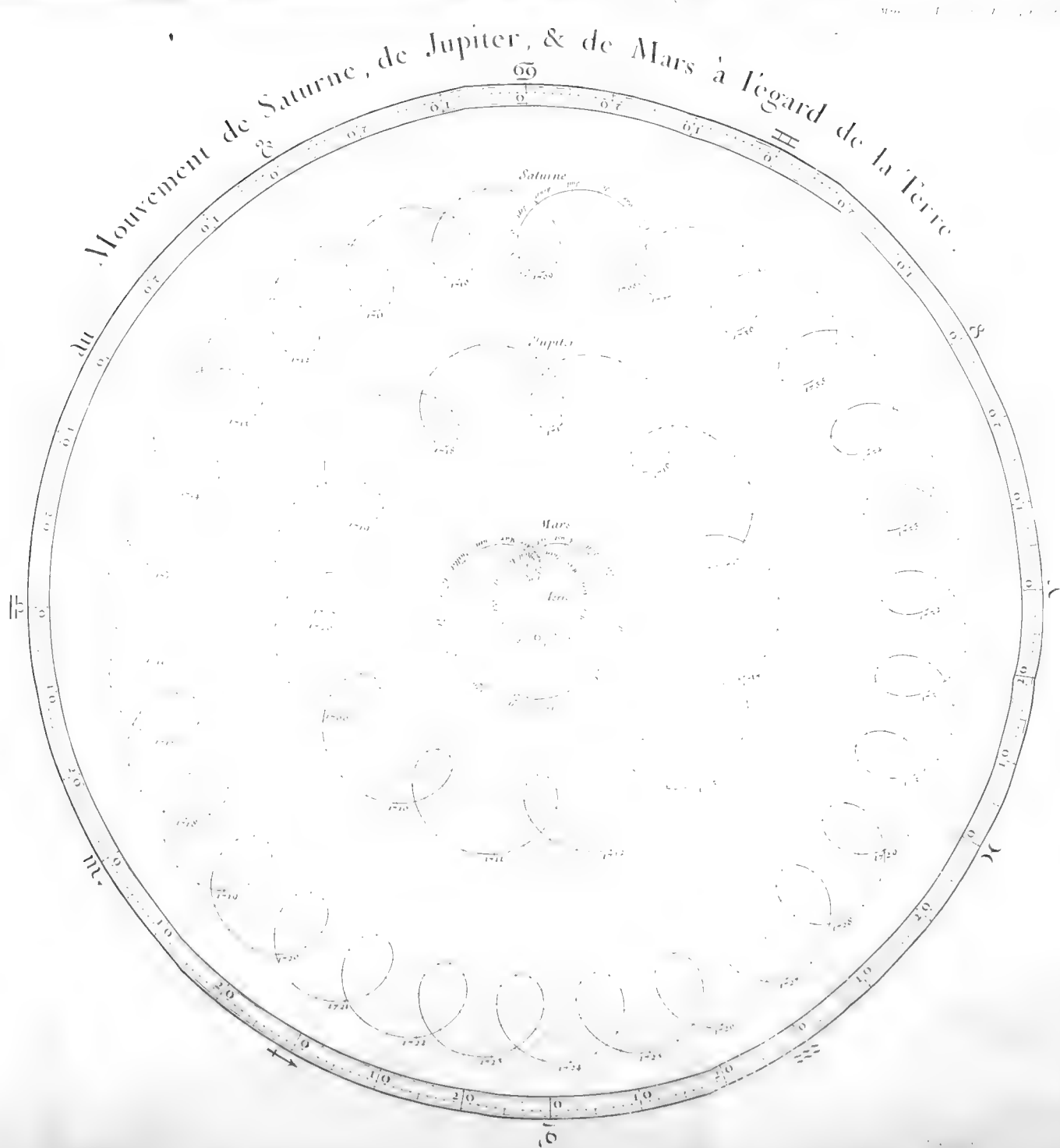
L'on peut de même qu'on l'a expliqué pour les Planetes superieures, connoître les lieux de ces Planetes aux jours donnez, les tems de leurs stations & retrogradations, & de leur plus grande ou plus petite distance à la Terre. L'on voit dans ces figures que Venus est sujette à moins d'inégalité, & est de toutes les Planetes celle qui s'approche de plus près de la Terre.



Jupiter,

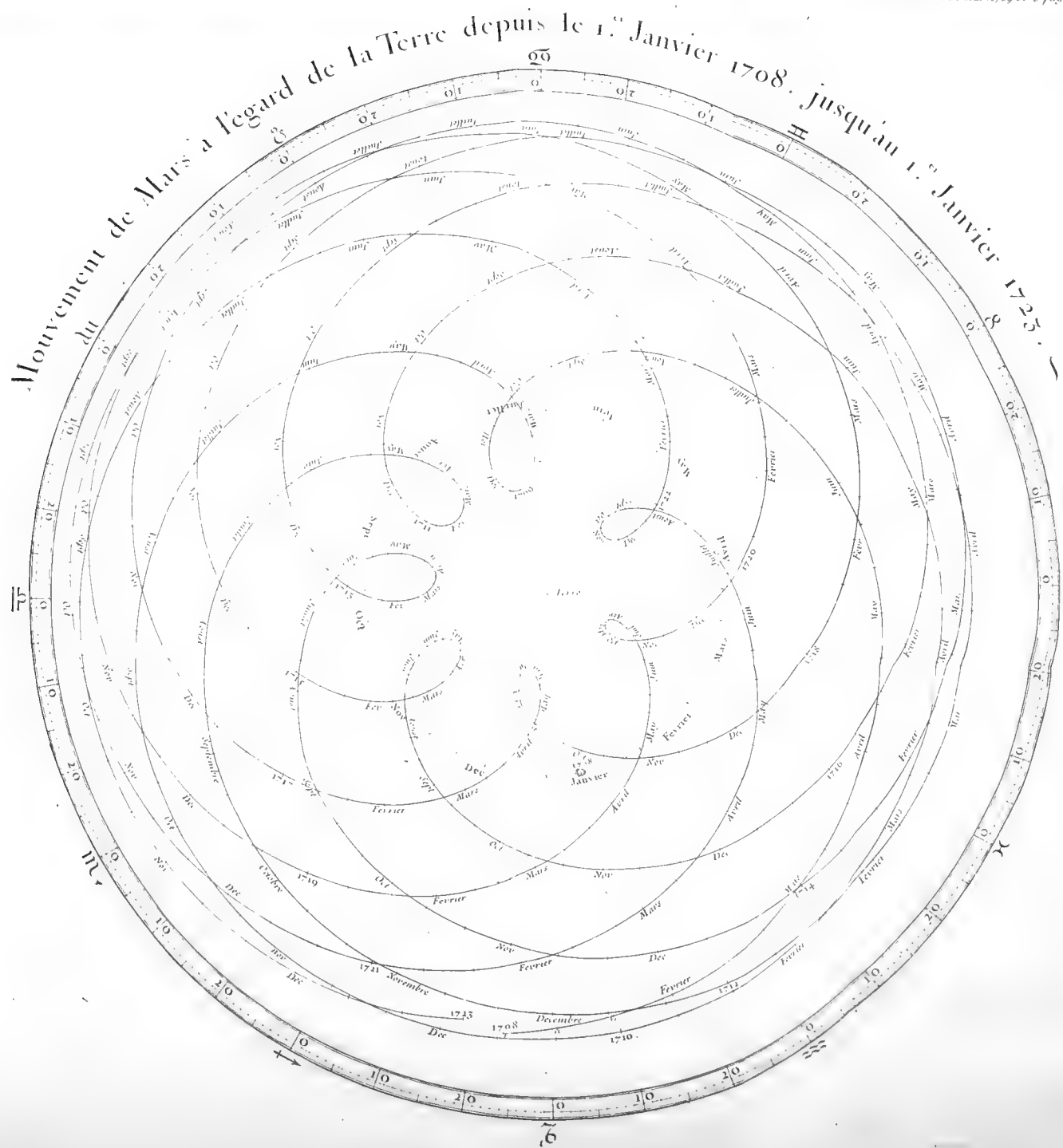
69

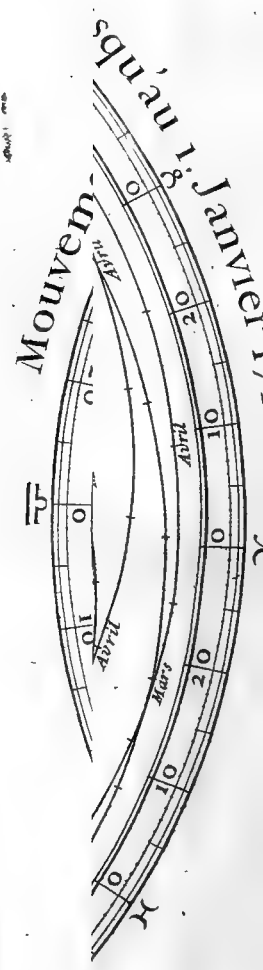


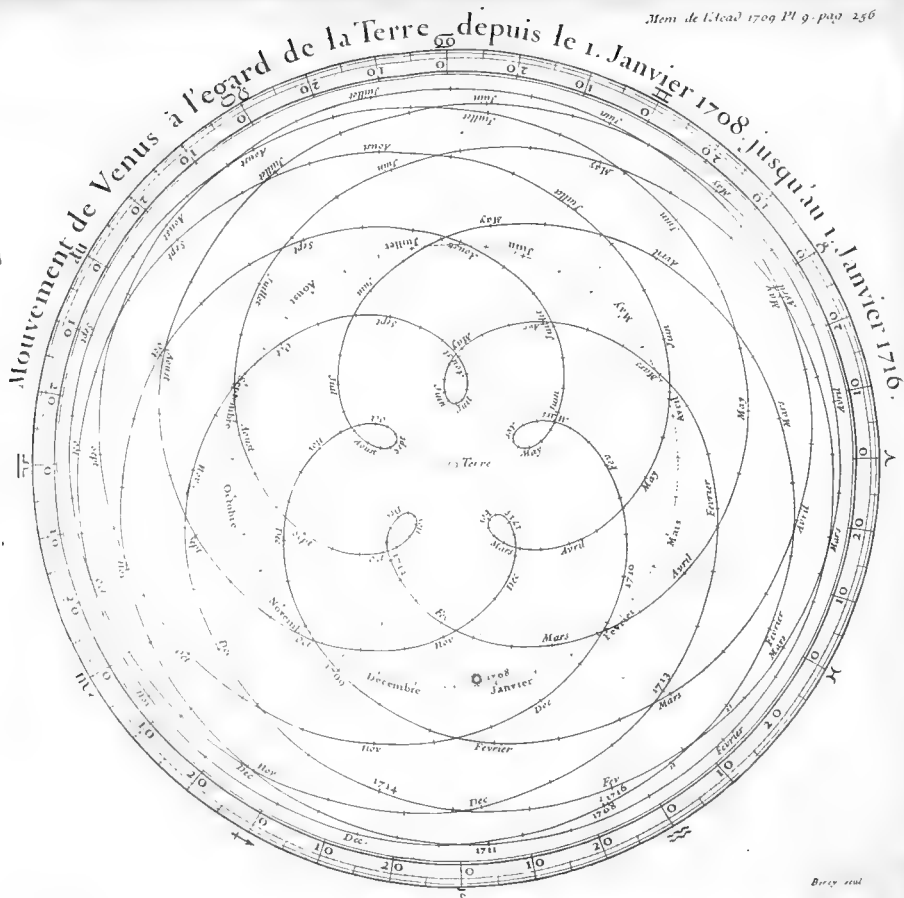


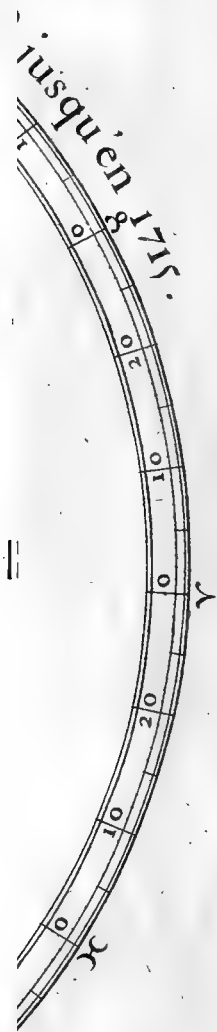
uis le 1.^{er}

99

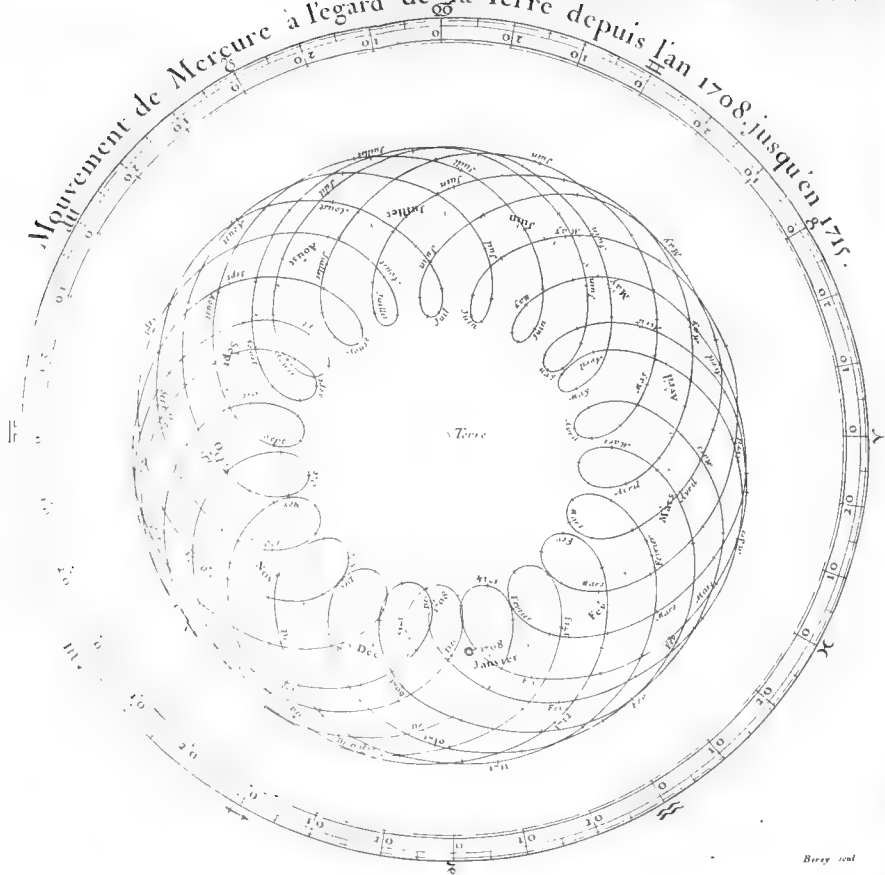








Mouvement de Mercure à l'égard de la Terre depuis l'an 1708 jusqu'en 1717.



SOLUTION GENERALE

DU PROBLEME,

Où parmi une infinité de Courbes semblables décrites sur un Plan vertical, & ayant un même axe & un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine & une ligne donnée de position, est parcouru dans le plus court tems possible.

PAR M. SAURIN.

DANS un Memoire précédent j'ai donné une Solution nouvelle de ce Problème à l'égard des Cycloïdes en particulier, & cela d'abord dans le cas simple d'une verticale donnée, proposé par feu M. Jacques Bernoulli, & puis dans le cas plus composé & plus générale d'une droite donnée de position, faisant un angle quelconque avec l'axe, suivant l'idée de M. Jean Bernoulli son frere. Je rends ici avec ce dernier le Problème plus général encore; en l'étendant à toutes les Courbes semblables.

Soient donc sur un Plan vertical une infinité de Courbes semblables AGB , AFD , décrites sur le même axe AM , & aiant même origine au point A : il faut déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine A , & la droite CD donnée de position, & qui fait avec l'axe AM un angle quelconque, sera parcouru dans un plus court tems que l'arc de toute autre Courbe semblable compris de même entre le point A , & la donnée de position CD .

SOLUT. De ces Courbes semblables j'en prends à l'ordinaire pour constante une quelconque AGB , & supposant aussi toujours que AFD une des variables est celle

1709.

Kk

Voyez la suite de ce Memoire sous le titre d'Addition, &c. parmi ceux de 1710. p. 208.

1709.
9. Août

FIG. I.

que l'on mande, je mene la corde ADB qui coupe l'arc AFD de la variable, & l'arc AGB de la constante, & du point B je tire BL ordonnée à la Courbe constante, & BQ parallele à la droite CD donnée de position. Si l'on nomme l'abcisse AL , x ; l'ordonnée BL , y ; l'arc AGB , z ; & son élément, dz ; la differentielle du tems par l'arc AGB sera $\frac{dz}{\sqrt{y}}$, & le tems entier $\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. La raison de BL à LQ étant donnée, & faite égale à celle de m à n , on aura comme dans les Solutions précédentes, $LQ = \frac{ny}{m}$, & $AQ = x + \frac{ny}{m} = \frac{mx+ny}{m}$; & appellant AC qui est donnée de grandeur, b ; & le tems par l'arc AFD , t ; on fera la même analogie que dans notre premier Memoire;

$$\int \frac{dz}{\sqrt{y}} \cdot t :: \sqrt{AB} \cdot \sqrt{AD} :: \sqrt{AQ} \left(\frac{\sqrt{mx+ny}}{m} \cdot \sqrt{AC} (\sqrt{b}) \right);$$

d'où il vient, $t = \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{mx+ny}} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; la difference de cette

quantité (en omettant \sqrt{bm}) est, $\frac{\sqrt{mx+ny} \times \frac{dz}{\sqrt{y}}}{mx+ny}$

$\frac{-mdx-ndy}{mx+ny \times 2\sqrt{mx+ny}} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}} = 0$; & mettant à même dénomi-

naison, $\frac{2mx+2ny \times \frac{dz}{\sqrt{y}} - mdx-ndy \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}}{mx+ny \times 2\sqrt{mx+ny}} = 0$; d'où

l'on tire $2mx+2ny \times \frac{dz}{\sqrt{y}} = mdx+ndy \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; & $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; ce qui fournit cette construction générale :

FIG. II. Sur l'axe commun AM soient décrites deux Courbes; la Courbe APD dont les ordonnées $\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ exprimeront les tems de la chute par les arcs correspondans AGB ; & la Courbe AED qui ait pour ordonnées les lignes exprimées par la fraction $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$; lorsque cette fraction deviendra égale à $\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ les deux Courbes se rencontreront, & il est évident que si de ce point on mene sur

l'axe AM l'ordonnée DM commune aux deux Courbes ; $AL(x)$, & $LB(y)$ que l'on cherchoit, seront déterminées.

On voit clairement que de ces deux Courbes, l'une, sçavoir APD n'est Géométrique que lorsque $\int \frac{dz}{vy}$ peut être intégré, ou exprimé par des lignes droites ; & que l'autre AED l'est toujours. On peut faire évanouir de l'expression de ses Ordonnées les différences ; ces différences se trouvant dans le numerateur, & dans le dénominateur de la fraction, & la nature des Courbes particulieres donnant les valeurs de dz & dx en dy , ou de dz & dy en dx . Mais sans rien changer à la fraction, on peut la construire aisément & généralement en prenant, 1^o, la 4^e proportionnelle à QT , BT , $2AQ$ on aura $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = 2mx + 2ny$ Fig. III.
 $\times \frac{dz}{mdx + ndy}$; 2^o, la 3^e proportionnelle à cette même ligne, & $\frac{1}{vy}$; & l'on aura $\frac{2mx + 2ny}{vy} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$; ce qu'il falloit construire.

La premiere proportion qui donne $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = 2mx + 2ny$
 $\times \frac{dz}{mdx + ndy}$, se démontre sans peine ; car, QT ou $QL + LT$
 $\left(\frac{ny}{m} + \frac{ydx}{dy} \right) \cdot BT \left(Vy + \frac{yydx^2}{dy^2} \right) : \frac{nydy + mydx}{mdy} \cdot \frac{y}{ay} \times \sqrt{dy^2 + dx^2}$
 $(dz) : \frac{ndy + mdx}{u} \cdot dz :: 2AQ$ ou $2AL + 2LQ \left(\frac{2mx + 2ny}{m} \right)$
 $2mx + 2ny \times \frac{dz}{ndy + mdx} = \frac{BT \times 2AQ}{QT}$.

Voilà comme on démontre cette proportion ; mais voici comme on y est venu. On a d'abord pris $\frac{mdx}{dz} = \frac{BL \times LT}{BT}$, &
 $\frac{ndy}{dx} = \frac{BL \times LQ}{BT}$; ainsi on a eu $\frac{mdx + ndy}{dz} = \frac{BL \times LT + LQ}{BT} = \frac{BL \times QT}{BT}$;
ensuite on a fait $\frac{mdx + ndy}{dz} \left(\frac{BL \times QT}{BT} \right) \cdot \frac{2mx + 2ny}{m} (AL + 2LQ$
ou $2AQ) :: m(BL) \cdot 2mx + 2ny \times \frac{dz}{mdx + ndy} = \frac{BL \times 2AQ \times BT}{BL \times QT}$
 $= \frac{2AQ \times BT}{QT}$.

J'ai été bien aise d'exposer ici la maniere dont cette

260 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 proportion s'est présentée d'elle-même, parce qu'elle four-
 nit une construction générale & plus simple du Problème
 par la description d'une seule Courbe.

On a trouvé $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, ou en rejetant
 $\frac{2}{\sqrt{y}}$ de l'autre côté, $\overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2} \sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. Main-
 tenant si sur la Tangente BT de chaque point de la
 Courbe constante AGB , on prend la partie $BR = \frac{1}{2} \sqrt{y} \times$
 $\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, & que les extremités R de ces parties BR forment
 la Courbe AOR , il est clair que lorsque $\frac{1}{2} \sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ devien-
 dra $= \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, si l'on décrit l'arc AFD ter-
 miné au point D , où la droite AB coupe la donnée de
 position CD , & par conséquent semblable à l'arc AGB ,
 le tems par l'arc AFD sera le plus court, puisque c'est
 lorsqu'il est le plus court que l'on a $\overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2}$
 $\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. La Courbe AOR étant donc décrite, on n'a qu'à
 mener la corde AR parallèle à la donnée de position CD ,
 & du point R mener la Tangente RB à la Courbe con-
 stante AGB , l'ordonnée BL menée du point B , déter-
 miné de cette sorte, sera la valeur cherchée de y ; BR
 qui est $\frac{1}{2} \sqrt{y} \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, se trouvant $= \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, quand
 AR est parallèle à CD ; car alors à cause des parallèles
 AR , BQ , on a la proportion dont on vient de parler;
 $QT.BT :: AQ.BR$, & par conséquent $BR = \frac{BT \times AQ}{QT}$
 $= \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2} \sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. Cette belle & élegan-
 te construction qui naît si naturellement de notre Analy-
 se, a été donnée par M. Jean Bernoulli dans le Journal
 des Sçavans du 12^e de Decembre 1697, & inserée dans les
 Actes de Leipzig de 1698, pag. 55; mais en deux mots,
 sans analyse, & sans démonstration.

Pour appliquer maintenant notre première construction
 générale par l'intersection de deux Courbes à quelques

exemples particuliers. Soient les Courbes semblables AFD AGB des Cycloïdes. Par la substitution des valeurs de dz , & dx en dy , l'égalité $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{m\sqrt{x}+n\sqrt{y}} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ se changera en celle-cy, $\frac{2mx+2ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times \sqrt{a} = \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$; ou divisant par 2, & multipliant par \sqrt{a} ; $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{r}{2} \sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$. La Courbe APD aura donc pour ordonnées les arcs de Cercle correspondans MIS , exprimés par $\frac{1}{2} \sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = \int \frac{a\sqrt{y}}{2\sqrt{ay-yy}}$, valeur d'un arc de cercle dont le diamètre est a ; ce qui pour le remarquer en passant est une démonstration bien courte & bien aisée, de cette partie de la découverte de M. Hughens démontrée avec tant de peine, que les tems par differens arcs AGB d'une Cycloïde sont entr'eux comme les arcs correspondans MIS du cercle générateur.

L'autre Courbe AED dont les ordonnées doivent être égales à la fraction $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, se construira plus aisément, si on met dans cette fraction pour m & n leurs proportionnelles $LB(y)$, & LQ , qui n'ayant pas de nom sera désignée par n même; au lieu de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on aura donc $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$. La 4^e proportionnelle à $LB(y)$, $LQ(n)$, $ST(\sqrt{ay-yy})$ est $\frac{n\sqrt{ay-yy}}{y}$; Si on lui ajoute $LB(y)$, on aura une ligne $= \frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$; & prenant une 4^e proportionnelle à cette même ligne $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$, $MN(a)$, $AQ(x+n)$, elle sera $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, qui est la ligne qu'il falloit construire.

Dans cette proportion $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y} . MN(a) :: AQ(x+n) . \frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on s'apperçoit aisément que n (LQ) est égal à $\sqrt{ay-yy}$; car n ayant cette valeur la pro-

portion donne $\frac{yy+ay-yy}{y} (a)$. $MN(a) :: x + \sqrt{ay-yy}$.

$x + \sqrt{ay-yy} \times \frac{a}{y}$; Or cette 4^e proportionnelle étant la valeur de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2} \sqrt{a} \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = x + \sqrt{ay-yy}$;

Il s'ensuit que n prise pour LQ est $= \sqrt{ay-yy}$; ce qui donne la construction de mon premier Memoire: il n'y a qu'à mener dans le cercle generateur la corde MS parallele à la donnée de position, & du point S , SB parallele à AM , le point B est le point cherché, l'ordonnée BL est la valeur de y , l'arc AGB est perpendiculaire à BQ , & par conséquent l'arc demandé AFD perpendiculaire à la donnée de position CD .

FIG. IV.

Dans le cas de la verticale au lieu de $\frac{mx-ny}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2} \sqrt{a} \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, on a $\frac{ax}{y} = \frac{1}{2} \sqrt{a} \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, d'où il vient une construction fort simple pour la Courbe AED : car prolongeant $LB(y)$ jusqu'à ce qu'elle rencontre en V , NV parallele à AM , on aura $LV = MN = a$, & menant VR parallele à BA , on aura $RL = \frac{ax}{y}$; ainsi sur VL prolongé du côté de L prenant $LQ = LR$, le point E fera à la Courbe, & faisant de même pour tous les y , la Courbe sera décrite. Comme dans l'autre Courbe on a par tout $LP = \frac{1}{2} \sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = x + \sqrt{ay-yy} = AL + ST$, il est visible que lorsque $AL(x)$ deviendra AM qui est égale à la demie circonference MSN , LE deviendra en même tems MD qui est aussi égale à la demie circonference MNS : l'on aura donc en ce point $\frac{ax}{y} = \frac{1}{2} \sqrt{a} \times \int \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = x + \sqrt{ay-yy} = x + 0$ ($\sqrt{ay-yy}$ s'évanouissant au point M), & $LB(y) = a$.

Dans ce cas de la verticale, les deux Courbes ne peuvent se rencontrer qu'au point D qui répond au point M : les ordonnées de l'une $AL + ST$ étant toujours plus grandes que celles de l'autre $AL + AR$, puisque AR est toujours plus petite que ST , excepté lorsque le point L

se confond avec le point M ; car alors le point S se confondant avec le point A , AR s'évanouit aussi, & il ne reste que $AL=AM$ pour ordonnée aussi-bien que pour abscisse de l'une & de l'autre Courbe.

Au reste il n'est pas difficile de voir que ST est toujours plus grande que AR ; car NS étant parallèle à la Tangente au point B ; NG , qui est parallèle à la corde AB de la Cycloïde, doit tomber sur un point G plus proche de T que le point S ; mais $TG=BO=AR$; donc TS est plus grande que AR .

On trouve ici une maniere plus simple encore & plus aisée que la précédente de construire les deux Courbes qui déterminent le point L par leur intersection. Laisant la partie commune AL , il ne faut que prendre les ST pour ordonnées de l'une, & les GT pour ordonnées de l'autre ; il est évident que ST & GT s'évanouissant ensemble quand L tombe en M , les deux Courbes ApM , AeM , se rencontreront en ce point, & ne se rencontreront qu'en ce point ; ce qui donne toujours $y=a$.

Si les Courbes semblables proposées sont des cercles, & que le demi-diametre de celui qu'on prendra pour constant, soit a ; on aura

$$\int \frac{dz}{\sqrt{y}} = \int \frac{ady}{\sqrt{aay-yy^3}}, \text{ \& la Courbe } APD$$

se construira par des arcs de Lemniscate de cette maniere. Sur l'axe AM du cercle ABM pris pour constant décrivez le quart d'une Lemniscate, & du point A menez une corde AH moyenne proportionnelle entre AM (24), & $2LB$ (2y) égale par conséquent à $2\sqrt{ay}$; elle déterminera l'arc AIH : prenez $LP =$ à cet arc, le point P fera à la Courbe APD qu'on avoit à construire. On trouve cette construction dans les Actes de Leipsik que j'ai déjà citez, pag. 225 ; elle est de feu M. Jacques Bernoulli, qui n'a fait que l'indiquer, de même que M. Bernoulli son Frere la construction générale que nous avons vûe ; en voici l'analyse & la démonstration.

Soit $AK=z$, & $KH=v$. L'équation à la Lemniscate donnant $zz + vv = 2a\sqrt{zz-vv}$, on en tire $v =$

FIG. V.

$+V+2a\sqrt{2zz+aa}-2aa-zz; \& vv = +2a\sqrt{2zz+aa}-2aa-zz$: mais on a $AH^2 = AK^2 + KH^2 = zz + vv = 4ay$
 (par construction); donc $4ay = 2a\sqrt{2zz+aa}-2aa$; ou
 $2ay+aa = a\sqrt{2zz+aa}$; d'où, en quarrant de part & d'au-
 tre, on tirera $zz = 2yy + 2ay$; & $z = \sqrt{2ay+2yy}$; $dz =$
 $= \frac{ady+2ydy}{\sqrt{2ay+2yy}}$, & $dz^2 = \frac{4yydy^2-4aydy^2+aa dy^2}{2yy+2ay}$. $zz + vv = 4ay$
 donne aussi $vv = 4ay - zz = 4ay - 2yy - 2ay$ (en mettant
 pour zz sa valeur $2yy + 2ay$) $= 2ay - 2yy$; donc $v =$
 $\sqrt{2ay-2yy}$; $dv = \frac{ady-2ydy}{\sqrt{2ay-2yy}}$; & $dv^2 = \frac{4yydy^2-4aydy^2+aa dy^2}{2ay-2yy}$.
 On aura donc $dz^2 + dv^2 = \frac{aa+4ay+4yy \times dy^2}{2ay+2yy} + \frac{aa-4ay+4yy \times dy^2}{2ay-2yy}$.

En multipliant en croix le dernier membre de cette éga-
 lité pour lui donner un dénominateur commun, & faisant
 ensuite les réductions nécessaires, il viendra $dz^2 + dv^2 =$
 $= \frac{a^3 dy^2}{aay-y^3}$; $\sqrt{dz^2 + dv^2}$ (Element de l'arc AH) $= \frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{aay-y^3}}$;
 & faisant $a=1$, $\sqrt{dz^2 + dv^2} = \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}}$, & $\int \sqrt{dz^2 + dv^2} =$
 $= \int \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} =$ à l'arc de la Lemniscate. La Courbe APD
 formée par ces arcs de Lemniscate est donc celle qu'il
 falloit construire, & dont les ordonnées doivent être
 $= \int \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} = \int \frac{ady}{\sqrt{aay-y^3}}$.

Il est bon de remarquer, que lorsque le point L tom-
 be sur le centre du cercle AGB pris pour constant, la
 corde AH de la Lemniscate devient AM , le point H
 tombant sur le point M , & l'ordonnée PL est alors égale
 au quart ALM de la Lemniscate. Lorsque le point L
 tombe au-delà du centre par rapport au point A , comme
 en l , le point H tombe au point h d'un autre quart de la
 Lemniscate qu'il faut concevoir décrit au dessous de l'axe
 AM ; de sorte que l'arc Ahb est plus grand que le quart
 AIM ; & c'est ce qui a fait dire à M. Bernoulli, lorsque
 BL devient bl , de prendre pour LE l'arc AIM , plus
 l'arc HM , qui est égal à l'arc Mb . Enfin quand le point
 L tombe en M , le point h tombe en A , & l'arc Ahb est
 égal

FIG. VI.

égal à 2 fois le quart entier *AIM* de la Lemniscate; ce qui fait voir que les ordonnées de la Courbe *APD* augmentent toujours jusqu'à ce qu'elles deviennent égales à la demie circonference entiere de la Lemniscate.

Je viens à la Courbe *AED*: M. Jacques Bernoulli donne cette construction pour le cas particulier où la donnée de position est verticale. Il dit de prendre *LE* 4^e proportionnelle aux droites *AH*, *AM*, & *2CF*, & ne s'explique pas davantage. Dans le cas de la Verticale on a $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; ainsi *LE* doit être égale à la fraction $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$; si l'on en chasse les differences il viendra $\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y\sqrt{y}}$; c'est cette expression qui fournit la construction de M. Bernoulli; car par la propriété du cercle on a *BL* (*y*). *AL*, ou *AC*—*LC* (*a*— $\sqrt{aa - yy}$) :: *MC* (*a*). *CF* ($\frac{aa - a\sqrt{aa - yy}}{y}$); & suivant l'analogie qu'il prescrit, *AH* ($2\sqrt{ay}$ ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour *a* l'unité). *AM* (*2a*) (ou seulement 2) :: *2CF* ($\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y}$) : *LE* ($\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y\sqrt{y}}$).

Mais l'expression differentielle $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$, sans aller plus loin présente une construction facile, & qui revient à très-peu près à la même. Il ne faut que mener la Tangente *BT*, & *AS* parallele à cette Tangente, on aura *LT*. *BT* :: *dx*. *dz* :: *AL* (*x*). *AS* ($\frac{x dz}{dx}$), & la 4^e proportionnelle aux trois

droites *AH*, *AM*, *2AS*, fera $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$. Il est évident que si dans ce même cas de la verticale les Courbes semblables étoient des Paraboles, dont la Constante eût *a* pour parametre; & qu'en rejetant $\frac{1}{2}\sqrt{y}$ de l'autre côté, au lieu de $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, on fit $\frac{xdz}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; la Courbe *AED* seroit une Hyperbole équilatere qui auroit pour axe déterminé $\frac{1}{4}a$; car $\frac{xdz}{dx}$ est la valeur de la demi-tangente de

la Parabole $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$; & la Courbe formée par ces demi-tangentes comme ordonnées, est visiblement une

Hyperbole équilatere dont l'axe déterminé est égal à $\frac{1}{4} a$.

Revenant aux Cercles ; dans le cas general d'une donnée de position , faisant un angle quelconque avec l'axe

AM , qui est notre cas , au lieu de l'expression $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}}$ \times

$\frac{dz}{m dx + n dy}$, (valeur des Ordonnées de la Courbe AED) l'é-

vanouissement des différences donne $\frac{2aam-2am\sqrt{aa-yy}+2any}{my\sqrt{y}+n\sqrt{aa-yy}-y^3}$,

& mettant pour m & n leurs proportionnelles $LB(y)$ & LQ

(qui sera désignée par n même) $\frac{2nay-2ay\sqrt{aa-yy}+2any}{yy\sqrt{y}+n\sqrt{aa-yy}-y^3}$; où

divisant par \sqrt{y} , $\frac{2\sqrt{y} \times a - \sqrt{aa-yy} + n \times a}{yy + n\sqrt{aa-yy}}$, d'où je tire cette

FIG. VI. construction très-simple : Menez QG perpendiculaire sur le rayon CB , & prenez la 4^e proportionnelle à BG , AQ ,

AH , elle sera $= \frac{2\sqrt{y} \times a - \sqrt{aa-yy} + n \times a}{yy + n\sqrt{aa-yy}}$. On le verra sans

peine , si l'on mene encore LO parallèle à QG ; car on aura, 1°. $CB(a) \cdot BL(y) :: BL(y) \cdot BC\left(\frac{yy}{a}\right)$; 2°. $CB(a) \cdot$

$CL(\sqrt{aa-yy}) :: QL(n) \cdot GO\left(\frac{n+\sqrt{aa-yy}}{a}\right)$; 3°. BG ou

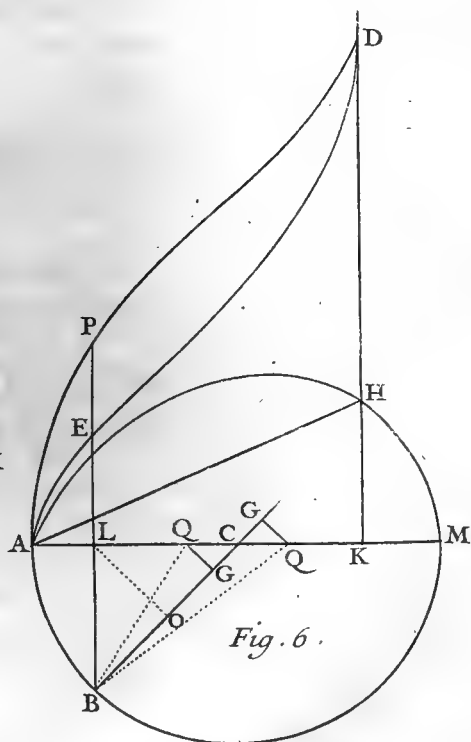
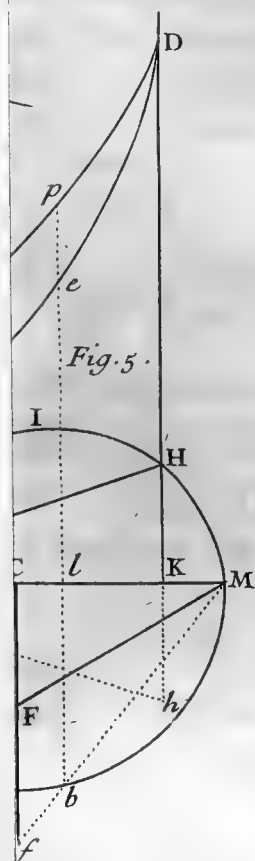
$BO + OG\left(\frac{yy+n\sqrt{aa-yy}}{a}\right) \cdot AQ$ ou $AC - CL + LQ(a -$

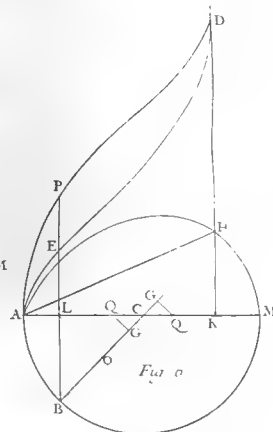
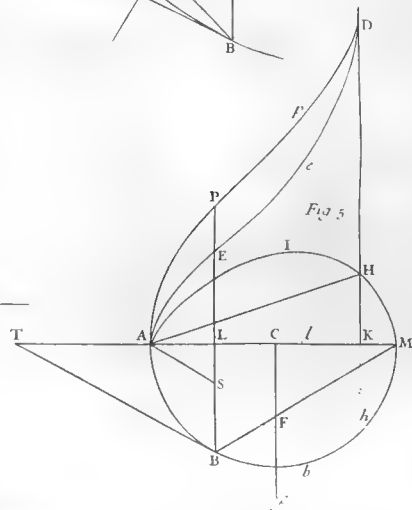
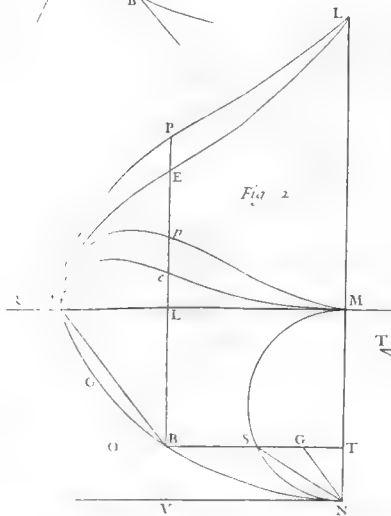
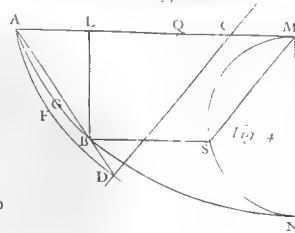
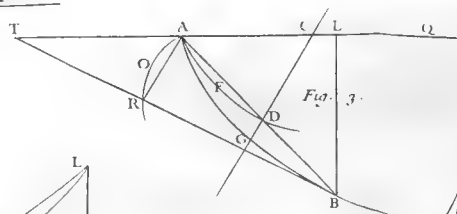
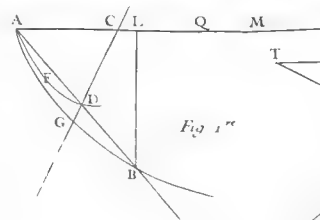
$\sqrt{aa-yy} + n) :: AH(2\sqrt{ay}$, ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour a

l'unité) $\cdot \frac{2\sqrt{y} \times a - \sqrt{aa-yy} + n}{yy + n\sqrt{aa-yy}}$; ce qu'il falloit construire

& démontrer.







DES MOUVEMENTS

Commencés par des vitesses quelconques, & ensuite primitivement accélérés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du mobile.

PAR M. VARIGNON.

DAns le Memoire du 15 Juin dernier, on a vû ce que des Mouvements primitivement accélérés en raison des tems écoulés, en commençant à zero de vitesse, deviendroient dans des milieux résistans en raison des quarrés de celles que le mobile y auroit effectivement malgré les résistances de ces milieux; quelles seroient alors les vitesses de ce mobile, les espaces qu'il parcourroit, &c. Voici présentement ce qui arriveroit aussi dans ces milieux à des mouvements commencés par des vitesses quelconques, & ensuite accélérés encore primitivement en raison des tems écoulés, c'est-à-dire, qui dans un milieu sans résistance ni action auroient encore des accroissemens égaux de vitesse en tems égaux, ainsi que Galilée le suppose dans la chute des corps. Nous nous servirons pour cela de deux Lemmes par où commence le Memoire qu'on vient de citer, & qu'on citera encore dans la suite.

1709.
17. Aoust.

PROBLÈME.

La construction générale du Lem. I. art. 4. pag. 195. étant ici supposée, trouver les Courbes ARC des résistances totales ou des vitesses perduës; HUC, des vitesses restantes ou actuelles, &c. Dans l'hypothese 1°. des résistances en raison des quarrés de ces vitesses actuelles; & 2°. des vitesses primitives en raison des sommes faites d'une constante quelconque augmentée d'autres qui croitroient en

FIG. I.
II.
III.

raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi qu'il arriveroit dans l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur, si d'une force quelconque différente de la pesanteur constante d'un corps, on le jetoit verticalement de haut en bas dans un milieu sans résistance ni action.

SOLUTION.

I. Suivant le Lem. 1. pag. 194. & son art. 4. p. 195. en se servant toujours des noms qui y sont supposés, la premiere des deux hypothèses qu'on fait ici, y donnera encore, comme dans la Solut. 1. du Probl. de la pag. 196. $TE(z) = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{RV \times RV}{AB} \left(\frac{uu}{a} \right) = \frac{TV - TR^2}{AB} \left(\frac{v-r}{a} \right)$ en supposant $AB = a$ constante; & la 2^e donnera, $TV(v) = TX + XV(b+t)$: de sorte que les deux ensemble donneront pareillement ici $z = \frac{uu}{a}$, & $z = \frac{b+t-r^2}{a}$. Donc en substituant chacune de ces deux valeurs de z dans l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt-du}{z}$ de cet art. 4. pag. 195. L'on aura ici $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{b+t-r^2}$ pour l'équation de la Courbe ARC des résistances totales $TR(r)$ ou des vitesses perduës; & $\frac{dt}{a} = \frac{adt-adu}{uu}$, ou $undt = aadt - aadu$, d'où résulte $aadu = aadt - undt$, ou $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, comme dans la Solut. 1. du Probl. de la pag. 196. art. 2. pour l'équation pareillement requise ici de la Courbe HUC des vitesses restantes $TU(u)$: mais avec cette difference que ces vitesses TU commençant (*hyp.*) à zero en A dans ce Prob. de la pag. 196. & ici à AH (Lem. 1. art. 4. p. 195.) $= AF(b)$; la Courbe HUC doit ici passer par un point H de AB perpendiculaire en A sur l'axe ATC , & prolongée où besoin sera du côté de B , lequel point H donne $AH = AF(b)$, au lieu que dans le Prob. de la pag. 196. art. 4. cette Courbe des vitesses restantes (u) doit passer par A , comme dans la fig. 1. qu'on voit ici.

II. Si l'on prend encore ici $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, comme dans la Solut. 1. du Prob. de la p. 196. art. 3. On trouvera ici comme

là, $\frac{adu}{aa-au} \left(\frac{dt}{a} \right) = \frac{dx}{2x}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, qui est une équation à une Logarithmique d'une soûtangente $= \frac{1}{2}a$, & d'ordonnées $= x$ perpendiculaires à son asymptote dont les abscisses correspondantes sont $= t$. Pour décrire cette Logarithmique il faut considérer

1°. Que l'équation supposée $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ rend $\frac{x-a}{x+a} \times a = b$

lorsque $u = b$, c'est-à-dire, $x = \frac{aa+ab}{a-b}$ au commencement du mouvement dont on suppose que b est la première vitesse (u) ; & après avoir pris $AB = a$, $AH = b$, sur une perpendiculaire en A à la droite ATC , si l'on y prend $AP = \frac{aa+ab}{a-b} = \frac{AB+AH}{AB-AH} \times AB = \frac{AB+AH}{\pm HB} \times AB$, le signe supérieur du dénominateur étant pour les Fig. 1. 2. & l'inférieur pour la Fig. 3. l'on aura P pour un des points de la Logarithmique requise, & ATC pour son asymptote.

2°. Que le cas de $u(TU) = a(AB)$ réduisant à $x - a = x + a$ l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ du présent art. 2. on verra aussi que cela ne pouvant arriver que lorsque x est infinie, la Logarithmique cherchée doit non-seulement (*nombr. I.*) passer par P , mais aussi aller en s'écartant de son asymptote du côté de C .

III. Si donc on prend PLC pour cette Logarithmique ; laquelle ait (*art. 2.*) ses soûtangentes (sur son asymptote ATC) chacune $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$, & ses ordonnées TL (parallèles à AB) $= x$, lesquelles prolongées la rencontrent en L , son asymptote en T , & les droites BC , FXC , FVC , en S , X , V , les deux premières BC , FXC , étant parallèles à ATC , & la troisième FVC étant inclinée de 45 deg. sur elles.

Cela fait, si l'on considère encore que l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$ de l'art. 2. vient d'y donner (*nombr. I.*) $AP = \frac{aa+ab}{a-b} = \frac{AB+AH}{AB-AH} \times AB = \frac{AB+AH}{\pm HB} \times AB$ lorsque $TU(u) = AH(b)$, c'est-à-dire, lorsque TU est en AH , & $TL(x)$ en AP ; on verra que lorsque $AH(b)$ est plus grande que

$AB(a)$ comme dans la fig. 3. cette premiere ordonnée AP de la Logarithmique PLC , & par conséquent aussi les autres ordonnées $TL(x)$ doivent être négatives de ce qu'elles sont lorsque $AH(b)$ est égale ou moindre que $AB(a)$ comme dans les fig. 1. 2. Donc en prenant les x (LT) de l'équation $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, positives dans les fig. 1. 2. on les aura négatives dans la fig. 3. c'est-à-dire qu'elles s'y changeront en $-x$; ce qui changera aussi cette équation

$$u = \frac{x-a}{x+a} \times a \text{ supposée pour les fig. 1. 2. en } u = \frac{-x-a}{-x+a} \times a = \frac{x+a}{x-a} \times a \text{ pour la fig. 3. De sorte que dans les fig. 1. 2.}$$

$$\text{l'on aura } TU(u) = \frac{x-a}{x+a} \times a = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST};$$

$$\& \text{ dans la fig. 3. } TU(u) = \frac{x+a}{x-a} \times a = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}; \text{ c'est-à-dire en général } TU(u) = \frac{LT \pm ST}{LT \mp ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT \pm ST}, \text{ les signes superieurs dans ces fractions étant pour les fig. 1. 2. \& les inferieurs pour la fig. 3.}$$

IV. Donc en prenant par tout $TU(u)$ de cette valeur, c'est-à-dire, $TU = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST}$ dans les fig. 1. 2.

& $TU = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$ dans la fig. 3. la ligne HUC , qui passera par tous les points U ainsi trouvés, sera la Courbe ici requise des vitesses (u) restantes des primitives (v) supposées, malgré les résistances pareillement supposées. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

V. Cette Courbe HUC des vitesses (u) restantes des primitives (v) malgré les résistances supposées, étant ainsi décrite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR = TV$ (*hyp.*) $= AT + AF$ (*art. 1.*) $= AT + AH$; & la ligne ARC qui passera par tous les points R ainsi trouvés, sera ici (*Lem. 1. pag. 194.*) la Courbe des résistances totales (r) ou des vitesses perduës, exprimée (*art. 1.*) par l'équation

$$\frac{dt}{a} = \frac{adr}{b+s-r}. \text{ Ce qu'il falloit aussi trouver.}$$

COROLLAIRE I.

Puisque la Solution (art. 2. nomb. 1.) donne $AP = \frac{aa+ab}{a-b}$, il est manifeste que $LT(x)$ en AP , doit y donner aussi $x = \frac{aa+ab}{a-b}$; & qu'ainsi son art. 2. donnant en general $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, d'où résulte $xu+au = ax-aa$, ou $aa+au = ax-xu$, & conséquemment aussi $x = \frac{aa+au}{a-u}$; LT en AP doit pareillement y donner $\frac{aa+ab}{a-b} = \frac{aa+au}{a-u}$, ou $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+u}{a-u}$, d'où résulte $aa+ab-au-bu = aa+au-ab-bu$, c'est-à-dire, $ab-au=au-ab$, ou $2ab=2au$; & par conséquent $u(TU) = b(AF)$. Mais LT en AP , rend TU en AH . Donc la premiere AH des vitesses $TU(u)$ au commencement A du tems AT , est par tout ici égale à l'initiale $AF(b)$ conformément à l'art. 4. du Lem. 1. pag. 195. cité pour cela dans l'art. 1. de la Solution précédente.

COROLLAIRE II.

L'équation $TU(u) = \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution pour les fig. 1. 2. dans lesquelles AH est (*hyp.*) moindre que AB , fait voir que les vitesses restantes $TU(u)$ y doivent toujours croître depuis la premiere $AH(b)$; puisque le raport $\frac{LS}{LT+ST}$ ou $\frac{LT-ST}{LT+ST}$ croît avec LS ou LT , qui y croissent (Solut. art. 2. nomb. 2.) à l'infini du côté de C .

COROLLAIRE III.

Au contraire l'équation $TU(u) = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$ trouvée aussi dans l'art. 3. de la Solution pour la fig. 3. dans laquelle AH est (*hyp.*) plus grande que AB , fait voir que les vitesses restantes $TU(u)$ y doivent toujours diminuer depuis la premiere $AH(b)$; puisque le raport $\frac{LT+ST}{LT-ST}$ croissant (Corol. 2.) avec les LT , le raport $\frac{LT+ST}{LT-ST}$ doit au contraire diminuer à mesure que ces LT aug-

272 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
mentent, c'est-à-dire (*Solut. art. 2. nomb. 2.*) à l'infini du
côté de *C*.

COROLLAIRE IV.

Quoique les *TU* croissent à l'infini (*Corol. 2.*) depuis
AH du côté de *C* dans les fig. 1. 2. & qu'elles diminuent
au contraire à l'infini (*Corol. 3.*) du côté de *C* dans la fig. 3.
Celles des fig. 1. 2. ne peuvent jamais être plus grandes, ni
celles de la fig. 3. moindres que *AB*, même quand *AT*
feroit infinie; puisque *AT* infinie rendant (*Solut. art. 2.*
nomb. 2.) *LT* pareillement infinie, & conséquemment la
finie *ST* nulle par rapport à *LT*, l'équation générale
$$TU = \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB$$
 trouvée dans la *Solut. art. 3.* pour
tous les cas des fig. 1. 2. 3. se réduiroit alors à $TU = \frac{LT}{LT}$
 $\times AB = AB$. Ce qui fait voir que dans quelque cas que
ce soit, la Courbe *HUC* des vitesses restantes *TU* (*u*) ne
peut arriver jusqu'en *BC* parallele à *ATC*, qu'à une di-
stance infinie de *AB* perpendiculaire à ces paralleles par
l'origine *A* des tems ou des abscisses *AT*; & qu'ainsi dans
tous les cas imaginables cette droite *BC* doit être une
asymptote de la Courbe *HUC* des vitesses *TU* (*u*) re-
stantes ici malgré les résistances supposées. Ce qu'on a
déjà vû dans le *Corol. 1.* de la pag. 198. pour le cas de la
fig. 1. où ces vitesses commencent (*hyp.*) à zero.

COROLLAIRE V.

Puisque *TU* en *AH*, y rend par tout (*Corol. 1.*) $u=b$,
l'équation (*Solut. art. 1.*) $dt = \frac{aadu}{aa-uu}$ de la Courbe *HUC*;
doit s'y changer en $dt = \frac{aadu}{aa-bb}$; Ce qui fait voir que cette
Courbe doit rencontrer *AB* (prolongée où besoin sera)
en *H* sous un angle *BHU* dont le sinus soit à celui de son
complement à un droit :: *aa*. *aa-bb*.

COROLLAIRE VI.

Pour la Courbe *ARC*, dont (*Solut. art. 1. & 5.*) l'équation
est

est $dt = \frac{aadr}{b+t-r}^2$, elle doit rencontrer son axe en A , sous un angle TAR dont le sinus soit à celui de son complément :: $bb . aa$. Puisque $TR (r)$ en A , rendant $r=0$, & $t=0$, réduit cette équation à $dt = \frac{aadr}{bb}$. Et les dr croissant ou décroissant ici avec les $b+t-r$ (u ou TU) correspondantes, cette Courbe ARC tournera sa convexité ou sa concavité en même sens ou du même côté que la Courbe HUC tournera la sienne.

COROLLAIRE VII.

On vient de voir dans le Corol. 4. que lorsque AH (fig. 1. 2.) est moindre que AB , les vitesses $TU (u)$ croissent toujours jusqu'à BC ; & que lorsque AH (fig. 3.) est plus grande que AB , ces vitesses TU décroissent toujours jusqu'à la même BC , à laquelle ce Corol. 4. fait voir qu'elles n'aboutiront, ou ne deviendront égales à AB de part & d'autre qu'après un tems infini $AT (t)$, qui à la fin rendra $TU (u) = AB (a)$, & changera ainsi l'équation

$$dt = \frac{aadu}{aa-uu} \text{ de la Courbe } HUC \text{ en } dt = \frac{aadu}{aa-aa} = \frac{aadu}{0}.$$

Donc alors les accroissemens ou décroissemens du se trouvant nuls, si le mouvement continuoit, ce seroit après cela d'une vitesse constante $= AB (a)$ qui le rendroit uniforme. Aussi ce cas de $u=a$, changeant l'équation $v-r=u$ trouvée dans le Lem. 1. art. 1. pag. 194. en $v-r=a$, donneroit alors $dv-dr=0$, ou $dv=dr$, c'est-à-dire (remarq. 1. pag. 209.) la pesanteur du Mobile égale à la résistance que lui feroit alors le milieu supposé, en regardant cette pesanteur constante comme cause de l'accélération primitive (dv) continuellement ajoutée à la vitesse initiale $AH (b)$ laquelle fût ici de projection verticale de haut en bas; & cette égalité de la pesanteur du mobile avec la résistance qui s'opposeroit ici à la vitesse $AB (a)$, empêchant également l'une & l'autre de rien changer à cette vitesse, cette même vitesse non-seulement resteroit uniforme tant que le mouvement continueroit dans le milieu supposé; mais encore seroit la plus grande (appelée terminale par

M. Hughens) que le mobile y pût jamais avoir. Ainsi au langage de M. Hughens la vitesse $AB (a)$, à laquelle dans tous les cas les vitesses restantes $TU (u)$ se réduiroient ici après un tems infini $AT (t)$, seroit égale à la terminale du mobile dans le milieu supposé résistant en raison des quarrés de ces vitesses.

COROLLAIRE VIII.

Donc si la vitesse $AH (b)$ de projection verticale de haut en bas, se trouvoit égale à la terminale $AB (a)$ du corps jetté, c'est-à-dire (*Corol. 7.*) à la plus grande qu'il pût jamais acquérir en vertu de sa seule pesanteur constante en tombant dans le milieu supposé malgré les résistances supposées de ce milieu; le mouvement de ce corps y seroit uniforme à l'infini dès le premier instant de sa chute: puisque ce cas de $u (b) = a$ dès ce premier instant, qui rend dès-lors (comme dans le *Corol. 7.*) la résistance du milieu égale à la pesanteur du mobile, rendant ce corps par leur équilibre comme s'il n'avoit alors aucune pesanteur, ni le milieu aucune résistance, rendroit aussi pour lors la vitesse de projection hors d'état d'être augmentée ni retardée, la pesanteur devant l'emporter sur la résistance pour le premier; & la résistance sur la pesanteur pour le second; ce que leur égalité une fois arrivée ne permet plus.

COROLLAIRE IX.

Cette égalité de la pesanteur constante du mobile avec la résistance du milieu supposé, rendant (*remarq. 1. pag. 209.*) $dr = dv = dt$, fait voir aussi qu'alors la Courbe ARC des résistances totales dégénere en une ligne droite parallèle à FVC , & donne par-là $AF = RV$ (*Solut.*) $= TU$: De sorte que le *Corol. 1.* donnant aussi $AF = AH$ (*hyp.*) $= AB$, on retrouve encore ici $TU (u) = AB (a)$ conformément au précédent *Corol. 8.* C'est-à-dire (comme dans ce *Corol. 8.*) que dès que la vitesse d'un corps jetté verticalement de haut en bas, sera égale à sa terminale, le mouvement en sera uniforme pour toujours après cela. Par conséquent lorsque la vitesse AF ou AH de projection

verticale de haut en bas , sera égale à la terminale AB du corps ainsi jetté , la Courbe HUC dégènerera en une ligne droite confonduë avec son asymptote BC .

COROLLAIRE X.

Mais si la force ou vitesse AH ou (*Corol. I.*) $AF(b)$ de projection étoit nulle , en sorte que le mobile n'eût plus que sa pesanteur pour descendre , ainsi que dans le Prob. de la pag. 196. Le point H se trouvant alors en A aussi-bien que le point F , la Courbe HUC seroit non-seulement la même , mais aussi dans la même position que dans ce Prob. de la pag. 196. qu'on voit n'être qu'un cas de celui-ci , lequel par conséquent donneroit aussi tous les Corollaires qu'on a tirés de celui-là , en faisant ainsi $AH(b) = 0$ dans tout ce qu'on voit ici & dans la suite.

FIG. I.

COROLLAIRE XI.

Il suit encore en général des Corol. 4. & 7. que les vitesses $TU(u)$ restantes de celle de projection verticale de haut en bas , & des primitivement accélérées dont elle est (*hyp.*) augmentée à la fin des tems AT , doivent être ici à la plus grande $AB(a)$ que le mobile y puisse jamais avoir en vertu de sa seule pesanteur , même après un tems infini $:: TU . AB$. Et qu'ainsi (*Lem. 2. pag. 196.*) les espaces ici parcourus en vertu de ces vitesses restantes pendant les tems $AT(t)$ doivent être à ce que le mobile en parcourroit en même tems d'une vitesse uniforme égale à sa terminale ou à la plus grande $AB :: ATUH . ATSB$.

FIG. I.
II.
III.

COROLLAIRE XII.

Quant à la comparaison entr'eux des espaces ici parcourus en vertu des vitesses restantes $TU(u)$ pendant les tems $AT(t)$, on voit (*Lem. 2. pag. 196.*) que ces espaces doivent être ici entr'eux comme les aires correspondantes $ATUH$ (*sudt*). Mais la Solution (*art. 1.*) donnant $dt = \frac{aadu}{aa-uu}$ pour l'équation de la Courbe HUC des vitesses restantes (u), l'on aura *sudt* ($ATUH$) $= \int \frac{aadu}{aa-uu}$. Cela étant ,

I. Soit comme dans l'art. 2. du Corol. 6. de la pag. 200.

M m ij

$yy = aa - uu$, ou $y = \sqrt{aa - uu}$. L'on aura $y dy = -u du$; & par conséquent $\int \frac{aa u du}{aa - uu} (ATUH) = - \int \frac{aa y dy}{yy} = - \int \frac{aa dy}{y} = -aa \times \ln y + q = -aa \times \ln \sqrt{aa - uu} + q$. Mais le cas de $AT = 0$, qui rend aussi $ATUH = 0$, & $TU(u) = AH(b)$, réduit cette intégrale à $0 = -aa \times \ln \sqrt{aa - bb} + q$, d'où résulte $q = aa \times \ln \sqrt{aa - bb}$. Donc cette intégrale complete fera $ATUH = aa \times \ln \sqrt{aa - bb} - aa \times \ln \sqrt{aa - uu} = aa \times \ln \frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ pour tous les cas. Donc aussi (Lem. 2. pag. 196.) les espaces parcourus pendant les tems AT , seront par tout ici entr'eux comme les $aa \times \ln \frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ correspondantes, c'est-à-dire, comme les Logarithmes des fractions correspondantes $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$.

II. Il est à remarquer que les termes $\sqrt{aa - bb}$, $\sqrt{aa - uu}$, de ces fractions ne sont réels que dans le cas de $a > b$, & de $a > u$, exprimé dans les fig. 1. 2. Et que dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, exprimé dans la fig. 3. l'un & l'autre de ces termes est imaginaire : cependant la fraction $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ faite de ces imaginaires, ne laisse pas, non plus que son Logarithme $\ln \frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$, d'être aussi réelle dans ce cas de la fig. 3. que dans celui des fig. 1. 2. où ces termes sont tous deux réels. Pour le voir il n'y a qu'à multiplier l'un & l'autre par -1 , & l'on aura $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}} = \frac{\sqrt{-aa + bb}}{\sqrt{-aa + uu}} = \frac{\sqrt{bb - aa}}{\sqrt{uu - aa}}$, fraction aussi réelle dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, de la fig. 3. que $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ dans celui de $a > b$, & de $a > u$, des fig. 1. 2.

Donc (art. 1.) les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t) seront par tout entr'eux comme les grandeurs $aa \times \ln \frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ correspondantes dans les fig.

1. 2. & comme les correspondantes $aa \times \sqrt{\frac{bb-aa}{uu-aa}}$ dans la fig. 3. ou simplement (à cause de la constante) comme les Logarithmes correspondans $\int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & comme les correspondans $\int \frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3.

III. Mais si du centre A , & du demi-diametre $AB(a)$, on fait le quart de cercle $B\delta\beta$ dans les fig. 1. 2. Et l'hyperbole équilatere $B\delta I$ dans la fig. 3. Lesquels arcs soient rencontrés en \mathcal{Q} , δ , par $H\mathcal{Q}$, $U\delta$, paralleles à la droite CTA , laquelle prolongée dans les fig. 1. 2. rencontre aussi le quart de cercle $B\delta\beta$ en β , en se confondant avec $H\mathcal{Q}$ dans la fig. 1. Soient menés les raïons $A\mathcal{Q}$, $A\delta$, dans le quart de cercle des fig. 1. 2. dans lesquelles, & dans la fig. 3. G est le point où $U\delta$ rencontre AB prolongée dans cette fig. 3. Cela fait, aïant (*Solut.*) dans toutes ces trois figures $AB=a$, $AH=b$, $AG=TU=u$, & les deux premieres fig. 1. 2. aïant de plus $A\delta=AB=a=A\mathcal{Q}$; le quart de cercle $B\delta\beta$ y donnera $H\mathcal{Q}=\sqrt{aa-bb}$, $G\delta=\sqrt{aa-uu}$; au contraire dans la fig. 3. l'hyperbole $B\delta I$ donnera $H\mathcal{Q}=\sqrt{bb-aa}$, $G\delta=\sqrt{uu-aa}$. Donc on aura ici $\int \frac{H\mathcal{Q}}{G\delta} = \int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $\int \frac{H\mathcal{Q}}{G\delta} = \int \frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$

dans la fig. 3. Mais l'art. 2. vient de donner $\int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $\int \frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. pour l'expression des

espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT . Donc ces espaces seront aussi entr'eux dans toutes ces trois figures, c'est-à dire dans tous les cas possibles, comme les Logarithmes $\int \frac{H\mathcal{Q}}{G\delta}$ des fractions correspondantes $\frac{H\mathcal{Q}}{G\delta}$, ou (ce qui revient au même) comme les Logarithmes des raïons de l'ordonnée constante $H\mathcal{Q}$ aux variables $G\delta$ correspondantes à ces tems AT .

IV. Mais après avoir pris $A\beta=AB=a$ sur CTA prolongée dans la fig. 3. comme ci-dessus dans les fig. 1. 2. soit

278 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 imaginée dans toutes trois par β une Logarithmique $I\beta O$
 d'une sôutangente $= A\beta(a) = 1$ sur l'asymptote BA
 prolongée vers O , de laquelle cette Logarithmique s'ap-
 proche de ce côté-là, étant rencontrée en γ, μ , par
 $\mathcal{Q}\gamma, \delta\mu$, parallèles à BO ; desquels points γ, μ , soient les
 ordonnées $\gamma\phi, \mu\psi$, parallèles à BA , & qui rencontrent
 BO en ϕ, ψ . Cela fait, puisque (*hyp.*) $A\beta = 1$, l'on aura
 $A\psi = -\psi\mu = -\log\delta$, & $A\phi = +\log\gamma + \log\mathcal{Q}$, ou
 $+A\phi = \log\gamma = \log\mathcal{Q}$, les signes supérieurs étant pour
 les fig. 1. 2. & les inférieurs pour la fig. 3. Donc $\log\frac{H\mathcal{Q}}{G\delta} =$
 $= \log\mathcal{Q} - \log\delta = +A\phi + A\psi = -\psi$. Par conséquent
 (*art. 3.*) les espaces parcourus pendant les tems AT , se-
 ront pareillement ici comme les abscisses $\phi\psi$ correspon-
 dantes sur BO depuis l'Origine ϕ vers O dans tous les cas.

V. La même chose se peut encore trouver indépen-
 demment de ce qui précède, en imaginant dans les fig.
 1. 2. 3. une petite droite mn parallèle à $\delta\mu$ infiniment près
 d'elle, & qui rencontre $\mu\psi, \beta O$, en m, n . Car ces trois
 figures donneront $\phi\gamma = H\mathcal{Q} = \sqrt{+aa+bb}$, $\psi\mu = G\delta =$
 $\sqrt{+aa+uu}$, & conséquemment $\mu m = \frac{+adu}{\sqrt{+aa+uu}}$: les
 signes supérieurs étant encore par tout ici pour les figu-
 res 1. 2. & les signes inférieurs pour la figure 3. De
 sorte que la Logarithmique $I\beta O$ aiant (*hyp.*) sa sôutan-
 gente $= A\beta = a = 1$, l'on aura par tout ici $\mu\psi$
 ($\sqrt{+aa+uu}$). $a :: \mu m \left(\frac{+adu}{\sqrt{+aa+uu}} \right)$. — $mn = \frac{+adu}{+aa+uu}$.
 c'est-à-dire (en multipliant par -1) $mn = \frac{+adu}{+aa+uu}$. Par

conséquent $\int \frac{+adu}{+aa+uu} = fmn = A\psi + q$, ou $a \times A\psi + q$
 $= \int \frac{+adu}{+aa+uu} = \int \frac{+adu}{aa-uu} = fudt = ATUH$. Mais le cas
 de $ATUH = 0$, qui rendant $G\delta$ en $H\mathcal{Q}$, ou $\mu\psi$ en $\gamma\phi$,
 rend $A\psi = +A\phi$, réduit cette intégrale à $0 = +a \times$
 $A\phi + q$, d'où résulte $q = -a \times A\phi$. Donc $ATUH = a \times$
 $A\psi + a \times A\phi = a \times \psi$ est cette intégrale juste & précise.
 Par conséquent (*Lem. 2. pag. 196.*) les espaces parcourus
 pendant les tems AT , doivent être encore par tout ici

entr'eux comme les grandeurs $a \times \phi\psi$, ou (à cause de a constantes) comme les abscisses $\phi\psi$ correspondantes, ainsi que dans le précédent art. 4.

VI. Le raport de ces espaces entr'eux peut encore se trouver par les Methodes de M. Leibnitz, & de M. (Jean) Bernoulli pour integrer les fractions rationnelles à peu près comme dans le Cor. 6. art. 6. des pag. 201. & 202. dont le cas est ici celui de la fig. 1. Car ces Méthodes donnant $\frac{u du}{a^2 - u^2} =$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{du}{a-u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a+u}, \text{ l'on aura (en intégrant) } \int \frac{a u du}{a^2 - u^2}$$

$$(\int u dt) = - \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a-u} - \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a+u} + q \text{ dans la supposi-}$$

tion de $a=1$, le Logarithme de $a-u$ devant y être négatif, soit que a se trouve plus grand que u comme dans les fig. 1. 2. ou qu'elle se trouve moindre, comme dans la fig. 3. parce que la grandeur $a-u$ seroit plus petite que l'unité dans le premier cas, & négative dans le second.

Mais celui de $\int u dt$ ($ATUH$) = 0, rendant (Corol. 1.) $u=b$, réduit cette intégrale à 0 = $-\frac{a^2}{2} \times \overline{\log a-b} - \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a+b} + q$,

d'où résulte $q = \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a-b} + \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a+b}$. Donc cette in-

tégrale complete fera $ATUH = \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a-b} + \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a+b}$

$$- \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a-u} - \frac{a^2}{2} \times \overline{\log a+u} = \frac{a^2}{2} \times \overline{\log \frac{a-b}{a-u}} + \frac{a^2}{2} \times \overline{\log \frac{a+b}{a+u}}$$

pour tous les cas. Donc aussi (Lem. 2. pag. 196) les espaces parcourus pendant des tems quelconques AT , seront

par tout ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{a^2}{2} \times \overline{\log \frac{a-b}{a-u}} +$

$\frac{a^2}{2} \times \overline{\log \frac{a+b}{a+u}}$ correspondantes, ou simplement (à cause de

la fraction constante $\frac{a^2}{2}$) comme les correspondantes $\overline{\log \frac{a-b}{a-u}}$

$+ \overline{\log \frac{a+b}{a+u}}$, c'est-à-dire, en raison des sommes des Loga-

richmes des fractions $\frac{a-b}{a-u}$, $\frac{a+b}{a+u}$, correspondantes.

VII. La même chose peut se trouver encore par le moyen

de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$.

280 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
trouvée dans l'art. 2. de la Solution. Car cet art. 2. don-
nant aussi $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, l'on aura ici $u dt = \frac{aa}{2} \times \frac{xdx-adx}{xx+ax} =$
 $= \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} - \frac{a^3}{2} \times \frac{dx}{xx+ax}$.

Mais en prenant de plus $\frac{aa}{s} = x$, l'on aura $dx = -\frac{aands}{ss}$,
 $x+a = a + \frac{aa}{s} = \frac{as+aa}{s}$, $xx+ax = \frac{a^3s+a^4}{ss}$; & par
conséquent $\frac{dx}{xx+ax} = \frac{-aands}{a^3s+a^4} = -\frac{1}{a} \times \frac{ds}{a+s}$, ou $-\frac{a^3}{2} \times$
 $\frac{dx}{xx+ax} = \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$. Donc $u dt = \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} + \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$, &
 $\int u dt = \frac{aa}{2} \times \int \frac{dx}{a+x} + \frac{aa}{2} \times \int \frac{ds}{a+s} + q$.

Or l'équation $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$ donne $x = \frac{aa+au}{a-u}$: de forte
qu'ayant aussi $x = \frac{aa}{s}$, l'on aura pareillement ici $\frac{aa}{s} =$
 $= \frac{aa+au}{a-u}$, ou $s = \frac{aa-au}{a+u}$; & de ces valeurs de x, s , il ré-
sulte $a+x = a + \frac{aa+au}{a-u} = \frac{aa-au+aa+au}{a-u} = \frac{2aa}{a-u}$, & $a+s$
 $= a + \frac{aa-au}{a+u} = \frac{aa+au+aa-au}{a+u} = \frac{2aa}{a+u}$. Donc $\int u dt = \frac{aa}{2} \times$
 $\int \frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a+u} + q$.

Mais le cas de $\int u dt$ (ATUH) = 0, rendant $u = b$, ré-
duit cette intégrale à 0 = $\frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a-b} + \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a+b} + q$,
d'où résulte $q = -\frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a+b}$. Donc cette
intégrale complete sera $ATUH = \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times$
 $\int \frac{2aa}{a+u} - \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times \int \frac{2aa}{a+b} = \frac{aa}{2} \times \int \frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times \int \frac{a+b}{a+u}$,
comme dans le précédent art. 6. Donc aussi (Lem. 2. pag.
196.) les espaces parcourus seront encore ici, comme
là, en raison des sommes des Logarithmes des fractions
 $\frac{a-b}{a-u}, \frac{a+b}{a+u}$, correspondantes.

VIII. Pour voir comment ces deux derniers articles
s'accordent avec les précédens, il n'y a qu'à considérer
que suivant la nature des Logarithmes, la somme de deux
Logarithmes

Logarithmes vaut toujours le Logarithme du produit des deux grandeurs dont ils sont Logarithmes, & que la moitié du Logarithme de ce produit vaut aussi toujours la Logarithme de la racine de ce même produit : suivant cela

on verra que $\int \frac{a-b}{a-u} + \int \frac{a+b}{a+u} = \int \frac{a-b \times a+b}{a-u \times a+u} = \int \frac{aa-bb}{aa-uu}$, &

$\frac{1}{2} \times \int \frac{aa-bb}{aa-uu} = \int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Donc $\frac{1}{2} \times \int \frac{a-b}{a-u} + \frac{1}{2} \times \int \frac{a+b}{a+u} =$

$= \int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Par conséquent les espaces exprimés par le

premier membre de cette dernière égalité dans les art. 6. 7. sont les mêmes que le second membre de cette même égalité exprime dans les articles qui les précédent. Ainsi tous ces articles sont parfaitement d'accord entr'eux touchant les espaces dont ils donnent les rapports.

IX. Ces mêmes espaces se trouveront aussi par des séries ou suites infinies, en continuant à l'infini la division de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ comme l'on a fait dans l'art. 8. du Corol. 6. pag. 203.

Car cette division infinie donnant $\frac{aaudu}{aa-uu} (sudu) = \pm udu$

$\pm \frac{u^3 du}{aa} \pm \frac{u^5 du}{a^4} \pm \frac{u^7 du}{a^6} \pm \frac{u^9 du}{a^8} \pm \&c.$ dont les signes supérieurs sont pour les fig. 1. 2. dans lesquelles $a > u$ rend la

différentielle de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ positive, & les inférieurs pour la fig. 3. dans laquelle $a < u$ rend cette différentielle négative; l'on aura, en intégrant, $sudu (ATUH) = \pm \frac{uu}{2} \pm$

$\frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a^6} \pm \frac{u^{10}}{10a^8} \pm \&c. + q.$ Mais le cas de $ATUH$

$= 0$, rendant $u=b$, réduit cette intégrale à $0 = \pm \frac{bb}{2} \pm$

$\frac{b^4}{4aa} \pm \frac{b^6}{6a^4} \pm \frac{b^8}{8a^6} \pm \frac{b^{10}}{10a^8} \pm \&c. + q$; d'où résulte $q = \pm \frac{bb}{2}$

$\pm \frac{b^4}{4aa} \pm \frac{b^6}{6a^4} \pm \frac{b^8}{8a^6} \pm \frac{b^{10}}{10a^8} \pm \&c.$ Donc cette intégrale

complète sera $ATUH = \pm \frac{uu}{2} \pm \frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a^6} \pm \frac{u^{10}}{10a^8}$

$\pm \&c. \dots \pm \frac{bb}{2} \pm \frac{b^4}{4aa} \pm \frac{b^6}{6a^4} \pm \frac{b^8}{8a^6} \pm \frac{b^{10}}{10a^8} \pm \&c.$ Les signes supérieurs étant encore pour le cas des fig. 1. 2. & les inférieurs pour celui de la fig. 3. Donc (Lem. 2. p. 196.) les espa-

282 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 ces parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$, se-
 ront encore ici dans tous les cas comme ces *series* ou suites
 correspondantes continuées à l'infini.

COROLLAIRE XIII.

Le rapport de ces espaces parcourus pendant les tems AT ,
 peut encore se trouver par le moien d'une hyberbole équi-
 latere IXO qui passe par l'angle X d'un quarré $ABYX$ fait
 sur AB , entre les asymptotes BI , BA prolongée vers O ,
 tout ce qu'on voit des fig. 1. 2. 3. dans les fig. 4. 5. 6. y de-
 meurant le même que là. Car si par le point Q , & par
 chaque point δ , dans lesquels le quart de cercle $B\delta\beta$ des fig.
 4. 5. & l'hyperbole $B\delta I$ de la fig. 6. sont rencontrés par
 HQ , $U\delta$, parallèles à BI , on mène les ordonnées à MN ,
 & RZ avec son infiniment proche rz , lesquelles rencon-
 trent l'hyperbole IXO en N , Z , z , & son asymptote BI
 en M , R , r ; cette hyperbole donnera $RZ = \frac{AB \times AX}{BR} =$
 $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$, à cause que (*hyp.*) $AX = AB = a$, & que
 $BR = G\delta = \sqrt{\pm aa \pm uu}$, dont les signes superieurs sont
 pour les fig. 4. 5. & les inférieurs pour la fig. 6. Ce qui
 donne aussi $Rr = \frac{udu}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$, en differentiant par \pm les
 $-uu$ ($-TU \times TU$) dans les fig. 4. 5. dans lesquelles les
 TU croissent alternativement avec les BR ou $G\delta$, au lieu
 qu'elles croissent ou plutôt décroissent ensemble dans la
 fig. 6. dans laquelle $+uu$ ($TU \times TU$) vient pour cela
 d'être differentiée par son propre signe $+$. Donc aussi
 $\pm Rr = \frac{\pm udu}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$. Par conséquent $\pm RZ \times Rr$ ($ZRrZ$)
 $= \frac{\pm aa udu}{\pm aa \pm uu} = \frac{aa udu}{aa \pm uu}$ (*Corol. 12.*) $= udt$. Donc *sudt* ($ATUH$)
 $= \pm \int RZ \times Rr = \pm OBRZO + q$, en changeant \pm en \mp ,
 à cause que $OBRZO$ diminuë par tout ici à mesure que
 $ATUH$ croît. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant TU
 en AH , RZ en MN , & $OBRZO = OBMNO$, réduit
 cette intégrale à $0 = \mp OBMNO + q$, d'où résulte $q =$
 $\pm OBMNO$. Donc cette intégrale complete est $ATUH$
 $= \pm OBMNO \mp OBRZO = \pm NMRZ$ (à cause que

du des fig. 4. 5. se change en—*du* dans la fig. 6.) = *NMRZ*.
Donc aussi (Lem. 2. pag. 196.) les espaces ici parcourus pendant les tems *AT*, sont entr'eux comme les aires hyperboliques *NMRZ* correspondantes.

COROLLAIRE XIV.

Outre les manieres précédentes (*Corol.* 12. & 13.) de FIG. I.
II.
III. trouver les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques *AT*, en voici encore une pour les trouver aussi dans tous les cas possibles par le moïen d'une hyperbole équilateredelquelconque *D∞I* ajoutée presentement aux trois précédentes figures entre les asymptotes orthogonales *AB*, *BI*, dans les fig. 1. 2. après y avoir prolongé *CB* vers *I*; & entre les orthogonales *BK*, *BI*, dans la fig. 3. après y avoir aussi prolongé *CB* vers *I*, & de plus *AB* vers *K*: c'est-à-dire en général (après avoir pris *BΔ* = *AB* dans la fig. 3. & avoir ajouté *Δ* en *A* dans les fig. 1. 2. pour l'uniformité de l'expression) par le moïen d'une hyperbole équilateredel quelconque *D∞I* entre les asymptotes orthogonales *BI*, *BΔ*, dans les fig. 1. 2. 3. Pour le voir,

I. Soient prises par tout dans les fig. 1. 2. 3. *ΑΠ*. *ΑΓ*:: *ΑΓ*. *ΑΒ*. Et *ΑΚ*. *ΑΗ*:: *ΑΗ*. *ΑΒ*. Ensuite après avoir mené des points *Δ*, *Π*, *K*, les ordonnées *ΔD*, *Π∞*; *KΥ*, paralleles à *BI*, & qui rencontrent l'hyperbole *D∞I* en *D*, *∞*, *Υ*; soient encore (comme ci-dessus) *ΑΗ* = *b*, *ΑΤ* = *t*, *ΑΓ* (*TU*) = *u*; & de plus les variables *ΑΠ* = *m*, *Π∞* = *n*, avec les constantes *ΔD* = *c*, *BΔ* (*ΑΒ*) = *a*: delà résulte *BΠ* = *a* — *m* dans les fig. 1. 2. & *BΠ* = *m* — *a* dans la fig. 3. c'est-à-dire en generale *BΠ* = $\pm a \mp m$, dont les signes superieurs sont pour les fig. 1. 2. & les inférieurs pour la fig. 3.

II. Cela posé, l'on aura *ΑΒ* (*a*). *ΑΓ* (*u*):: *ΑΓ* (*u*). *ΑΠ* (*m*) = $\frac{uu}{a}$. Et conséquemment aussi *dm* = $\frac{2udu}{a}$. Mais l'hyperbole *D∞I* donne aussi *BΠ* ($\pm a \mp m$). *BΔ* (*a*):: *ΔD* (*c*). *Π∞* (*n*) = $\frac{ac}{\pm a \mp m}$ (en multipliant le haut & le bas de cette fraction par ± 1) = $\frac{\pm ac}{a - m}$ (à cause que *m* = $\frac{uu}{a}$)

donne $a - m = a - \frac{uu}{a} = \frac{aa - uu}{a}$) $= \pm \frac{aac}{aa - uu}$. Donc en général $ndm = \pm \frac{2annudu}{aa - uu}$, ou (en multipliant le tout par $\pm \frac{a}{2c}$) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aandu}{aa - uu}$ (*Corol. 12.*) $= udt$. Par conséquent, en intégrant, l'on aura $\int udt$ (*ATUH*) $\pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \pm \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega} + q$, les $\gamma K \Pi^{\omega}$ croissant avec les *ATUH*. Mais le cas de *ATUH* = 0, qui rendant *AG* = *AH*, rend aussi (*art. 1.*) *AΠ* = *AK*, & conséquemment $\gamma K \Pi^{\omega} = 0$, réduit cette intégrale à $0 = 0 + q$. Donc *ATUH* ($\int udt$) $= \pm \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega}$ (à cause que *du* des fig. 1. 2. se change en $-du$ dans la fig. 3.) $= \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega}$ fera cette intégrale juste & précise. Donc aussi (*Lem. 2. pag. 196.*) les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques *AT* (*t*) en vertu des vitesses restantes ou effectives *TU* (*u*) seront entr'eux comme les aires hyperboliques $\gamma K \Pi^{\omega}$ correspondantes.

III. Il est manifeste qu'au lieu de prendre $\int udt$ (*ATUH*) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \pm \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega} + q$ pour l'intégrale cherchée dans l'art. 2. comme l'on y vient de faire, on y auroit pû prendre aussi $\int udt$ (*ATUH*) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times D\Delta \Pi^{\omega} + q$ pour cette intégrale. Car puisque le cas de *ATUH* = 0, qui rend (*art. 2.*) *AΠ* = *AK*, & conséquemment $D\Delta \Pi^{\omega} = \pm D\Delta KY$, sçavoir $D\Delta \Pi^{\omega} = D\Delta KY$ dans les fig. 1. 2. où ces grandeurs sont également positives, & $D\Delta \Pi^{\omega} = - D\Delta KY$ dans la fig. 3. où la seconde de ces grandeurs est négative par rapport à la première; réduiroit la seconde intégrale *ATUH* $= \frac{a}{2c} \times D\Delta \Pi^{\omega} + q$ à $0 = \pm \frac{a}{2c} \times D\Delta KY + q$, d'où résulte $q = \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY$: il est, dis je, manifeste que cette seconde intégrale complete seroit *ATUH* $= \frac{a}{2c} \times D\Delta \Pi^{\omega} \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY = \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega}$, c'est-à-dire, encore *ATUH* $= \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega}$, de même que de la première *ATUH* $= \pm \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi^{\omega} + q$ dans l'art. 2.

IV. Il est encore visible qu'on auroit aussi trouvé la même intégrale complete en prenant $\int udt (ATUH) = \pm \frac{a}{2c}$
 $\times \int ndm = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + q$. Car puisque le cas de $ATUH=0$, qui rend (*art. 2.*) $A\Pi=AK$, & conséquemment $IB\Pi\varpi I = IBKYI$, réduiroit cette intégrale à $0 = -\frac{a}{2c} \times IBKYI + q$, d'où résulteroit $q = \frac{a}{2c} \times IBKYI$; cette intégrale complete seroit encore ici $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + \frac{a}{2c} \times IBKYI = \frac{a}{2c} \times \gamma K\Pi\varpi$, comme dans les *art. 2. 3.*

V. Donc (*art. 2. 3. 4.*) les trois intégrales primitives $ATUH = \pm \frac{a}{2c} \times \gamma K\Pi\varpi + q$, $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\varpi + q$, $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + q$, donneront également ici $ATUH = \frac{a}{2c} \times \gamma K\Pi\varpi$: c'est-à-dire par tout (*Lem. 2. pag. 196.*) que les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques $AT(t)$ en vertu des vitesses $TU(u)$, feront entr'eux comme les aires hyperboliques correspondantes $\gamma K\Pi\varpi$.

VI. Donc aussi le cas de la vitesse AF ou (*Lem. 1. art. 4. pag. 195.*) $AH=0$, c'est-à-dire des vitesses commencées à zero, rendant (*art. 1.*) $AK=0$, & conséquemment $K\gamma$ en AD dans la *fig. 1.* les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT , feront en ce cas entr'eux comme les aires hyperboliques correspondantes $D\Pi\varpi$, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le *Corol. 9. de la pag. 205.*

FIG. I.

COROLLAIRE XV.

I. Si l'on considère présentement que $\frac{du}{aa-uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a-u}$
 $+ \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a+u}$, & que la Solution donne (*art. 1.*) $\frac{dt}{da} = \frac{du}{aa-uu}$;
 l'on aura ici en général $dt \left(\frac{aadu}{aa-uu} \right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a-u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a+u}$,
 dont l'intégrale est $t(AT) = -\frac{a}{2} \times \ln a-u + \frac{a}{2} \times \ln a+u + q$
 $= \frac{a}{2} \times \ln \frac{a+u}{a-u} + q$, le Logarithme de $a-u$ devant être

FIG. I.
II.
III.

286 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 négatif pour la raison rapportée dans l'art. 6. du Corol. 12.
 Mais le cas de $A(t) = 0$, qui rend $u = b$, réduit cette
 intégrale à $0 = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+b}{a-b} + q$, d'où résulte $q = -\frac{a}{2} \times \int \frac{a+b}{a-b}$.

Donc cette intégrale complete sera $AT = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} -$
 $\frac{a}{2} \int \frac{a+b}{a-b}$. Donc les tems $AT(t)$ employés à parcourir les es-
 paces trouvés dans les Corol. 12. 13. 14. y seront en général,
 c'est-à-dire, dans tous les cas des fig. 1. 2. 3. comme les
 grandeurs correspondantes $\frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} \times \int \frac{a+b}{a-b}$, ou sim-
 plement (à cause de $\frac{a}{2}$ constante) comme les différences
 $\int \frac{a+u}{a-u} - \int \frac{a+b}{a-b}$ des Logarithmes $\int \frac{a+u}{a-u}$, $\int \frac{a+b}{a-b}$, corres-
 pondans.

II. Cela suit encore de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$
 trouvée dans l'art. 2. de la Solution en y supposant $\frac{x-a}{x+a}$
 $\times a = u$. Car cette supposition donnant $ax - aa = xu + au$,
 ou $ax - xu = aa + au$, d'où résulte $x = \frac{aa+au}{a-u}$; l'équation
 $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, donnera encore en général
 (en intégrant) $t(AT) = \frac{a}{2} \times \int x + q = \frac{a}{2} \times \int \frac{aa+au}{a-u} + q$ (en
 prenant $a=1$) $= \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} + q$; d'où résultera (comme
 dans l'art. 1.) $AT(t) = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} \times \int \frac{a+b}{a-b}$ pour cette
 intégrale complete; & conséquemment les tems $AT(t)$
 employés à parcourir les espaces trouvés dans les précé-
 dens Corol. 12. 13. 14. seront encore ici en même raison
 que dans l'art. 1.

III. Ces art. 1. & 2. fournissent encore une nouvelle con-
 struction de la Courbe HUC des vitesses restantes (u)
 malgré les résistances supposées. Car si après avoir fait les
 orthogonales AB , ATC , on prend les abscisses AG de
 la premiere AB (prolongée du côté de B dans la fig. 3.)
 pour ces vitesses restantes ou actuelles (u), & que de la
 même origine A on prenne sur ATC les abscisses $AT =$

$$= \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} \times \int \frac{a+b}{a-b} = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u \times a-b}{a-u \times a+b}$$
 il suit en général des art. 1. 2. que la ligne *HUC*, qui passera par tous les points *U* des parallelogrammes rectangles *AGUT* faits chacun des deux coordonnées *AG* (*u*), *AT* (*t*), ainsi trouvées, sera la Courbe cherchée des vitesses effectives ou restantes (*u*), laquelle servira ici, comme dans l'art. 5. de la Solution à construire l'autre Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perdus.

IV. De ce que (art. 3.) $AT = \frac{a}{2} \times \int \frac{a+u \times a-b}{a-u \times a+b}$, il est encore manifeste que le cas de $u=a$, rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$, rendra aussi pour lors $AT(t) = \frac{a}{2} \times \int \frac{2a \times a-b}{0 \times a+b} = \frac{a}{2} \times \int \frac{2aa-2ab}{0}$ infini : c'est-à-dire non-seulement qu'il faudroit ici dans toutes les fig. 1. 2. 3. un tems infini pour rendre $u(TU) = a$ (*AB*) ; mais encore que l'on y auroit $u(TU) = a$ (*AB*) à la fin d'un tel tems, pendant tout lequel les vitesses *TU* (Corol. 2. 3.) augmenteroient ou diminueroient toujours jusqu'à ce qu'elles fussent enfin devenues égales à cette terminale *AB*. D'où il résulte encore que *BC* doit être une asymptote de la Courbe *HUC* dans tous les cas ; & que la vitesse ne peut être ici uniforme depuis le commencement jusqu'à la fin, que lorsque la première *AH* (*b*) est égale à la terminale *AB* (*a*) ainsi qu'on l'a déjà vû dans les Corol. 4. 7. 8. 9. dont ceci est encore une preuve nouvelle.

L'équation $\frac{dt}{da} = \frac{du}{aa-uu}$ de la Courbe *HUC* des vitesses restantes (*u*) étant ici (Solut. art. 1.) la même que dans l'art. 2. de la Solut. 1. du Probl. des pag 196. 197. avec cette seule différence que le cas de $AT(t) = 0$, qui rend là $TU(u) = 0$, rend ici $TU(u) = AH(b)$; il est manifeste que les deux Remarques faites sur ce Problème-là dans les pag. 209. 210. 211. touchant le rapport qu'y ont entr'elles la pesanteur du mobile, la résistance qui s'oppose à sa chute à chaque instant ; & la différence ou l'excès de force dont cette pesanteur surpasse cette

288 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
résistance : *il est dis-je , manifeste que ces deux Remarques
des pag. 209. 210. 211. conviennent aujji en tout à ce Problème-
ci, excepté que le cas de $t=0$, rend là $u=0$, & ici $u=b$.
Ce seroit donc une repetition inutile que de les rapporter ici.*

SCHOLIE.

I. Pour ce qui est de la Courbe KEC des résistances instantanées (dr), dont les ordonnées sont (*hyp.*) $ET=z$ (dr) $= \frac{uu}{a}$, on trouvera (comme dans le Schol. de la pag. 211.) que son équation est $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{az}-2z\sqrt{az}}$. Mais cette équation, qui dans le Schol. de la pag. 211. faisoit passer cette Courbe par A , la fait passer ici par K dans tous les cas possibles, aiant son ordonnée $AK(\angle) = \frac{bb}{a}(\text{hyp.}) = \frac{AF \times AF}{AB}$ (*Lem. 1. art. 4 pag. 195.*) $= \frac{AH \times AH}{AB}$, c'est-à-dire (*Corol. 14. art. 1.*) la même que l'abscisse asymptotique AK de l'hyperbole $\gamma\varpi I$; puisque $u=b$ (*Corol. 1.*) en A , y rend $z\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{bb}{a}$.

II. Par la même raison l'on aura par tout $TE = A\Pi$; puisque (*hyp.*) $TE=z = \frac{uu}{a}$, & que (*Corol. 14. art. 1.*) $A\Pi = \frac{AG \times AG}{AB} = \frac{TU \times TV}{AB} = \frac{uu}{a}$. D'où l'on voit que le point E de rencontre des droites $A\Pi$, TU , prolongées de ce côté-là, sera un des points de la Courbe KEC ; & ainsi de tous ses autres points à l'infini.

III. on voit aussi de là, suivant le *Corol. 14.* que si l'on eût tracé d'abord la Courbe KEC en y prenant par tout $TE = \frac{TU \times TV}{AB}$ correspondante, c'est-à-dire, TE troisième proportionnelle à AB , TU correspondante; & qu'après avoir aussi tracé une hyperbole équilatere quelconque $\gamma\varpi I$ entre les asymptotes orthogonales $B\Delta$, BI , on eût mené des points K , E , de la Courbe KEC , les droites KT , $E\varpi$, parallèles à BI , lesquelles eussent rencontré l'hyperbole $\gamma\varpi I$ en γ , ϖ , & son autre asymptote $B\Delta$ en K , Π ; le *Corol. 14.* fait, dis-je, voir que l'on auroit eu pour lors, & pour tous les cas possibles, les aires hyperboliques

ques $\gamma\kappa\pi\omega$ en raison des espaces ici parcourus pendant les tems AT correspondans.

IV. L'équation (*art. I.*) $TE=z=\frac{uu}{a}=\frac{TV\times TV}{AB}$ faissant voir que les TE augmentent ou diminuent avec les TU , il est manifeste que puisque la Courbe HUC (*Corol. 4.*) s'approche continuellement de la droite BC à mesure que AT augmente, jusqu'à ce que AT infinie ait rendu $TU=AB$, & conséquemment $TE=\left(\frac{TV\times TV}{AB}\right)=\frac{AB\times AB}{AB}=AB$; la Courbe KEC doit aussi toujours s'approcher de la droite BC jusqu'à ce que AT infinie ait aussi rendu $TE=AB$. D'où l'on voit que cette droite BC doit être une asymptote de la Courbe KEC de même qu'elle en est une (*Corol. 4.*) de la Courbe HUC .

V. L'équation générale (*art. I.*) $dt=\frac{aadz}{2a\sqrt{az}-2z\sqrt{az}}$ se changeant en $dt=\frac{aadz}{2a\sqrt{bb}-\frac{2bb}{a}\times\sqrt{bb}}=\frac{a^3dz}{2aab-2b^3}$ au

point A , qui (*art. I.*) y rend $z(AK)=\frac{bb}{a}$; il est aisé de voir que dans tous les cas possibles la rencontre en K de la Courbe KEC avec la première AK ($\frac{bb}{a}$) de ses ordonnées $TE(z)$, doit se faire sous un angle BKE dont le sinus soit à celui de son complément :: $a^3 \cdot 2aab-b^3$. De sorte que le cas de $b=0$ de la fig. 1. y rendra le premier de ces sinus au second :: $a^3 \cdot 0$. Par conséquent la Courbe KEC y fera touchée en A par son axe ATC , ainsi qu'on l'a déjà vu pour ce cas dans le Schol. nomb. 1. de la pag. 211.

VI. Cette même équation $dt=\frac{aadz}{2a\sqrt{az}-2z\sqrt{az}}$, ou $aadz=2adt\sqrt{az}-2zdt\sqrt{az}$, différentiée (en faissant dt constante) donnant $aaddz=\frac{aadt\sqrt{az}}{\sqrt{az}}-\frac{azdt\sqrt{az}}{\sqrt{az}}-2dt\sqrt{az}=\frac{aa-az-2az}{\sqrt{az}}\times dt\sqrt{az}=\frac{aa-3az}{\sqrt{az}}\times dt\sqrt{az}$; & la Courbe KEC exprimée (*art. I.*) par cette équation générale, aiant $ddz=0$ en son point d'inflexion, si elle en a un; l'on y aura $0=\frac{aa-3az}{\sqrt{az}}\times dt\sqrt{az}$, ou simplement $0=aa-3az$; ce qui donnant $z=\frac{1}{3}a$, fait

290 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
voir que cette Courbe KEC a effectivement un point d'inflexion, mais seulement dans les cas qui peuvent donner $z = \frac{1}{3}a$, c'est-à-dire $TE = \frac{1}{3}AB$. D'où il suit.

1°. Que le cas de la fig. 3. dont la moindre des ordonnées $TE(z)$ est (*art. 4.*) $= AB(a)$, en est exclus.

2°. Que les cas de $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$, $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, en sont aussi exclus dans les fig. 1. 2. puisque la plus petite des $ET(z)$ y étant (*art. 4. 5.*) $= AK = \frac{bb}{a}$, il ne pourroit jamais y avoir de $z(ET) = \frac{1}{3}a$, si $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$; & que si $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, la premiere $AK\left(\frac{bb}{a}\right)$ des ordonnées $ET(z)$ seroit elle-même cette $ET(z) = \frac{1}{3}a$.

3°. Donc (*nomb. 1. 2.*) la Courbe KEC ne peut avoir de point d'inflexion que dans les fig. 1. 2. & seulement lorsque $\frac{bb}{a} < \frac{1}{3}a$, c'est-à-dire, seulement lorsque $b < a\sqrt{\frac{1}{3}}$: dans lequel cas elle en aura toujours un à l'extrémité E d'une ordonnée $TE(z) = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}AB$. Ce qui fait voir que dans la fig. 2. qui ne demande (*hyp.*) que $b < a$, cette Courbe en aura quelquefois un, & quelquefois n'en aura point, selon que $\frac{bb}{a}$ y sera moindre, égale, ou plus grande que $\frac{1}{3}a$; Mais dans la fig. 1. qui exige (*hyp.*) $b=0$, elle en aura toujours un, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le nomb. 2. du Schol. de la pag. 211. pour ce même cas de $b=0$, ou de K en A .

AUTRE SOLUTION.

FIG. VII. I. On vient de trouver (*Sol. 1. art. 1.*) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ pour l'é-
VIII.
IX. quation de la Courbe HUC des vitesses ici restantes (u).
Soit presentement $\pm \frac{a^4}{ss} = aa-uu$, ou $uu = aa \mp \frac{a^4}{ss} = \frac{aass \mp a^4}{ss}$, dont les signes supérieurs sont pour le cas de $a(AB) > b(AF)$ dans les fig. 7. 8. & les inférieurs pour le cas de $a(AB) < b(AB)$ dans la fig. 9. ajoutant dans toutes trois $AB=a$ à la construction générale du Lem. 1. pag. 194. comme dans les fig. 1. 2. 3. de la Solut. 1. L'on

aura par tout ici $u = \frac{a}{s} \sqrt{ss+aa}$, & $du = \frac{-ads\sqrt{ss+aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss+aa}}}{ss}$

$$= \frac{-assds + a^3ds + assds}{ss\sqrt{ss+aa}} = \frac{+a^3ds}{ss\sqrt{ss+aa}}. \text{ Donc } \frac{du}{u} = \frac{ss}{aa-uu} \left(\frac{dt}{au} \right) =$$

$$= \frac{+ds}{\pm a\sqrt{ss+aa}} = \frac{ds}{a\sqrt{ss+aa}}, \text{ ou } dt = \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}} : \text{ c'est-à-dire } dt =$$

$$= \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}} \text{ pour le cas de } a > b \text{ dans les fig. 7. 8. \& } dt = \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}}$$

pour celui de $a < b$ dans la fig. 9. lesquelles équations sont à une même hyperbole équilatère *SMPC* différemment placée sur chacun de ses axes conjugués, aiant son demi-axe transverse $OS = a = AB$; ses abscisses $OQ = s$ prises depuis son centre O sur celui de ses axes qui passe par son sommet S dans le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. & sur son axe conjugué dans le cas de $a < b$ de la fig. 9. & ses appliquées à ces axes, savoir les intérieures correspondantes $QP = \sqrt{ss-aa}$ dans le premier cas, & les extérieures correspondantes $QP = \sqrt{ss+aa}$ dans le second : c'est-à-dire en général $QP = \sqrt{ss+aa}$, dont $-$ est pour les fig. 7. 8. & $+$ pour la fig. 9.

Toutes les lettres *A, Δ, M, H, F, N, λ, S, K*, dans la fig. 7. appartiennent au même point *A* : on n'en a mis une partie en ligne, que faute de place autour de ce point.

II. Pour placer presentement cette hyperbole par rapport au reste commun (*Lem. 1. pag. 194.*) à la premiere Solution & à celle-ci, il faut trouver la distance AO du centre O de cette hyperbole à l'origine A des expressions AT des tems (t) écoulés depuis le commencement du mouvement. Pour cela il faut considerer qu'en prenant encore ici leurs perpendiculaires correspondantes TU pour les vitesses (u) restantes des primitives TV (v) à la fin de ces tems AT (t) malgré les résistances supposées, desquelles vitesses restantes TU (u) la premiere soit AH (*Lem. 1. art. 4. pag. 195.*) $= AF$ (b) initiale supposée; TU en AH au commencement du mouvement, y doit rendre $u = b$. Ainsi l'équation (*art. 1.*) $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$,

rendant s (OQ) $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$, TU en AH perpendiculaire en A avec AF sur OC , doit aussi y rendre $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}$.

Par conséquent la plus petite OA des abscisses OQ (s) ici

O o ij

nécessaires, doit y être $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}$; & son ordonnée cor-

respondante $\mathcal{Q}P = \sqrt{ss + aa} = \sqrt{\frac{a^4}{\pm aa \pm bb} + aa} =$
 $= \sqrt{\frac{a^4 - a^4 \pm aabb}{\pm aa \pm bb}} = \frac{ab}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}$ alors en AM perpendi-
 culaire au point A sur OC de même que AB , AH , AF :
 c'est-à-dire, $OA = \frac{aa}{\sqrt{aa - bb}}$, $AM = \frac{ab}{\sqrt{aa - bb}}$ dans les fig. 7. 8.

& $AO = \frac{aa}{\sqrt{bb - aa}}$, $AM = \frac{ab}{\sqrt{bb - aa}}$ dans la fig. 9. De sorte
 qu'on aura dans toutes $OA . AM :: a . b :: AB . AH$.

III. Donc en continuant de prendre par tout de l'ori-
 gine A vers C sur ATC , les abscisses AT (t) pour les
 tems écoulés depuis le commencement du mouvement,
 si l'on prend $OA = \frac{aa}{\sqrt{aa - bb}}$ sur CTA prolongée vers O ,
 $OS = a$ sur OA depuis le centre O vers A , dans les fig.
 7. 8. Et $AO = \frac{aa}{\sqrt{bb - aa}}$ encore sur CTA prolongée vers O ,
 $OS = 1$ sur la perpendiculaire en O , dans la fig. 9. L'hy-
 perbole $SMPC$ décrite du centre O , & du demi-axe trans-
 versal $OS = 1$, qui continué en soit l'axe intérieur, fera
 celle qu'exige ici l'équation générale $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \pm aa}}$ de l'art.

1. c'est-à-dire, $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}$ pour les fig. 7. 8. & $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss + aa}}$
 pour la fig. 9.

IV. L'art. 2. d'où cela se tire, fait voir aussi en général
 & en particulier le rapport entr'elles de l'ordonnée AM
 $\left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \pm bb}} \right)$ de la précédente hyperbole $SMPC$, de $A\dot{F}$
 ou de AH (b) expression de la premiere des vitesses (u),
 & de AB prise $= a$ sur la même perpendiculaire qu'elles
 en A à la droite OC : sçavoir

1°. Qu'en général $AB(a) . AM \left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \pm bb}} \right) :: \sqrt{\pm aa \pm bb} . b$.
 c'est-à-dire en particulier pour le cas de $a > b$ des fig. 7. 8.
 $AB . AM :: \sqrt{aa - bb} . b$. Et pour le cas de $a < b$ de la fig. 9.
 $AB . AM :: \sqrt{bb - aa} . b$. D'où l'on voit que AB sera égale,

moindre, ou plus grande que AM dans les fig. 7. 8. selon que $\sqrt{aa-bb}$ y fera égale, moindre, ou plus grande que b , ainsi que le permet l'hypothèse qu'on y fait de $a > b$; mais que dans la fig. 9. AB sera toujours moindre que AM , à cause que $b > a$ y rend toujours $\sqrt{bb-aa} < b$.

2°. Qu'en général aussi $AH(b).AM\left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}\right) :: \sqrt{\pm aa \pm bb}.a$. C'est-à-dire encore en particulier pour le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. $AH.AM :: \sqrt{aa-bb}.a$. Et pour le cas de $b > a$ de la fig. 9. $AH.AM :: \sqrt{bb-aa}.a$. D'où l'on voit au contraire que AH sera toujours moindre que AM dans les fig. 7. 8. dont le cas de $a > b$ rend toujours $\sqrt{aa-bb} < a$; & que dans la fig. 9. AH sera égale, moindre, ou plus grande que AM , selon que $\sqrt{bb-aa}$ y fera égale, moindre, ou plus grande que a , ainsi que le permet aussi l'hypothèse qu'on y fait de $b > a$.

V. Tout cela étant ainsi reconnu, soient du centre O les droites OP, Op , infiniment près l'une de l'autre, lesquelles rencontrent l'hyperbole $SMPC$ en P, p , & de ce dernier point p encore une ordonnée pq parallèle à PQ . L'on aura en général (art. I.) le triangle rectangle $OQp =$

$$= \frac{s\sqrt{ss+aa}}{2}, \text{ dont la différentielle sera } PpqQ \pm POP = \frac{ds\sqrt{ss+aa}}{2} + \frac{ssds}{2\sqrt{ss+aa}} = \frac{ssds+aa\,ds+ssds}{2\sqrt{ss+aa}} = \frac{2ssds+aa\,ds}{2\sqrt{ss+aa}}. \text{ Mais}$$

on a aussi (art. I.) $PpqQ = ds\sqrt{ss+aa} = \frac{2ssds+aa\,ds}{2\sqrt{ss+aa}}$. Donc

$$\pm POP = \frac{2ss+aa-2ss+aa}{2\sqrt{ss+aa}} \times ds = \frac{\pm aa\,ds}{2\sqrt{ss+aa}}, \text{ ou } POP = \frac{aa\,ds}{2\sqrt{ss+aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}}. \text{ Mais on vient de trouver (art. I.) } dt =$$

$$= \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}}, \text{ d'où résulte } \frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss+aa}}. \text{ Donc } \frac{adt}{2} = POP,$$

ou $dt = \frac{2}{a} \times POP$; & (en intégrant) $t(AT) = \frac{2}{a} \times POS + q$.

Mais le cas de $AT(t) = 0$, qui rend $POS = MOS$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{2}{a} \times MOS + q$, d'où résulte $q = -\frac{2}{a} \times MOS$. Donc cette intégrale complete sera ici $AT = \frac{2}{a} \times POS - \frac{2}{a} \times MOS = \frac{2}{a} \times MOP$ (à cause de $OS = a$).

$= AB) = \frac{2 \times MOP}{OS} = \frac{2 \times MOP}{AB}$ pour tous les cas possibles : de sorte que les tems $AT (t)$ écoulés depuis le commencement du mouvement , seront par tout ici en raison des trilignes ou secteurs hyperboliques MOP correspondans dans tous les cas possibles.

VI. Aiant aussi en général (*art. 1.*) $\frac{a}{s} \sqrt{ss + aa} = u = TU$, & $Q P = \sqrt{ss + aa}$, dont $a = AB$, & $s = OQ$; l'on aura pareillement en général $TU = \frac{AB \times QP}{OQ}$, ou $AB = \frac{OQ \times TV}{QP}$. Mais après avoir fait du point H la droite $H\lambda$ parallele à AO , & qui rencontre OM en λ , si l'on tire par ce point λ une autre droite NG parallele à AB , & qui rencontre OA , OP , en N , G ; l'art. 2. qui donne ici en général AH ou $N\lambda$. $AB :: AM$. $AO :: N\lambda$. NO . donnera aussi $NO = AB$ (*art. 1.*) $= OS$: de sorte que N se trouvera au sommet S de l'hyperbole $SMPC$ dans les fig. 7. 8. Donc on y aura pareillement & dans la fig. 9. $NO = \frac{OQ \times TV}{QP}$, ou $NO \cdot TU :: OQ \cdot PQ :: NO \cdot NG$. Par conséquent $NG = TU (u)$ dans tous les cas possibles : De sorte que les vitesses restantes $TU (u)$ à la fin des tems AT ou (*art. 5.*) MOP , seront par tout ici entr'elles comme les NG correspondantes.

VII. Donc (*art. 5. 6.*) si l'on prend par tout ici $AT (t) = \frac{2 \times MOP}{OS}$, $TU(u) = NG$ correspondante, & qu'on acheve le parallelogramme rectangle GT fait de ces deux lignes AT , NG ; l'angle U de ce parallelogramme fera un des points de la Courbe cherchée HUC des vitesses ici restantes (u) malgré les résistances supposées; & ainsi à l'infini des autres points de cette Courbe. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

C O R O L L A I R E XVI.

Puisque les art. 1. 6. de cette Solut. 2. donnent ici en général $ON = AB = OS$, si l'on prolonge CB jusqu'à la rencontre de NG en Z , l'on y aura aussi par tout $NZ = ON = OS$ demi-axe transverse de l'hyperbole équilaterale $SMPC$; &

par conséquent si l'on tire la droite OZ prolongée vers C , cette droite OZC sera ici une des asymptotes de cette hyperbole dans tous les cas. Donc OP , qui (*Solut. 2. art. 2.*) doit par tout ici commencer en OM , ne pouvant jamais couper NZ que depuis λ jusqu'en Z , les ordonnées TU (*Solut. 2. art. 6.*) $\equiv NG$ ne peuvent jamais être moindres que AH dans les fig. 7. 8. ni être plus grandes que AH dans la fig. 9. Mais seulement commencer par lui être égales, sçavoir lorsque OP en OM , rendant $OQ \equiv OA$, rend le triligne hyperbolique $MOP \equiv 0$, & (*Solut. 2. art. 5.*) $AT \equiv 0$; puisqu'alors NG (TU) $\equiv N\lambda \equiv AH$, & que depuis ce premier instant du mouvement, les NG (TU) croissent toujours dans les fig. 7. 8. & diminuent toujours dans la fig. 9. jusqu'à ce qu'enfin elles soient devenues $\equiv NZ \equiv AB$ par la position de OP en OZC ; laquelle rendant le triligne hyperbolique MOP infini, & conséquemment aussi (*Solut. 2. art. 5.*) AT infinie de même que OQ , fait voir que les TU commencées en AH , ne peuvent être égales à AB qu'après un tems infini AT , ni être jamais plus grandes que AB dans les fig. 7. 8. ni plus petites que AB dans la fig. 9.

De tout cela suivent encore les Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. 11. déjà tirés de la *Solut. 1.*

COROLLAIRE XVII.

Le cas des TU (u) $\equiv AB$ (a) qui suivant le précédent Corol. 16. arriveroit toujours après un tems infini dans le milieu supposé, changeant l'égalité $dt \equiv \frac{aadu}{aa - uu}$ trouvée dans la *Solut. 1. art. 1.* pour celle de la Courbe HUC , en $dt \equiv \frac{aadu}{aa - aa} = \frac{aadu}{0}$, fait voir que les accroissemens ou décroissemens (du) des vitesses effectives (u), y seroient par tout nuls; ce qui se voit aussi en ce qu'en ce cas de $u \equiv a$, l'équation $v - r \equiv u$ trouvée dans l'art. 1. du Lem. 1. pag. 194. donneroit $v - r \equiv a$, & conséquemment $dv - dr \equiv 0$, ou $dv \equiv dr$, c'est-à-dire (*remarq. 1. pag. 209.*) la pesanteur du mobile égale à la résistance que lui feroit alors le

296 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
milieu supposé, en regardant cette pesanteur constante
comme cause des accroissemens instantanés (dv) de la vi-
tesse primitive (v). Donc l'équilibre qui résulteroit ainsi
en ce cas de $u=a$ entre la pesanteur du mobile & la ré-
sistance (dr) du milieu supposé, empêchant cette pesan-
teur d'augmenter cette vitesse effective (a), & la rési-
stance de la diminuer; cette même vitesse AB (a) doit
être la plus grande que la pesanteur de ce corps pût ja-
mais lui donner dans le milieu supposé, c'est-à-dire suivant
le langage de M. Hugheens, qu'elle doit être la terminale
de ce corps, ainsi qu'on l'a déjà vû dans les Corol. 7. 15.

COROLLAIRE XVIII.

Puisque TV (v) exprime ici (*hyp.*) la vitesse primitive
à la fin du tems AT (t) c'est-à-dire ce que le mobile en
auroit eu à la fin de ce tems en tombant (si l'on veut) en
vertu de sa pesanteur constante & d'une puissance qui d'a-
bord l'eût jetté verticalement de haut en bas d'une vitesse
 $=AF$ (b) dans un milieu sans résistance ni action; & que
(*Solut. 1. & 2.*) TU (u) exprime de même ce que la rési-
stance supposée du milieu où il se meut effectivement, lui
laisse de cette vitesse primitive à la fin de ce même tems
 AT : cette vitesse TU restante de la primitive TV à la
fin de ce tems dans ce milieu résistant, sera à cette pri-
mitive :: $TU . TV :: TU . TX + XV :: TU . AF + XV$
(*Lem. 1. art. 4. pag. 195.*) :: $TU . AH + XV$ (à cause
de l'angle XFF supposé de 45. deg.) :: $TU . AH + FX$
:: $TU . AH + AT$ (*Solut. 2. art. 6.*) :: $NG . N\lambda + AT$.
Mais (*Solut. 2. art. 5.*) $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$ (*Solut. 2. art. 6.*) =
 $= \frac{2 \times MOP}{ON}$. Donc chaque vitesse restante TU sera par
tout ici à la correspondante primitive TV :: $NG . N\lambda +$
 $+ \frac{2 \times MOP}{ON} :: \frac{ON \times NG}{2} . \frac{ON \times N\lambda}{2} + MOP :: ONG . ON\lambda +$
 MOP . C'est-à-dire, comme le triangle rectangle ONG est
à la somme correspondante faite du triangle rectangle
 $ON\lambda$ & du secteur hyperbolique MOP .

On

On voit de-là que le cas de la vitesse initiale $AF(b) = 0$ FIG. VII. dans la fig. 7. y rendant pareillement (Lem. 1. art. 4. pag. 195.) AH ou (Solut. 2. art. 6.) $N\lambda = 0$, $AM = 0$, $MS = 0$, $AS = 0$, $AO = OS$ (Solut. 2. art. 1.) $= AB$ (Solut. 2. art. 6.) $= ON$, $AN = 0$, $NG = AG$, $MOP = AOP$; chaque vitesse restante $TU(u)$ doit être en ce cas à la primitive correspondante $TV(v) :: OAG.AOP$. C'est-à-dire, comme le triangle rectangle OAG est au secteur hyperbolique AOP correspondant, ainsi qu'on l'a déjà vu pour ce même cas dans le Corol. 15. pag. 215.

COROLLAIRE XIX.

Il suit encore de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la seule pesanteur constante d'un corps pour lui donner dans un milieu sans résistance ni action une vitesse verticale VX qui fut égale à la terminale AB qu'il auroit (Corol. 7. 15. 17.) dans un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses de ce corps, seroit à ce qu'il en faudroit à ce même corps jetté d'abord verticalement de haut en bas d'une vitesse $AF(b)$ dans ce milieu résistant, pour y avoir en vertu de sa pesanteur & de cette projection la vitesse $TU(u)$ ou (Solut. 2. art. 6.) NG malgré la résistance de ce milieu :: $AB \cdot \frac{2 \times MOP}{AB}$. puisque le premier de ces tems seroit $FX = VX(hyp.) = AB$, & que le second seroit AT (Solut. 2. art. 5.) $= \frac{2 \times MOP}{AB}$. Donc le premier de ces tems seroit aussi au second :: $\frac{AB \times AB}{2}$. MOP (la Solut. 2. art. 6. donnant $NO = AB$, & la constr. $AB = NZ$) :: $\frac{NO \times NZ}{2}$. $MOP :: ONZ.MOP$. c'est-à-dire, comme le triangle rectangle ONZ seroit au secteur hyperbolique correspondant MOP .

On voit aussi de-là, que le cas de la vitesse initiale $AF(b) = 0$, de la fig. 7. dans le milieu résistant, y rendant (comme sur la fin du Corol. 18.) $ON = AB$, NZ en AB , & ON en OA , & y changeant ainsi le triangle ONZ en OAB , & le secteur MOP en AOP ; le premier des deux tems

298 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 en question seroit en ce cas de la fig. 7. au second : : OAB .
 AOP . c'est-à-dire , comme le triangle rectangle OAB est
 au secteur hyperbolique correspondant AOP , ainsi qu'on
 l'a déjà vû dans le Corol. 16. des pag. 215. 216.

COROLLAIRE XX.

FIG. VII. Il suit aussi de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la
 VIII. seule pesanteur constante d'un corps pour lui donner dans
 IX. un milieu sans résistance ni action, une vitesse verticale
 VX qui fût égale à l'initiale AF imprimée d'abord verti-
 calement de haut en bas dans un milieu résistant en rai-
 son des quarrés des vitesses de ce corps, seroit à ce qu'il
 en faudroit à ce corps ainsi jetté dans ce milieu résistant
 pour y avoir en vertu de la pesanteur & de cette projection
 la vitesse TU (u) ou (Solut. 2. art. 6.) NG malgré la rési-
 stance de ce milieu : : $AF \cdot \frac{2 \times MOP}{AB}$. puisque le premier de
 ces tems seroit $FX = VX$ (hyp.) $= AF$, & que le second
 seroit AT (Solut. 2. art. 5.) $= \frac{2 \times MOP}{AB}$. Donc le premier de
 ces tems seroit aussi au second : : $\frac{AF \times AB}{2}$. MOP (la Solut.
 2. art. 6. donnant $AB = NO$, & l'art. 4. du Lem. 1. pag.
 195. donnant aussi $AF = AH$ (Constr.) $= N\lambda$) : : $\frac{N\lambda \times NO}{2}$
 MOP : : $ON\lambda$. MOP . C'est-à-dire comme le triangle
 rectangle $ON\lambda$ seroit au secteur hyperbolique MOP .

FIG. VII. D'où l'on voit que le cas de la vitesse initiale $AF = 0$
 de la fig. 7. dans le milieu résistant, y rendant aussi $N\lambda = 0$,
 puisque (Lem. 1. art. 4. pag. 195.) $AF = AH$ (Constr.)
 $= N\lambda$; le triangle $ON\lambda$, & conséquemment aussi le pre-
 mier des tems en question y seroit nul ou zero : aussi ne
 faut-il aucun tems pour n'acquies aucune vitesse.

COROLLAIRE XXI.

FIG. VII. I. Puisque (Solut. 2. art. 1.) $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa$
 VIII. $\pm \frac{a^4}{ss}$, & conséquemment $udu = \pm \frac{a^4 ds}{s^4} = \pm \frac{a^4 ds}{s^3}$; l'on aura
 IX. $\frac{udu}{aa - uu} = \frac{ds}{s}$, ou $\frac{a^4 ds}{aa - uu} = \frac{a^4 ds}{s}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1.

donne $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$, ou $udt = \frac{aauudu}{aa - uu}$. Donc $udt = \frac{aands}{s}$, & (en intégrant) $\int udt (ATUH) = aa \times ls + q$. Mais le cas de P en M , qui rend $o\mathcal{Q}(s) = OA$ (Solut. 2. art. 2.) $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}$, $MOP = 0$, & conséquemment aussi (l'art. 5. de la Solut. 2. donnant $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$) $AT = 0$, & $ATUH = 0$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times \int \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}} + q$, d'où résulte $q = -aa \times \int \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}}$. Donc cette intégrale complete sera en général $ATUH = aa \times ls - aa \times \int \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}} = aa \times \int \frac{\sqrt{\pm aa \pm bb}}{aa}$ (à cause de $o\mathcal{Q} = s$, & de $OA = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm bb}} = aa \times \int \frac{o\mathcal{Q}}{OA}$. Mais (Lem. 2. pag. 196.) les espaces parcourus pendant des tems quelconques t (AT ou $\frac{2 \times MOP}{AB}$) sont entr'eux comme les sommes $\int udt$ ($ATUH$) des vitesses u (TU) employées à les parcourir. Donc les espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (Solut. 2. art. 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$, sont entr'eux dans tous les cas comme les grandeurs $aa \times \int \frac{o\mathcal{Q}}{OA}$ correspondantes, ou (à cause de aa constante) comme les Logarithmes des fractions $\frac{o\mathcal{Q}}{OA}$ correspondantes.

II. Si l'on considère présentement que l'art. 2. de la Solut. 2. donne en général $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$, la substitution de cette valeur de s dans l'expression générale (art. 1.) $aa \times \int \frac{\sqrt{\pm aa \pm bb}}{aa}$ des espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (Solut. 2. art. 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$ correspondans, donnera aussi en général ces espaces en raison des grandeurs $aa \times \int \frac{\sqrt{\pm aa \pm bb}}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$ correspondantes, ou simplement (à cause de a constante) en raison des Logarithmes correspondans $\int \frac{\sqrt{\pm aa \pm bb}}{\sqrt{\pm aa \pm uu}}$: c'est à-dire (les signes supérieurs sous chaque

300 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 signe radical, étant pour le cas de $a > b$ dans les fig. 7. 8.
 & les inférieurs pour celui de $b > a$ dans la fig. 9.) en rai-
 son des Logarithmes correspondans $\int \frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig.

7. 8. & en raison des correspondans $\int \frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 9.
 conformément à l'art. 2. du Corol. 12. dans lequel ces
 mêmes grandeurs ont aussi été trouvées pour les expres-
 sions de ces mêmes espaces.

COROLLAIRE XXII.

Si l'on ajoûte présentement aux fig. 7. 8. 9. une autre
 hyperbole équilatere ϕZC entre les asymptotes orthogo-
 nales OC , $O\phi$, laquelle rencontre AB , PQ , en β , R , aiant
 le même centre O que la premiere $SMPC$; mais son som-
 met en Z , aiant OZ pour son demi-axe transverse, l'asym-
 ptote OZC de l'autre pour son axe interieur, & $sy=aa$, ou
 $y=\frac{aa}{s}$ pour son équation asymptotique, dont les coordon-
 nées sont $s=OQ$, & $y=QR$; l'on aura ici $yds (QqR) =$
 $\frac{aads}{s}$ (Corol. 21. art. 1.) $= udt$. Donc (en intégrant) $\int udt$
 $(ATUH) = \int yds + q = \phi OQR\phi + q$. Mais le cas de
 $ATUH=0$, qui rendant TU en AH , rend NG (Solut. 2. art. 6.)
 $= N\lambda$, OP en OM , QP en AM , QR en $A\beta$, & consé-
 quemment $\phi OQR\phi = \phi O A\beta\phi$; réduit cette intégrale à
 $0 = \phi O A\beta\phi + q$, d'où résulte $q = -\phi O A^2\phi$. Donc cette
 intégrale complete sera $ATUH (\int udt) = \phi OQR\beta\phi$
 $- \phi O A\beta\phi = Q A\beta R$. Par conséquent (Lem. 2. pag. 196.)
 les espaces ici parcourus pendant les tems $AT (t)$, ou
 (Solut. 2. art. 5.) $\frac{2xMOP}{AB}$, en vertu des vitesses $TU (u)$ re-
 stantes à chaque instant des primitives $TV (v)$ malgré les
 résistances supposées, seront aussi entr'eux en raison des
 aires hyperboliques $Q A\beta R$ correspondantes dans tous les
 cas possibles.

COROLLAIRE XXIII.

Donc aussi après un tems infini AT ou (Solut. 2. art. 5.)
 MOP les espaces parcourus par ce mobile seroient ici
 infinis dans tous les cas possibles; puisque le secteur MOP

infini rendant l'abscisse OQ infinie, l'aire $QABR$ le feroit aussi; & par conséquent l'espace (*Corol.* 22.) qui devoit être ici parcouru pendant ce tems infini, seroit pareillement infini.

Cela suit encore de tous les articles des *Corol.* 12. 13. 14. 21. & si clairement encore qu'il n'y a qu'à jetter les yeux dessus pour le voir.

COROLLAIRE XXIV.

De ce que (*Corol.* 22.) $QqrR = yds = udt = TU \times dt$, l'on aura $\frac{QqrR}{TU} = dt$ (*Solut.* 2. art. 5.) $= \frac{2}{a} \times POP = \frac{2 \times POP}{AB}$, & conséquemment $QqrR \cdot POP :: TU \cdot \frac{1}{2} AB$. C'est-à-dire, (*Corol.* 7. 15. 17.) que les aires hyperboliques élémentaires correspondantes $QqrR$, POP , sont entr'elles comme les vitesses TU (u) correspondantes sont chacune à la moitié de la terminale AB (a)

COROLLAIRE XXV.

I. Soit encore comme dans les fig. 1. 2. 3. du *Corol.* 14. une hyperbole équilatère quelconque $D\omega I$ ajoutée aux fig. 7. 8. 9. entre les asymptotes orthogonales NZ , ZI , dans les fig. 7. 8. après y avoir prolongé CZ vers I ; & entre les orthogonales KZ , ZI , dans la fig. 9. après y avoir aussi prolongé CZ vers I , & de plus NZ vers K : c'est-à-dire en général (après avoir pris $Z\Delta = ZN = BA$ dans la fig. 9. & avoir ajouté Δ en N dans les fig. 7. 8.) une hyperbole équilatère quelconque $D\omega I$ entre les asymptotes ZI , $Z\Delta$, dans les fig. 7. 8. 9. soient prises par tout dans ces figures, $N\Pi \cdot NG :: NG \cdot NZ$. Et $NK \cdot N\lambda :: N\lambda \cdot NZ$. Ensuite après avoir mené des points Δ , Π , K , les ordonnées ΔD , $\Pi\omega$, KY , comme dans les fig. 1. 2. 3. Soient encore (sur NZ , comme dans ces figures, sur AB) $\Delta Z = NZ = AB = a$, $N\lambda = AH = b$, $\Delta D = c$, $\frac{2}{a} \times MOP$ (*Solut.* 2. art. 5.) $= AT = t$, $N\Pi = m$, $\Pi\omega = n$.

II. Il résulte de tout cela $Z\Pi = a - m$ dans les fig. 7. 8. & $Z\Pi = m - a$ dans la fig. 9. c'est-à-dire, en général $Z\Pi = \pm a \pm m$, dont les signes supérieurs sont pour les fig. 7. 8.

FIG. VII.
VIII.
IX.

302 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 & les inférieurs pour la fig. 9. comme dans l'art. 1. du Corol. 14. en d'autres Lettres équivalentes des fig. 1. 2. 3. Ce qui donnera $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aadu}{aa-uu} = udt$, & $\int udt$ (ATUH) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times \gamma K \Pi \varpi$, comme dans les autres articles de ce Corol. 14. C'est-à-dire (Lem. 2. pag. 196.) que les espaces parcourus pendant les tems AT (t) ou (Solut. 2. art. 5.) $\frac{1}{a} \times MOP$ en vertu des vitesses restantes TU (u) ou (Solut. 2. art. 6.) NG, feront ici entr'eux comme les aires hyperboliques $\gamma K \Pi \varpi$ correspondantes.

III. Puisque (art. 1.) $NZ (a) . NG (u) :: NG (u) . N \Pi (m)$ $= \frac{uu}{a}$. Et que (art. 2.) $Z \Pi = \pm a \mp m$, l'on aura $Z \Pi = \pm a \mp \frac{uu}{a}$, ou (en multipliant le tout par ± 1 .) $\pm Z \Pi = a - \frac{uu}{a}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1. donne $\frac{dt}{a} = \frac{du}{aa-uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa-uu} = \frac{adu}{a-uu}$. Donc $dt = \pm \frac{adu}{Z \Pi} = \pm \frac{NZ \times Gg}{Z \Pi}$: c'est.

à-dire en général (à cause de NZ constante) les instans dt ou (Solut. 2. art. 5.) POP en raison des fractions $\frac{Gg}{Z \Pi}$ correspondantes; & conséquemment aussi (à cause de $\Pi \varpi . \Delta D :: Z \Delta . Z \Pi = \frac{\Delta D \times Z \Delta}{\Pi \varpi}$) comme les correspondantes $\frac{\Pi \varpi \times Gg}{\Delta D \times Z \Delta}$, ou simplement (à cause de $\Delta D \times Z \Delta$ constant) comme les produits $\Pi \varpi \times Gg$ correspondans pour tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déjà vû en d'autres lettres équivalentes dans les Corol. 23. & 25. des pag. 224. 225. 226. pour le cas de la fig. 7. des mouvemens commencés à zero de vitesse.

IV. Puisque (art. 2.) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aadu}{aa-uu}$, ou $\pm ndm = \frac{2acuadu}{aa-uu}$, & que l'art. 5. de la Solut. 2. donne $POP = \frac{a}{2} \times dt$ (Solut. 1. art. 1.) $= \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu}$; l'on aura ici en général $\pm ndm . POP :: \frac{2acuadu}{aa-uu} . \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa-uu} :: cu . \frac{1}{4} aa :: u . \frac{aa}{4c}$. De sorte que si l'on suppose présentement que l'axe transverse, jusqu'ici arbitraire, de l'hyperbole DGI, soit $= Z \Delta \times \sqrt{2}$

$\equiv a\sqrt{2}$, & conséquemment $\Delta D(c) = \frac{1}{2} Z \Delta(\frac{1}{2}a)$, ou $4c \equiv a$; l'on aura ici $\frac{1}{2} ndm . POP :: u . a :: NG . NZ$. c'est à-dire en général, que les élémens correspondans ndm, POP , des aires hyperboliques $TK\Pi\omega, MOP$, pareillement correspondantes, seront par tout ici entr'eux comme les vitesses correspondantes, $NG(u), NZ(a)$. Donc les espaces parcourus en vertu de ces vitesses pendant un même instant quelconque dt ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{1}{a} \times POP$, étant entr'eux comme ces mêmes vitesses, ils seront pareillement ici entr'eux $:: ndm . POP$. Donc aussi le premier de ces espaces parcouru de la vitesse NG ou $TU(u)$ pendant l'instant dt , étant (*art. 2. & Corol. 14.*) comme l'aire élémentaire ndm correspondante de l'hyperbolique $TK\Pi\omega$, si l'on prend cet élément hyperbolique ndm pour cette espace instantanée, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique POP correspondant pour l'espace parcouru de la vitesse NZ ou $AB(a)$ pendant le même instant dt ; & par tout de même. Donc (en intégrant) l'espace parcouru de la vitesse variée $TU(u)$ pendant les tems $AT(t)$ ou (*Solut. 2. art. 5.*) $\frac{1}{a} \times MOP$ malgré les résistances supposées, sera à l'espace parcouru de la vitesse terminale uniforme $AB(a)$ pendant le même tems $:: TK\Pi\omega . MOP$. Et par tout ici de même pour tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déjà vû dans les Corol. 24. & 25. art. 4. des pag. 225. 226. 227. pour le cas de la fig. 7.

COROLLAIRE. XXVI.

I. Puisque (*hyp.*) les résistances instantanées $z(dr) \equiv \frac{uu}{a}$, le cas de $u \equiv a$, c'est-à-dire (*Corol. 7. 15. 17.*) de la vitesse effective ou restante $TU(u)$ devenue égale à la terminale $AB(a)$ après un tems $AT(t)$ infini, doit aussi rendre $z(dr) \equiv a$. Mais (*Corol. 9.*) le mouvement devant demeurer ici uniforme pour toujours lorsqu'il en est à cette vitesse terminale, celle de ces résistances instantanées qui s'y oppose, doit alors être égale à la pesanteur du mobile : autrement leur inégalité ne permettroit pas cette

304 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 uniformité de mouvement. Donc en prenant $\frac{'''a}{a}$ pour ces résistances instantanées du milieu supposé, l'on aura pareillement a pour la pesanteur du mobile; & conséquemment aussi $\pm a \mp \frac{'''a}{a}$ pour la différence ou excès de force dont cette pesanteur surpassera chacune de ces résistances dans les fig. 7. 8. ou sera surpassée par chacune d'elles dans la fig. 9. les signes supérieurs étant pour les fig. 7. 8. & les inférieurs pour la fig. 9. Mais (Corol. 25. art. 1. & 3.) $NZ = a$, $N\Pi = \frac{'''a}{a}$, & $Z\Pi = \pm a \mp \frac{'''a}{a}$. Donc en général la pesanteur constante du mobile, chaque résistance instantanée qu'il trouve dans le milieu où on le suppose tomber, & la différence dont la plus forte des deux surpassé l'autre, sont ici entr'elles comme les grandeurs NZ , $N\Pi$, $Z\Pi$, correspondantes, desquelles la troisième $Z\Pi$ exprime l'excès de la pesanteur par-dessus la résistance dans les fig. 7. 8. & l'excès de la résistance par-dessus la pesanteur dans la fig. 9.

II. Mais si l'on imagine chacune des aires hyperboliques $YK\Pi$ divisées en parties égales quelconques par des parallèles à ZI : c'est-à-dire (Corol. 14. art. 2. 3. 4. 5. & Corol. 25. art. 2.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT , divisés chacun en parties égales quelconques; il est manifeste que les $Z\Pi$ correspondantes seront en progression géométrique. Donc (art. 1.) les excès ($Z\Pi$) de la pesanteur (NZ) du mobile par-dessus chacune des résistances instantanées ($N\Pi$) du milieu dans les fig. 7. 8. ou de chacune de ces résistances par-dessus cette pesanteur dans la fig. 9. seront en progression géométrique à la fin des parties égales correspondantes des espaces ici parcourus en vertu des vitesses TU pendant les tems AT ou (Solut. 2. art. 5.) $\times \frac{1}{2} MOP$ dans tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déjà vû en d'autres lettres équivalentes dans le Corol. 19. art. 3. pag. 220. pour le cas de la fig. 7.

III. On voit delà que si l'on prenoit ces excès $Z\Pi$ dont la pesanteur du mobile surpassé chaque résistance instantanée dans les fig. 7. 8. où est surpassée par chacune d'elles dans

dans la fig. 9. pour des nombres dont le plus grand ZK fût pris pour l'unité ; les espaces ici parcourus pendant les tems AT correspondans , en seroient les Logarithmes.

IV. Donc si dans les fig. 10. 11. 12. on suppose $KL, \Pi X$, paralleles à ZC , & dont la premiere KL rencontre AB (prolongée dans la fig. 12.) en L ; que par ce point L passe une Logarithmique LXC d'une soutangente $= ZK = BL = 1$, aiant ZC pour asymptote , & qui rencontre ΠX en X , par lequel point X soit DS parallele à BA , & qui rencontre perpendiculairement en S, D , les paralleles AC, BC : cela supposé , & tout le reste demeurant le même que dans les fig. 7. 8. 9. l'on aura ici (art. 3.) AS ou BD en raison des espaces parcourus pendant les tems AT en vertu des vitesses NG ou TU restantes à chaque instant malgré les résistances $N\Pi$ ou SX du milieu supposé , en prenant (ainsi que dans l'art. 3.) les excès $Z\Pi$ de la pesanteur (NZ) du mobile sur chacune des résistances instantanées ($N\Pi$), ou de chacune d'elles sur cette pesanteur , pour des nombres dont le plus grand ZK ou BL seroit l'unité ; puisque les abscisses AS ou BD en seroient les Logarithmes. Et reciproquement si l'on prenoit ici ces abscisses AS ou BD pour les espaces parcourus pendant les tems AT correspondans , les ordonnées DX ou $Z\Pi$ seroient en raison des excès de la pesanteur DS ou ZN du mobile sur chacune des résistances instantanées SX ou $N\Pi$ correspondantes du milieu supposé , ou de chacune de ces résistances sur cette pesanteur.

V. Cela étant , & Logarithmique LXC d'une Soutangente $= ZK = 1$, aiant son ordonnée $BL = ZK$, étant ainsi ajoutée à la Courbe HUC des vitesses restantes (u) & sur la même asymptote BC qu'elle ; si l'on mene une ordonnée quelconque TU (u) de cette Courbe HUC ; qu'on fasse UG parallele à TN , & qui rencontre NZ en G ; qu'on prenne $N\Pi$ troisième proportionnelle à NZ, NG , comme l'on a pris (Corol. 25.) NK troisième proportionnelle à $NZ, N\lambda$, ou AL troisième proportionnelle à AB (a), AH (b) ; qu'on fasse ΠX parallele à NC , & qui rencon-

FIG. X.
XI.
XII.

306 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
tre la Logarithmique LXC en X ; & qu'on mene par ce point X la droite DS parallele à BA , & qui rencontre perpendiculairement en S , D , les paralleles AC , BC : il est visible.

1°. Qu'en prenant, par exemple, les AT pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois TU ou NG (*Solut. 1. art. 1. & Solut. 2. art. 6.*) pour les vitesses restantes à la fin de ces tems malgré les résistances supposées; BD ou AS (*art. 4.*) pour les espaces parcourus en vertu de ces vitesses TU (u) pendant ces mêmes tems AT (t); $N\Pi$ ou SX (*art. 1.*) pour les résistances qui s'y opposent à la fin de ces espaces ou de ces tems; NZ ou AB ou SD (*art. 1.*) pour la pesanteur constante du mobile; $Z\Pi$ ou DX (*art. 1. 2. 3. 4.*) pour les excès de force dont cette pesanteur surpasse les résistances instantanées SX , ou est surpassée par elles à la fin des tems AT .

2°. Il est pareillement visible que si au lieu de prendre AT pour les tems écoulés, l'on eût pris à volonté quelque une des autres grandeurs TU , BD , SX , DX , AB , &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. l'on auroit trouvé de même les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, en raison des AT correspondantes, & tout le reste comme dans ce nomb. 1. Les citations qui y sont employées, rendent tout cela manifeste.

Les deux Solutions précédentes pourroient encore fournir plusieurs autres Corollaires que je supprime pour n'être pas trop long.

R E M A R Q U E.

Si l'on compare les Corol. 2. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 16. 17. 23. de ce Problème-ci avec les Corol. 2. 4. 5. 6. 10. du Probl. 2. pag. 128. &c. des Mem. de 1708. On verra en général pour tous les cas des projections verticales de haut en bas dans des milieux résistans, que les hypothèses de leurs résistances en raison des vitesses des corps jetés, & en raison des quarrés de ces vitesses, ont ceci de conforme,

1°. Qu'elles rendent également après un tems infini les

viteſſes, qui malgré ces réſiſtances réſulteroient de la force de projection & de la peſanteur conſtante du corps jetté, égales dans chaque milieu à la terminale de ce corps, c'eſt-à-dire, à la plus grande qu'il pût y acquérir après un tems infini en vertu de ſa ſeule peſanteur.

2°. Que juſque-là ces viteſſes reſtantes de celle de projection & des primitivement accélérées par la peſanteur conſtante du mobile, en raiſon des tems écoulés, s'accéléreroient ou ſe retarderoient de part & d'autre, c'eſt-à-dire dans chacune des hypothéſes précédentes, ſelon que les viteſſes de projection ſeroient moindres ou plus grandes que les terminales du corps jetté permises par les milieux où elles ſe feroient.

3°. Qu'au contraire ces viteſſes reſtantes, après être devenues égales aux terminales corréſpondantes, reſteroient toujours uniformes de part & d'autre, ſi le mouvement continuoit dans chaque milieu : de ſorte que ſi la viteſſe de projection étoit égale de part & d'autre à la terminale qui y conviendrait au corps jetté, ſa viteſſe actuelle ſ'y trouveroit uniforme pour toujours dès le premier inſtant de la projection nonobſtant l'action continuelle de ſa peſanteur à laquelle la réſiſtance de chacun des milieux ſuppoſés ſe trouveroit alors égale dans toute la durée de l'un & de l'autre de ſes mouvemens.

4°. Que les eſpaces parcourus pendant des tems infinis, ſeroient pareillement infinis de part & d'autre.

5°. Que les Courbes des viteſſes reſtantes malgré les réſiſtances de chacune des deux hypothéſes précédentes, doivent avoir une aſymptote parallèle à leur axe, & diſtante de lui d'une quantité qui de part & d'autre exprime la viteſſe terminale du corps jetté.

6°. Que chacune de ces Courbes, & celle des réſiſtances totales, qui lui répond ſur le même axe, ont leurs convexités ou leurs concavités tournées en même ſens ou du même côté.

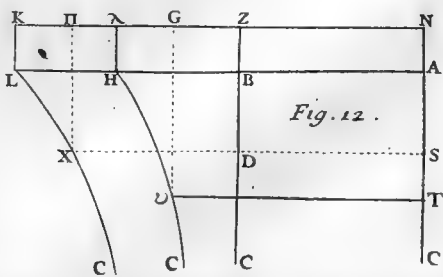
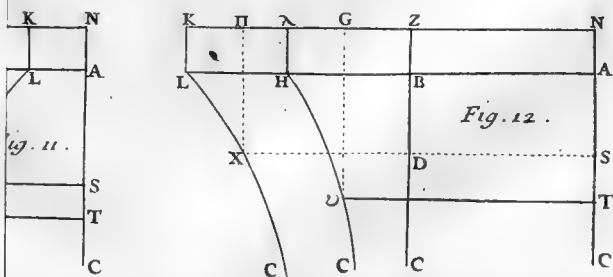
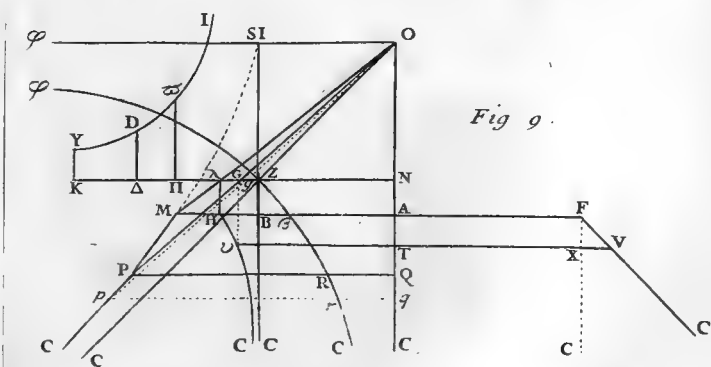
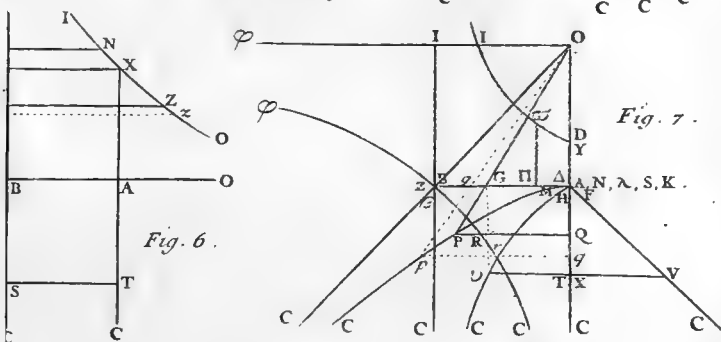
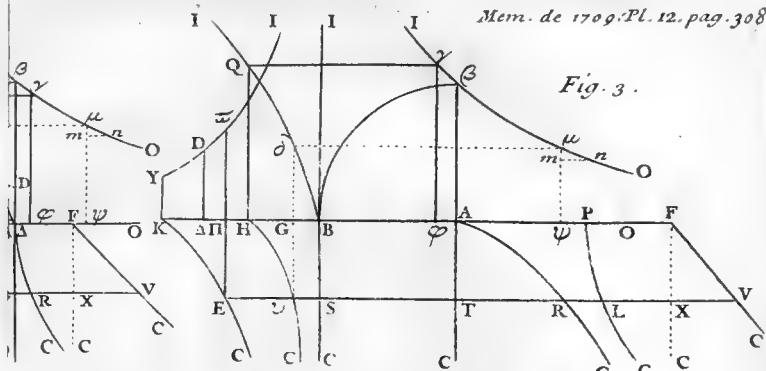
C'eſt là ce que la comparaison fortuite des Corollaires cités au commencement de cette Remarque, m'y a fait appercevoir

de conformité nonobstant la difference des hypothèses qu'on y fait touchant les résistances des milieux : peut-être que la comparaison, faite entr'eux, des autres Corollaires de ce Problème-ci & du Probl. 2. pag. 128. &c. des Mem. de 1708. y feroit aussi appercevoir d'autres conformités ; mais cela est trop aisé à faire pour s'y arrêter davantage : il suffit d'y avoir fait penser.

Il est aisé de voir aussi qu'en faisant $b=0$ dans tout ce qui précède le Problème de la pag. 196. se trouvera n'être qu'un Corollaire de celui-ci, dont les deux Solutions générales avec leurs Corollaires deviendront alors propres & particulieres à celui-là : De sorte qu'on auroit pu l'omettre en concluant ainsi de ce qui précède, tout ce qu'on en a démontré depuis la pag. 196. jusqu'à la pag. 227. Mais le Memoire où il se trouve, & celui-ci, ainsi réduits à un, l'auroient rendu trop long, outre qu'il y a des Esprits à qui l'intelligence du particulier sert pour entendre le général ; ce qui est fort commun, & cependant d'autant plus surprenant que le général est toujours plus simple que le particulier.

Voilà pour les mouvemens primitivement accelerés en raison des tems écoulés, c'est-à-dire, dont les vitesses dans le vuide auroient eu des accroissemens égaux en tems égaux : lesquels mouvemens seroient faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives que ces milieux permettroient au mobile, soit qu'il eût commencé par quelque une, ou non. On verra de même dans un autre Memoire ce qui concerne les mouvemens primitivement retardés en raison des tems à écouler jusqu'à leur entiere extinction dans le vuide : lesquels mouvemens seroient aussi faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives des corps mûs permises par ces milieux.





OBSERVATIONS

SUR LES ECREVISSES

DE RIVIERE.

PAR M. GEOFFROY le jeune.

PArmi le grand nombre d'Observations qu'on a faites sur certaines parties de l'Histoire naturelle, il y en a qui demeurent obscures & comme ignorées, faute d'être confirmées par de nouvelles experiences. Cependant pour rendre la Physique florissante, ce n'est pas assez de faire de nouvelles découvertes, il est encore important d'empêcher que les anciennes ne se perdent. C'est pourquoi il faut quelquefois remanier de nouveau certaines matieres, qui au bout d'un tems paroissent négligées, & dont on ne peut rien dire que sur la foi de quelqu'Auteur à qui il n'est pas toujours sûr de se fier.

1709.
23. Aoust.

En prenant cette voie on a le plaisir, ou de confirmer l'opinion vulgaire, ou de la refuter, ou du moins de l'éclaircir. Car quand il n'y a que peu de personnes qui aient traité une matiere, il n'arrive gueres qu'ils l'aient épuisée. C'est ce qui m'a porté de nouveau à faire quelques observations sur les Ecrevisses de Riviere, & particulièrement sur les pierres qu'on y découvre dans le tems qu'elles changent de dépouilles, & qui à cause de leur figure, sont nommées Yeux d'Ecrevisses.

L'opinion la plus commune touchant ces sortes de pierres, est qu'elles se trouvent dans le cerveau des Ecrevisses de Riviere. C'est celle de Gefner, d'Agricola, & de Belon. Cependant il s'en faut bien qu'elles soient dans le cerveau de ces animaux, puisqu'on les trouve plutôt autour de leur estomach.

Vanhelmont paroît être le premier qui s'en soit apper-

çû ; mais comme il s'est rendu suspect en bien des rencontres , son sentiment n'a pû prévaloir sur celui qui étoit déjà reçû. Il n'a donc été suivi que de peu de personnes qui ont vû que l'expérience étoit pour lui.

Cet Auteur avoit observé , que vers la my-Juin les Ecrevisses commencent à devenir malades , parce que c'est là environ le tems qu'elles doivent changer de dépouilles. Elles demeurent pendant neuf jours & davantage languissantes & comme mortes ; & il prétend que dans cet espace de tems il se forme une nouvelle membrane qui enveloppe leur estomach , & qu'entre les deux il s'épanche une liqueur laiteuse , qui descendant aux deux côtes se durcit en pierre. Cette nouvelle membrane lui semble naître de la pellicule qui se forme sur cette liqueur laiteuse , comme il a coûtume de s'en former une sur du lait chaud. Elle devient le nouvel estomach , & le vieux qui est au dedans , avec le reste de cette liqueur & les pierres même , se résout peu à peu , & sert de nourriture à l'animal pendant vingt-sept jours que durent ces pierres ; car alors il ne mange point , & on ne lui trouve aucune autre chose dans l'estomach.

Il ne m'a pas été possible de suivre de point en point tout ce que rapporte Vanhelmont ; mais j'ai fait quelques observations qui s'accordent avec les siennes.

J'ai trouvé des Ecrevisses fort molles ; & si prêtes à quitter leurs écailles , qu'elle étoit déjà levée ; en sorte qu'elle laissoit voir la nouvelle comme une membrane assez épaisse à qui il ne manquoit que le tems pour la rendre aussi dure que celle qui se détachoit.

J'ai remarqué que l'écaille qui se levoit étoit fort mince , & que la membrane interieure qui a coûtume de la tapisser n'y étoit plus attachée , & formoit la nouvelle écaille.

J'ai observé la même chose dans la queue que l'on nomme communément le Col de l'Ecrevisse , dont les tables se levoient fort aisément , & laissoient paroître la membrane qui devoit leur succéder.

En cassant les pincés j'ai trouvé la même chose ; ainsi on

peut dire, que dans le tems que l'Ecrevisse se dépouille de son écaille, la membrane interne s'en détache parfaitement; elle devient plus épaisse, & enfin forme l'écaille.

J'ai ensuite observé, que celles qui commençoient à quitter leurs écailles & où la membrane intérieure étoit assez épaisse, avoient des pierres qui étoient tout-à-fait formées aiant la figure d'une tête de champignon naissant.

Pour remonter à la naissance de ces pierres, j'ai ouvert des Ecrevisses en d'autres tems de l'année sans y rien trouver. Mais dans les dernières Observations que j'ai faites ce mois-cy, j'ai ouvert des Ecrevisses vigoureuses & qui ne faisoient que commencer leur muë, j'ai trouvé à la place de chaque pierre une lame ou plaque blanche qui nageoit au milieu d'une glaire, & qui étoit apparemment l'embryon de la pierre. Cette pierre & le suc glaireux étoient enveloppez dans un petit sac membraneux & fort delié.

J'en ai trouvé d'autres où les pierres étoient toutes formées, & dont l'estomach étoit solide & plein d'une liqueur brune, moussueuse & fétide.

Au dessous du sac qui renferme les pierres, j'ai trouvé une vesicule membraneuse aplatie & dont je ne connois point l'usage. J'ai observé seulement, que lorsqu'il ne paroît plus de pierre, cette vesicule se remplit d'une eau claire & douce, & occupe le même espace qu'occupoit la pierre.

Dans d'autres j'ai trouvé les pierres grosses, belles, & une nouvelle membrane très-déliée qui enveloppe les pierres & l'estomach. Aiant levé cette membrane, on y distinguoit très-parfaitement trois nouvelles dents toutes semblables à celles du vieil estomach; de maniere que l'on ne peut point douter que cette membrane ne devienne par la suite le véritable estomach.

Dans des Ecrevisses qui avoient mué, j'ai trouvé l'estomach plein d'une liqueur brune. La membrane de l'estomach étoit tendre, il ne paroissoit point de matière

312 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
visqueuse ni aucun vestige d'ancien estomach. Les pierres étoient fort diminuées, & paroissoient comme rongées par quelque dissolvant. Elles étoient envelopées d'une membrane fort fine qui étoit la seule cloison qui les séparât de la captivité de l'estomach.

Dans d'autres Ecrevisses qui avoient mué depuis plus long-tems, je n'ai point apperçû leurs pierres à leur place accoutumée; mais je les ai trouvées tout-à-fait dans l'estomach, & jointes ensemble par leurs parties concaves.

Dans d'autres dont la nouvelle écaille étoit déjà presque tout-à-fait dure, je n'ai apperçû à l'endroit où les pierres ont coutume d'être renfermées, qu'une tache blanche qui n'étoit autre chose que les deux membranes de la Vesicule qui renfermoit la pierre & qui s'étoient affaïssées l'une sur l'autre. Aïant ouvert l'estomach je l'ai trouvé plein d'une liqueur jaune & d'alimens sans aucun vestige de pierre. J'y ai même trouvé des morceaux d'écailles & de pattes d'autres Ecrevisses à demi digérées. J'ai remarqué dans ces dernières, que l'espace qu'occupoient les pierres étoit rempli par une autre vessie pleine d'eau dont j'ai déjà parlé.

Toutes ces Observations nous prouvent,

1°. Que les pierres qui se tirent de la tête des Ecrevisses, ne sont point dans leur cerveau; mais qu'elles tiennent à l'estomach qui est placé au-dessous.

2°. Il est visible qu'elles ne donnent pas naissance à la nouvelle écaille, comme quelques-uns l'ont prétendu, puisqu'elles subsistent encore quand l'écaille est formée.

3°. On voit encore, qu'en quittant leurs écailles, elles changent d'estomach, sans qu'il paroisse que le reste des autres parties se renouvellent, excepté l'intestin qui m'a paru se renouveler comme l'estomach.

4°. Il est encore à remarquer, que les pierres ne se trouvent dans les Ecrevisses qu'au tems de leur mûe; qu'elles se trouvent ensuite envelopées dans le nouvel estomach, où elles diminuent insensiblement jusqu'à leur entière destruction.

5°. Il paroît donc que ces pierres aussi-bien que la membrane du vieil estomach, servent de nourriture à l'animal pendant la maladie que lui cause sa muë.

Quelques Auteurs prétendent, que la couleur bleuë de certaines pierres d'Ecrevisses vient d'une maladie particuliere qui survient à quelques-unes dans le tems de leur muë. Si ce n'en est pas la veritable cause, du moins est-il certain, que les pierres qui se trouvent de cette couleur, prennent une couleur de chair par la cuisson. J'ai même observé que la simple chaleur du Soleil les rougissoit.

C'est ce qui fait que parmi celles que nous emploïons, nous en trouvons de bleuës & de couleur de chair. Il me paroît difficile à croire, que la plus grande partie de ces pierres qu'on nous vend soient contrefaites comme quelques-uns l'ont prétendu, à cause, selon eux, de la grande quantité qui s'en emploie; puisque nous voïons les Ecrevisses se trouver presque par tout en très-grande abondance. Outre cela ces pierres sont disposées par couche comme le Bezoard, ce que l'art auroit peine à imiter. D'ailleurs en les calcinant, elles noircissent, s'exfolient, & portent une odeur urineuse. Ce qui marque qu'elles sont veritablement tirées du regne animal. En effet par l'analyse on en tire de l'esprit urineux avec un peu de sel volatile. Il y a apparence qu'on tire les yeux d'Ecrevisses que nous employons, de celles qui sont en vie, & que les bleües ou les rougeâtres qui s'y trouvent mêlées, viennent des malades & des mortes.

On attribüë ordinairement aux yeux d'Ecrevisses une vertu simplement absorbante; mais l'experience suivante prouve, qu'ils ont d'autres proprietéz qui les portent jusque dans la masse du sang.

Une personne pour des aigreurs qu'elle avoit, aïant pris une potion où il entroit des yeux d'Ecrevisses, se sentit tout à coup prise d'une espeece d'heresipele au visage qui lui devint bouffi avec de grands piquotemens. Cette bouffure s'étendit jusqu'à la gorge & l'empêchoit d'avalier avec facilité. On craignit d'abord qu'il n'y eût quelque

314 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
chose de mêlé parmi les yeux d'Ecrevisses, ou qu'ils n'eussent été pilez dans un mortier de cuivre dont ils auroient pris la mauvaise qualité. On donna la même potion avec d'autres yeux d'Ecrevisses qui produisirent toujours le même effet. La Malade aiant appris qu'il y avoit des yeux d'Ecrevisses dans la potion, tira le Medecin de l'inquietude où il étoit, en lui disant qu'elle se ressouvenoit, que la même chose lui étoit arrivée toutes les fois qu'elle avoit mangé des Ecrevisses. En effet l'usage des yeux d'Ecrevisses cessé, les accidens cessèrent. Depuis on a remarqué que les Ecrevisses causoient à son fils les mêmes accidens. Sur quoi il n'est pas hors de propos de remarquer, combien les temperamens troublent souvent l'effet des remedes.

Quoiqu'on ne parle que des pierres qui se trouvent dans les Ecrevisses de riviere, il y a pourtant une espeece d'Ecrevisses qui est celle que l'on nomme *Astacus Marinus*, en François *Homar*, où l'on en trouve. Cette espeece est toute semblable à nos Ecrevisses de riviere à la grosseur près.

Au reste s'il y a des gens qui ont de l'aversion pour les Ecrevisses, Vanhelmont a remarqué que les Ecrevisses en ont une si grande pour les Porcs, que s'il en passe quelqu'un auprès d'elles, cela les fait mourir. C'est pourquoy, dit-il, dans le Brandebourg où la pêche en est abondante, les Voituriers qui les transportent sont obligez de faire sentinelle la nuit pour empêcher qu'il ne passe de Porcs sous leur charette; car s'il en passoit un, il ne s'en trouveroit pas une en vie le lendemain matin.



EXTRAIT OU ABREGÉ DU PROJET

de M. Reneaume sur les Manuscrits de feu M.
de Tournefort.

PAR M. TERRASSON.

En execution de l'art. 48 du Reglement donné par le Roi à l'Academie Royale des Inscriptions, daté du 16 Juillet 1701, cette Academie & l'Academie Royale des Sciences se font tous les six mois une députation réciproque, dans laquelle elles s'envoyent rendre compte l'une à l'autre par un discours fait exprès, de ce qui s'est lu ou dit de plus remarquable en chacune pendant ces six mois. M. Terrasson fut chargé de ce rapport pour l'Academie des Sciences lorsqu'il y fut reçu en 1707; & c'est d'un de ses Discours que cet Extrait est tiré. Comme il ne s'agit encore que d'un Projet, M. Reneaume n'a pas voulu que son Memoire qui est fort étendu, occupât ici une grande place; & l'on n'a pas cru aussi devoir differer jusqu'à l'entiere execution d'un dessein si vaste, de donner une idée de ces sçavans Manuscrits, dont le Catalogue seul fait tant d'honneur à la memoire encore recente de M. de Tournefort.

Toutes les Societez, & sur tout celles des Gens de Lettres, regardent les Particuliers morts dans leur sein comme leur appartenant toujours par leur nom & par leur memoire; & elles ne se glorifient pas moins des grands hommes qu'elles ont eus, que de ceux qu'elles ont encore. Cette considération, MESSIEURS, m'oblige à mettre au nombre des Pieces dont je dois vous rendre compte dans ce Discours, les Manuscrits qu'on a trouvez dans le Cabinet de feu M. de Tournefort. Inventeur & original dans une Science où il ne sembloit pas qu'on pût l'être, la distribution générale qu'il a faite des Plantes

*A Messieurs
de l'Acade-
mie des Me-
dailles &
Inscriptions.*

a réduit en Système ce qui n'étoit auparavant qu'un Catalogue très-incomplet, & les principes sur lesquels il a fondé cette distribution, sont si judicieux & si naturels, qu'on peut désormais sans connoître toutes les Plantes sçavoir néantmoins toute la Botanique. M. de Tournefort n'avoit pû faciliter & abréger ainsi cette science pour le Public, qu'après avoir essuié pour en apprendre lui-même tout le détail un nombre infini de perils & de travaux qui étoient au-dessus du courage ordinaire & de la destinée même des Sçavans. Son dessein n'étoit pourtant point encore accompli, & lui-même n'avoit regardé ses Institutions de la Botanique que comme l'essai d'un Ouvrage bien plus grand qu'il méditoit. C'est ce qu'on a reconnu pleinement par les douze volumes in folio de Recueils & de Memoires que M. de Tournefort remplissoit & augmentoit tous les jours, & dont la Republique des Lettres a hérité sous le nom & dans la Personne de Monsieur l'Abbé Bignon. Mais plus ces Volumes sont chargez de faits, de découvertes, d'observations, moins ils sont en état d'être exposés au Public, avant qu'une main sçavante leur ait donné une forme digne de la réputation de leur Auteur. M. Reneaume chargé de ce soin par Monsieur l'Abbé Bignon, a proposé à l'Academie ses vûes sur ce sujet; & il ne paroît pas que M. de Tournefort eût pû porter les siennes plus loin. Le premier Volume de ces Manuscrits est le seul dont M. Reneaume ne prétend pas faire usage, parce qu'il ne contient que la liste des Plantes du Jardin Roïal en particulier; & qu'ainsi il ne peut être utile qu'à ceux qui ont la direction de ce Jardin, dont l'ordonnance même a été fort changée. Mais les onze Volumes qui suivent, fourniront, selon lui, deux Ouvrages differens. Le premier sera un in-quarto intitulé, *Topographia Botanica cum notis, &c.* Cet Ouvrage sera tiré du second, du troisième, du quatrième & du cinquième Volume des Manuscrits de nôtre Auteur. Le premier de ces quatre contient les Herborisations de M. de Tournefort aux environs de Paris, dont il a fait imprimer la meilleure

partie en 1698, & plusieurs autres faites en d'autres lieux par d'autres mains que la sienne. Le second est la Nomenclature des Plantes observées par l'Auteur tant en France qu'en Espagne & en Portugal : outre cela, un Memoire des Plantes des Pirenées & de la Provence, qui lui avoit été communiqué par Monsieur le premier Medecin : & un autre qui venoit de M. Laugier fameux Botaniste. Joignant à cela les Herborisations que M. Reneaume a faites lui-même dans la Sologne & dans le Berri, & celles de M. Chomel dans l'Auvergne : plaçant là le Corollaire des Plantes étrangères que l'Auteur avoit apportées du voiage de l'Orient, & toutes les autres qui seront fournies par des Botanistes sçavans & fideles de tous les endroits du Monde ; on en fera le fond de la nouvelle Topographie. A l'égard des Notes qu'il faut joindre à cet Ouvrage pour le rendre plus agreable & plus utile, si elles sont purement critiques, il les prendra dans le troisième Volume intitulé par l'Auteur même *Plantarum adversaria*. C'est un Recueil très-curieux des differences qu'il avoit remarquées dans les Botanistes sur les noms & sur les descriptions des Plantes. Il distingue les bonnes & les mauvaises figures qu'ils en ont fait faire : il releve les erreurs où ils sont tombez en confondant sous un même nom des especes differentes, ou en établissant des especes differentes sur de simples varietez d'individus. Si ces Notes regardent l'usage de ces Plantes dans la Medecine, il les prendra dans le quatrième Volume qui en est rempli ; mais comme le choix n'en est pas fait, & qu'il est important de ne pas abuser sur cet article de la confiance que le Public auroit d'ailleurs en cet Ouvrage, M. Reneaume emploiera la derniere exactitude à verifier les vertus attribuées par l'Auteur à chaque Plante quand elles seront moins connus.

Voilà le projet abregé du premier Ouvrage qu'on pourroit appeller l'Histoire locale & critique des Plantes par opposition à leur Histoire naturelle & generale qui fera la matiere du second Ouvrage bien plus grand & plus confi-

derable que le premier. Il sera pris des sept derniers Volumes de nôtre Auteur. Le premier de ces sept est intitulé ou porte pour étiquette, *Observationes Botanicae*. Ces Observations sont semées selon l'ordre alphabetique, & laissent par conséquent de grands vuides entre elles : le tout enfin n'est qu'ébauché ; ou s'il s'y trouve quelques descriptions parfaites, elles sont du même ordre que celles qui remplissent les six derniers Volumes, & il faut les y rapporter. Ces six Volumes sont ce qu'il y a de plus complet dans ces Manuscrits. C'est un ample trésor & un riche fond pour une Botanique universelle ; ils sont remplis également & sous un même titre de descriptions de Plantes. Ces descriptions ne concernent pas seulement le port de chaque Plante prise en sa hauteur naturelle : Elles sont faites sur des études & des observations journalieres, & de saison en saison, ou d'année en année à mesure que ces Plantes croissent dans le Jardin Royal ou dans les Campagnes. On y fait mention des differences des Climats, selon lesquelles une Plante qui porte des fleurs & des fruits sur son terroir, ne porte ailleurs que des feuilles. On y parle de leur culture ou de leur naissance volontaire. Mais tout cela n'est pas également verifié, & M. de Tournefort qui n'avoit pû voir par lui-même tout ce qu'il dit, marque son doute en plusieurs endroits. De plus le nom de chaque Plante ne porte pas avec lui sa description ; & ce qu'il y en a sert d'engagement à traiter ainsi toutes les autres. C'est en ceci que M. Reneaume compte moins sur ses soins & sur ses travaux qui ne scauroient suffire à une execution si vaste, que sur les secours de Messieurs nos Botanistes, & sur tout de M. Marchant, qui cultive lui-même une infinité de Plantes curieuses, & qui en donne tous les ans de si belles descriptions à l'Academie. Il emploiera aussi celles de M. Chomel. Il consultera l'Herbier de M. Morin que M. de Tournefort lui-même indique quelquefois. Il remontera aux premiers memoires de l'Academie dressés par feu M. Dodard ; il n'excluëra point les Memoires étrangers quand ils viendront de quelque

main sûre, tels que sont entre autres ceux du P. Plumier qui a beaucoup étudié les Plantes de l'Amerique. Pour l'ordre sous lequel on rangera toutes ces Plantes, il n'en est point de meilleur que celui de la Methode établie dans les Institutions. Par là on fera sentir de plus en plus la commodité de cette Méthode; on y accoutumera les jeunes Botanistes, & la place sera toujours marquée pour les Plantes qu'on découvrira de siecle en siecle. Mais en nommant ces Plantes par rapport aux classes & aux genres de la Méthode, on joindra à chacune le nom ou le synonyme qu'elles ont dans Gaspard Bauhin & dans d'autres vieux Botanistes si elles leur ont été connues: on citera même leurs pages pour la commodité des confrontations; & afin qu'en réformant leur ordre & leur nomenclature, on ne perde pas les lumieres qu'on peut tirer de leurs recherches.

Le corps de l'Ouvrage sera enrichi de figures, & précédé de quelques Traitez préliminaires, qui expliqueront en général la nature des Plantes, leur anatomie ou leur construction interne, & ainsi du reste. On y joindra l'Histoire non des Plantes, car c'est l'ouvrage même; mais de la Botanique regardée comme science. On en rapportera le renouvellement & l'éclat à Gaston de France Duc d'Orleans, Oncle de Sa Majesté, qui assembloit dans son Palais les plus sçavans hommes en cette matiere; parmi lesquels se distinguoit M. Marchant le Pere, qui a laissé à l'Academie les plus belles figures qu'elle ait dans son Trésor. L'on finira par des Tables faites sur différentes vûes de commodité, & qui présenteront tout l'ouvrage sous toute sorte d'aspects. Un Corps de Botanique si entier & si achevé, & qui soutiendrait le titre de *Summa Botanica*, n'appartiendrait plus, à proprement parler, ni à M. de Tournefort ni à M. Reneaume, mais il seroit dû à l'Academie entiere: De telle sorte neantmoins, que sur le Plan & les Memoires de M. de Tournefort, M. Reneaume guidé par les conseils de Messieurs nos Academiciens auroit donné un Ouvrage, dans lequel on trouveroit tout l'ordre, toute

320 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE.
l'uniformité, toute la perfection qu'on ne peut attendre
que d'un seul esprit & d'une seule main, toute la discussion:
Tout l'étendue, toute l'infailibilité qui peut résulter des
Conferences d'une sçavante Compagnie.

ECLAIRCISSEMENTS

SUR LA CONSTRUCTION

DES EGALITEZ.

SECOND MEMOIRE.

PAR M. ROLLE.

1709.
9. Aoust.

VOici la suite des Eclaircissements que j'ai donnés sur
la Construction des Egalitez dans un Memoire du
11 Juillet 1708. Ce Memoire est imprimé parmi les autres
Memoires que l'Academie a donnés au Public la même
année, page 339. Il est necessaire d'en rappeler le souve-
nir pour l'intelligence de ce qui suit.

ARTICLE I. C'est une maxime de la Methode en
question : Que dans une effection géométrique le nombre
des Points où les Courbes se rencontrent, est toujours
égal au nombre des différentes Racines réelles de l'Egalité
que l'on s'est proposé de construire.

C'est encore une maxime de la même Méthode : Que
chacun de ces Points donne une de ces Racines.

J'ai marqué plusieurs exceptions de ces maximes dans
mon premier Memoire. Mais je n'ai pas encore expliqué
comment il arrive dans l'effection géométrique, que les
Courbes se rencontrent en autant de points qu'il y a de
différentes racines réelles dans l'Egalité à construire sans
donner aucune de ces racines : de maniere qu'en certains
cas, la premiere des deux maximes que je viens de citer
se trouve parfaitement remplie, & que dans ces mêmes
cas

cas l'autre maxime est par tout combattuë : que l'on ne trouve pas les racines qu'on demande , & que l'on en trouve d'autres qui en ont de fortes apparences. C'est la premiere difficulté que je tâcherai d'expliquer dans ce premier article.

Il y a des cas aussi , où le nombre des points de rencontre est tantôt plus grand , & tantôt plus petit que le nombre des différentes racines de l'Egalité proposée , & où il arrive , comme dans les cas précédens , que la méthode ne donne aucune de ces racines & en donne d'autres qui imposent. J'en donnerai ici des exemples.

En d'autres cas , cette méthode donne , ou toutes les racines de l'Egalité à construire , ou seulement quelques-unes. Mais en même tems elle donne aussi des racines réelles qui n'appartiennent pas à cette Egalité , & cela par des causes très-differentes de celles qui ont été expliquées dans le premier Memoire. En sorte qu'il seroit souvent difficile de distinguer dans la construction les racines que l'on demande de celles qu'il faut rejeter. Ainsi , il est bon d'en donner des exemples , & c'est par-là que finira ce premier article.

Je n'entreprends pas , cette fois , de faire connoître toute l'étendue de ces inconvéniens , ni l'étendue des autres inconvéniens de la Méthode qui seront indiqués dans ce Memoire. Je me propose seulement d'en prouver la réalité , en attendant une nouvelle Theorie qui marquera ce qu'il faut retenir de cette Méthode , & ce qu'il faudroit y ajouter pour la mettre en état de produire les effets qu'on lui attribué , lorsque cela est possible.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple , l'Egalité que l'on se propose de construire ne renferme qu'une racine réelle. La Méthode ne donne pas cette racine , & donne une racine réelle étrangere.

L'Egalité à construire est celle qu'on voit en A.

$$A. x^5 + a^4 x - 2 a^5 = 0.$$

Le lieu donné est le lieu marqué *B*.

$$B \dots yyxx + 2a^4 = a^3x.$$

Et le second lieu que fournit la Méthode se présente d'abord comme il est en *C*.

$$C \dots aax^3 - 4a^3xx + 4a^4x + xy^4 - 2ay^4 = 0.$$

Mais il se divise par $x - 2a$, & la division le réduit aux termes marquez *D*.

$$D \dots aaxx - 2a^3x + y^4 = 0.$$

FIG. I.

Comme la racine que donne la construction est toujours la même, soit que l'on prenne *C*, ou que l'on prenne *D*, il est mieux de prendre le plus simple. Ainsi, il faut construire sur un même axe *EO* & une même origine *O*, le lieu donné *B* & le lieu trouvé *D*, suivant la Méthode. Ce qui produira l'effet que désigne la premiere figure.

Le premier lieu fournit la feuille infinie *CRMPNSC*. Et le second lieu donne le Cercle du second genre *OFCGO*.

Ces deux Courbes se touchent au point *C* & ne se rencontrent que dans ce point. D'où il faudroit conclure selon la Méthode, que l'appliquée *OC* commune aux deux Courbes est la racine de l'Egalité *A*, & conclure aussi que cette Egalité n'a point d'autre racine.

Mais il se trouve tout au contraire que l'Egalité *A* renferme une racine que la construction ne donne pas, & que la racine *OC* qu'elle donne, n'est pas de cette Egalité.

Car 1^o, la Resolution analytique de l'Egalité *A* fait voir que *a* est l'unique racine réelle de cette Egalité; de plus, cette racine ne se trouve pas dans la construction: parce qu'il faudroit pour cela qu'elle fût dans les lieux *B*, *D*. & en la substituant à la place de *x* dans le lieu *B*, il arrive que la valeur de *y* qui devoit en être l'abscisse n'est autre chose que la valeur imaginaire $\sqrt{-aa}$. Ainsi, la racine de *A* ne se trouve pas dans le premier lieu, ni par conséquent dans la construction.

2^o. Je dis qu'il n'y a qu'une racine dans la construction, & que cette racine est étrangere. Car en comparant les lieux construits *B*, *D*, pour faire évanouir *y*, la réduite se

divise par la proposée A , & donne au quotient l'Egalité $xx - 4ax + 4aa = 0$; ainsi cette Egalité renferme toutes les racines étrangères qui peuvent se trouver dans la construction. Mais elle ne donne que $2a$ pour la valeur de x , & $2a$ étant substituée à la place de x dans les lieux $B. D.$ chaque substitution donne $y = 0$, & ne donne point d'autre valeur de y . D'où il suit que la Méthode dans cet exemple, n'a introduit que la seule racine étrangère $2a$, & que cette racine est dans la construction, puisqu'elle se trouve dans une solution des lieux. De là il suit aussi qu'elle n'y est qu'une fois; puisque l'une & l'autre substitution n'a donné qu'une valeur de y pour abscisse. Donc l'effectiion géométrique ne donne pas la racine de l'Egalité à construire (par 1^o.) & donne une racine qui n'appartient pas à cette Egalité (par 2^o.). *Ce qu'il falloit, &c.*

Remarque. Pour reconnoître les véritables racines dans la construction & les distinguer des racines étrangères que la Méthode y introduit. Pour sçavoir aussi combien de fois les unes & les autres s'y trouveront, & pour s'assurer de celles qui n'y entrent pas, il suffiroit de résoudre en termes analytiques le Problème qu'expriment les lieux construits d'une manière relative à cette Méthode. On a pû se donner quelque idée de la résolution de ce Problème dans l'exemple précédent, & l'on auroit occasion de perfectionner cette idée dans d'autres Exemples que l'on verra ici. Mais l'on verra encore mieux dans les Mémoires suivans, les difficultés qui en sont inséparables & la nécessité de les résoudre, quand on veut reconnoître les écueils de la Méthode en question.

SECOND EXEMPLE.

Les Courbes se coupent en deux point dans cet exemple, & il n'y a aussi que deux racines réelles dans l'Egalité à construire. Mais les racines que donnent ces points ne sont pas de cette Egalité.

L'Egalité proposée est l'Egalité E . Je la prens fort

324 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
simple, afin que le calcul ne soit pas rebutant.

$$E \dots 4xx - aa = 0.$$

Pour la construire on donne le lieu F .

$$F \dots yxx + 6a^4 = 9aaxx + 4a^3x.$$

Et la Méthode fournit le second lieu G .

$$G \dots yy + 15aa = 16ax.$$

Construisant ces lieux selon cette Méthode sur l'axe DL & sur l'origine O , l'effectiion géométrique sera représentée comme dans la seconde figure.

Les valeurs positives de x dans le lieu F donnent les rameaux infinis BSP . BTQ .

Les valeurs négatives de x fournissent encore des rameaux à l'infini AM . AN .

Le lieu G donne la parabole $VSCTZ$.

Cette parabole rencontre l'autre Courbe aux points S , T , & ne la rencontre que dans ces deux points. Ainsi, la construction donne les deux racines SD , TL , & n'en donne point d'autres. D'où il faudroit conclure, suivant la Méthode en question, que ces deux racines sont celles de l'Egalité proposée E , & qu'elle n'en renferme point d'autres. Il sembleroit même que cela se confirme, en ce que SD , TL sont de même grandeur & différemment placées dans la construction, & que les deux racines de l'Egalité à construire sont aussi de même grandeur sous differens signes. Mais comme cette Egalité est fort simple & ces racines commensurables, & que la racine étrangere est aussi commensurable, il est très-facile de s'assurer par les voies dont je me suis servi dans le premier Exemple: Que la Méthode donne dans celui-ci autant de racines réelles, qu'il y en a dans l'Egalité que l'on s'étoit proposé de construire, & qu'il n'y a dans la construction aucune des racines de cette Egalité.

A la place de l'Egalité E , on peut en prendre une autre aussi composée qu'on voudra, soit dans ses termes ou dans l'élévation de son degré, & se proposer de la construire en prenant F pour le premier lieu. Alors on verra que les Courbes se rencontreront en deux points pour la

racine étrangere, quand même toutes les racines de la proposée seroient imaginaires. De plus, les racines de la proposée étant réelles, elles ne se trouveront pas dans la construction lorsqu'elles ne seront point de celles que renferme le lieu F ; & la compensation des deux inconvéniens produira un troisième inconvénient qui aura du rapport à celui que désignent les deux premiers Exemples. On peut faire de semblables observations sur chaque premier lieu, dont il sera parlé dans les Remarques suivantes.

REMARQUE I. Si l'on veut un Exemple où les Courbes se rencontrent en autant de points qu'il y a de racines dans l'Egalité à construire sans donner aucune de ses racines: de maniere que les racines étrangères soient de différentes grandeurs; on n'a qu'à prendre le lieu $yyx^3 + xx + 8 = 6x$, & se proposer de construire l'Egalité $x^4 - 4x + 2 = 0$. Alors on verra que les Courbes se rencontrent en deux points, & que les deux racines qu'ils donnent sont différentes. On y verra aussi que ce ne sont point les deux racines réelles que cette Egalité renferme.

REMARQUE II. Il y a quantité d'Exemples où le nombre des points de rencontre est plus grand ou plus petit que le nombre des racines réelles de l'Egalité proposée.

Exemple I. Si l'on se propose de construire l'Egalité $xx + 2 = 0$, le premier lieu étant $yx + 1 = x$: alors le second lieu sera $x + 2y = 1$. Et la droite rencontrera la Courbe en un point. Ainsi la construction donnera une racine réelle. Cependant il est visible que la proposée ne renferme que des racines imaginaires.

Exemple II. Si l'on a le lieu $yyxx + x = 4$, pour construire l'Egalité $x^3 - 3x + 1 = 0$, les Courbes ne se rencontreront qu'en un point, & néanmoins il y a trois racines réelles & différentes dans l'Egalité proposée..

REMARQUE III. Souvent la Méthode donne les racines de l'Egalité proposée ou du moins quelques-unes, l'orsque le nombre des points de rencontre surpasse le nombre de ces racines & même quand il surpasse le nombre des dimensions de cette Egalité. De là plusieurs difficultez

quand il faut les démêler des racines étrangères dans la construction. On commencera à sentir ces difficultez, si l'on prend le lieu $yyxx + 6a^4 = 9aaxx + 4a^3x$, pour construire l'égalité $x^3 - 3aax + a^3 = 0$. La Méthode donnera le second lieu $4axx + 21aax + ayy = 3yyx + 9a^3$. Et l'on trouvera que la construction ne donne que deux racines de l'Egalité proposée, quoique les Courbes se coupent en six points, & qu'il y ait trois racines dans cette Egalité.

On verra encore mieux ce surcroît de racines étrangères & les difficultez qu'elles produisent dans la Méthode, si l'on prend pour le premier lieu d'une construction celui que l'on voit ici en *K*.

$$K \dots y^3x^7 + 6aab^4x^4 + a^3x^7 + a^4b^4 = 4aayx^7 + b^4x^6 + [9a^4b^4xx =]$$

Alors les Courbes se rencontreront toujours en dix-huit points pour les seules racines étrangères, quand même l'Egalité à construire ne renfermeroit que des racines imaginaires. Ce qui augmente considérablement lorsque cette Egalité renferme des racines réelles différentes des racines étrangères. Par exemple, dans l'hypothèse que l'Egalité à construire renferme douze racines réelles seulement, toutes différentes entr'elles & différentes aussi des racines étrangères; les Courbes se rencontreroient du moins en trente points, & tout au plus en cinquante-quatre points, selon la grandeur de ces douze racines ou le rapport qu'elles auroient aux racines étrangères.

REMARQUE IV. Il y a un grand nombre de lieux qui fournissent des racines étrangères de l'espece indiquée par les précédens exemples, quand on se sert de la Méthode en question. Car s'il arrive que le premier terme de l'inconnüe principale soit affecté de l'autre inconnüe dans le premier lieu, & que parmi les termes moïens de cette inconnüe principale, il y ait un monome dans lequel l'autre inconnüe ne se trouve pas. Alors, cette Méthode introduit toujours des racines étrangères dans les Réduites de quelque nature que soit l'Egalité à construire. Ces racines se trouvent encore toujours une ou plusieurs fois

dans la construction lorsqu'elles ne sont pas imaginaires & que leurs abscisses sont aussi ou réelles ou θ . Ce qui arrive souvent aussi, lorsqu'il n'y a point de ces monomes.

Il peut encore s'introduire des racines étrangères dans l'usage de cette Méthode, quoique le premier terme de l'inconnue principale ne renferme pas l'autre inconnue. On en verra un exemple dans la Remarque suivante.

REMARQUE V. Il y a des racines étrangères qui sont égales aux véritables racines; & il y a des cas aussi où les unes & les autres seroient inaccessibles, quoique comprises dans la construction; parce que ces racines seroient placées à une distance infinie de l'origine. En voici un Exemple.

Si l'on se propose de construire l'Egalité $xx - 3ax + 2aa = \theta$ en prenant $xx = xy - 2ay$ pour le premier lieu, la Méthode donnera le second lieu $yx + 2aa = 2ay + 3ax$, & ces deux hyperboles se couperont à portée pour la racine $+a$. Mais pour l'autre racine $2a$, ces Courbes ne se rencontreroient que dans un point inaccessible; c'est celui où elles toucheroient une asymptote qui est commun à l'une & à l'autre. Ainsi cette racine seroit placée dans la construction à une distance infinie de l'origine, & il en seroit de même de la racine étrangère qui s'est introduite: parce qu'elle est égale à la véritable racine $2a$.

REMARQUE VI. La Combinaison du premier & du second lieu ni celle des autres lieux qui en résultent, ne serviroient pas à remédier aux inconveniens que j'ai marqués dans ce premier article ni aux inconveniens expliqués dans le premier Memoire. Ce ne seroit pas aussi un moïen general pour éviter ceux qui viennent des racines étrangères, de prendre un premier lieu où l'inconnue principale auroit des valeurs positives & négatives de toutes les grandeurs. Cette condition se trouve dans l'exemple de la 5^e Remarque, & l'inconvenient ne laisse pas d'y être. Et quoique la même condition se puisse trouver dans la moitié des premiers lieux que renferme la détermination générale de la 4^e Remarque, cela n'empêche pas que la Mé-

328 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
rhode ne jette dans l'inconvénient des racines étrangères
indiqué dans cette Remarque.

ARTICLE II. On est dans ces préjuges, que les Courbes
se touchent toujours dans les constructions, quand elles
donnent des racines égales, & qu'elles ne se coupent ja-
mais au point où elles ont une même tangente. Il est rare
aussi en un sens, qu'elles se coupent lorsqu'elles donnent
ces racines; mais il ne laisse pas d'y en avoir quantité
d'Exemples. En voici un qui en fournit une infinité d'au-
tres dans chaque genre, où l'on verra que les Courbes
se coupent au point qui donne les racines égales, & que
ces Courbes ont une même tangente dans ce même point.

Exemple. Si l'on se propose l'Egalité L dont toutes les
racines sont égales.

$$L \dots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

Et que pour la construire on ait le premier lieu $xx = ay$,
la Méthode donnera le second lieu M .

$$M \dots xy - 3ay + 3ax - aa = 0.$$

Construisant l'un & l'autre lieu sur un même axe OF
& une même origine O , la construction sera représentée
comme dans la 3^e Figure. De manière que les Courbes se
coupent en un point C , & que l'appliquée FC exprime
chacune des racines de la proposée L .

Mais à cause que ces racines sont égales, on seroit porté
à croire que les Courbes ne se coupent pas au point C ,
& l'on est fortifié dans ce sentiment, quand on prend les
tangentes de l'une & de l'autre Courbe au même point
 C . Car ces deux tangentes se trouvent égales, & comme
ces Courbes n'ont qu'un même axe & une même origi-
ne; que leur appliquée & leur abscisse est aussi la même
en ce point; il est évident que ces deux tangentes se con-
fondent, & ne font qu'une même tangente. Ce qui est
la marque la plus ordinaire des Courbes qui se touchent.
Et c'est aussi ce qui m'a obligé de prendre ici une autre
voie pour prouver que le point C donne les racines éga-
les de l'Egalité L , & que la parabole OCH coupe l'hyper-
bole BCG au même point.

1°. Je dis que la construction donne toutes les racines égales de l'Egalité L , & que toutes ces racines n'ont qu'une seule abscisse.

Car la résolution analytique de cette Egalité donne $x=a$ pour chacune de ces racines égales, & nous assure qu'elle n'a point d'autres racines.

De plus, substituant a dans les lieux à la place de x , les deux substitutions donnent $y=a$, pour une abscisse de la racine $x=a$, & ne donnent point d'autre valeur de y .

Donc, la construction &c. Ce qu'il falloit &c.

2°. Les Courbes ne se rencontreront qu'en un point dans la construction.

Car, en faisant évanouir y , la Réduite des lieux se trouve la même que l'Egalité à construire : ainsi, il ne s'est introduit aucune racine étrangère dans la construction.

On vient de voir aussi par (1°.) que toutes les racines de cette Egalité n'ont qu'une seule abscisse. Donc les Courbes ne se rencontrent qu'en un point dans la construction.

3°. Il y a deux points sur l'axe OF ; l'un au dessus de F où la parabole est plus proche de cet axe que l'hyperbole, & l'autre au dessous de F , où l'hyperbole est plus proche du même axe que la parabole. Ce qui peut se prouver en cette manière.

Ayant pris $y=\theta$ pour un abscisse de la parabole au point O qui est au dessus de F , on aura $x=\theta$ pour son appliquée. Ainsi, le point O est à cette parabole. Mais prenant $y=\theta$ pour un abscisse de l'hyperbole, on trouve $y=\frac{1}{2}a$ pour l'appliquée OA de cette Courbe, & $\frac{1}{2}a$ est plus grand que θ . Donc au point O qui est au dessus de F , l'hyperbole s'éloigne de l'axe OF plus que la parabole.

Prenant aussi $y=2a$ sur le même axe pour un point R au dessous de F & pour l'abscisse de l'une & de l'autre Courbe, on aura $x=\sqrt{2aa}$ pour l'appliquée RH de la parabole, & $x=\frac{2}{3}a$ pour l'appliquée RG de l'hyperbole.

Mais $\frac{7}{4}$ est plus petite que $\sqrt[3]{2aa}$. Donc RG est plus petite que RH . Donc, il y a un point R sur l'axe OF au dessous de F où l'hyperbole est plus proche de cet axe que la parabole.

Donc, il y a deux points sur l'axe OF &c.

4°. Entre les deux appliquées OA , RH , les deux Courbes demeurent toujours concaves vers l'axe OF . Il ne se trouve entre ces deux appliquées ni inflexion, ni recourbement, ni rebroussement, ni asymptote, ni limite, ni rien qui rompe cette concavité vers cet axe. Ce que je suppose évident dans cet exemple; parce que ces Courbes ont été fort examinées & sont aussi fort connus.

Ainsi, la Construction dans l'exemple proposé, donne toutes les racines égales de l'Egalité L au point C par (1° & 2°).

Les Courbes se coupent au même point C par (3° & 4°), puisque la Courbe la plus proche de l'axe au dessus de C est celle qui s'en éloigne davantage au dessous de ce point, & que dans l'intervalle ces deux Courbes demeurent toujours concaves vers l'axe OF .

Donc le point C donne les racines égales de l'Egalité L que l'on s'étoit proposé de construire, & la parabole OCH coupe l'hyperbole BGG au même point C . Ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE I. On peut sçavoir par cette voie, si deux Courbes géométriques quelconques se touchent ou se coupent aux points où elles se rencontrent. Mais dans le dessein qu'on auroit de former sur cela une Méthode générale, ce seroit peu de réduire ces Courbes à un même axe & à une même origine, il faudroit encore avoir les limites propres aux appliquées qui donnent les points de rencontre avec la détermination des points notables qui se trouveroient entre ces limites, parmi lesquels je comprends ceux qui terminent des asymptotes, lorsque ces asymptotes eux-mêmes ne sont pas du nombre des limites.

REMARQUE II. Sur l'idée de ce premier exemple L , M , On peut trouver en différentes manieres autant de for-

mules qu'on voudra qui fourniront une infinité de lieux de tous les genres dont les Courbes couperont à Tangentes égales une Courbe géométrique donnée dans un de ses points pris à volonté; pourvû que ce point ne soit pas de ceux qui seront exceptez ci-après.

Pour donner un avant-goût de ces Formules j'en proposerai seulement deux ou trois du premier genre, dans lesquelles je prends pour la Courbe donnée, la parabole N .

$$N \dots xx = cy.$$

En multipliant l'Egalité L , par $x - h$ & prenant N pour le premier lieu de l'Egalité résultante, on aura pour second lieu la formule qu'on voit en O .

$$O \dots ccyy - bcxy + 3ahcy - 3aahx + ha^3 = 0.$$

$$- 3acxy + 3aacy - a^3x.$$

Prenant pour h une ligne connue à volonté, & construisant les lieux N , O sur un même axe & une même origine, ils se rencontreront en deux points, excepté le cas où ces points se confondent. Un de ces points donnera $x = a$ pour les racines égales de l'Egalité L , & l'autre $x = h$ pour la racine introduite. De manière que si l'on prend arbitrairement un point sur la parabole N hors son sommet, & a pour son appliquée, les Courbes se rencontreront dans ce même point. Sur quoi il faut observer.

1°. Si $h = -a$ le lieu O ne donnera que deux lignes droites, dont l'une touchera la parabole & l'autre la coupera au point donné ou choisi.

2°. Si $h = a$, l'hyperbole que donnera O , touchera la parabole N au point choisi.

3°. Si $h = -3a$ le lieu O fournira une parabole qui coupera à Tangentes égales la parabole donnée au point donné.

4°. Et lorsque le point donné ou choisi sera celui du sommet de la parabole N , le lieu O ne fournira que deux lignes droites, dont l'une se confondra avec un des axes générateurs.

5°. Mais en tout autre point de la parabole donnée,

332 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 les autres valeurs de b fourniront dans O une infinité d'hyperboles qui couperont cette parabole à Tangentes égales au point donné ou choisi.

Si $b = -\frac{1}{3}a$, l'hyperbole DCH , coupera la parabole donnée $DOLV$ (fig. 4.) au point donné C .

Si $b = 2a$, l'hyperbole $TCSV$, coupera aussi la parabole en C .

Et $b = \theta$ donnera une autre hyperbole OCK qui coupera encore la parabole donné au point C .

Ainsi de suite à l'infini. Ensorte que cette infinité de Courbes se couperont en C & n'auront qu'une même Tangente dans ce point C .

Les bornes de ce Memoire & le choix des propositions qu'il doit renfermer ne permettent pas de mettre ici les preuves des intersections. En attendant on peut s'en assurer dans chaque Exemple par la voie dont je me suis servi sur l'Exemple LM . Pour l'identité des Tangentes il ne faut aucun détail. Car, laissant b indéterminé dans O , on trouvera d'abord que la soûtangente sur l'axe des y est $\frac{2aa}{c}$, de même que dans N . Ce qui peut servir pour abrégér la démonstration générale des Intersections qui se font en C . Voici d'autres Formules.

REMARQUE III. Dans la Remarque précédente on peut faire varier le second lieu autant qu'on voudra par la voie des substitutions. A la place de $x - b$, on peut aussi prendre un multiplicateur de L , où x ait autant de termes qu'on voudra & dont tous les coëfficiens soient exprimés par des indéterminées chacun par une voie différente des autres. Ce qui fournit plusieurs voies différentes & très-générales pour trouver des Formules dans chaque genre dont les Courbes couperoient à Tangentes égales une Courbe donnée dans un point donné. A quoi on peut encore ajouter la combinaison des lieux, comme une voie des plus expeditives pour la variété des Formules, comme on le dira dans un autre Memoire. J'en donnerai seulement deux ici qui se tirent aisément

de la 2^e Remarque par la voie des substitutions , ou par les combinaisons.

La premiere est celle qu'on voit ici en *P*.

$$P \dots n n x x - c c y y + 6 a a c y - n n c y - 8 a^3 x - 3 a^4 = 9.$$

Si $n=2a$. La Formule *P* ne donne que deux lignes droites, dont l'une touche la Parabole donnée au point donné, & l'autre la coupe au même point.

Si le point donné est au sommet de la parabole. Alors les hyperboles que fournit *P* la touchent dans ce même point.

En tout autre point de cette parabole , la Formule *P* fournit une infinité d'hyperboles différentes entr'elles & différentes encore de celles que donne *O* , selon les différentes valeurs que l'on prend pour *n*.

Si $n=3a$ la Formule *P* donne une hyperbole *GDFM* (fig. 5.) qui coupe la parabole donnée *GON* , au point choisi ou donné *F*.

Et lorsque $n=a$ la Formule *P* fournit une autre hyperbole *PFIG* qui coupe aussi la parabole au point *F*.

Les autres valeurs de *n* donneront dans *P* une infinité d'autres hyperboles qui couperont la parabole donnée en *F* ; en sorte que *EF* sera toujours la valeur de chaque racine égale, & que cette infinité de Courbes n'aura qu'une même Tangente dans ce point *F*.

La seconde formule est celle qu'on voit ici en *Q*.

$$Q \dots r r x x + c c y y - 6 a a c y - r r c y + 8 a^3 x - 3 a^4 = 9.$$

Lorsque $r=c$, ce lieu fournit un cercle dont le rayon varie selon les differens points de la parabole donnée.

Mais si l'on prend arbitrairement pour *r* une valeur différente de *c*, la même Formule donnera une Ellipse. Ainsi, pour chaque point de la parabole donnée, la Formule *Q* fournira un Cercle & une infinité d'Ellipses qui la couperont à Tangentes égales dans tous ces points, excepté au sommet, où ce Cercle & ces Ellipses toucheront cette Parabole. Comme les intersections se feront dans le sens de *PFIG* (fig. 5.) il paroît inutile de donner sur cela une autre figure.

REMARQUE IV. Je donnerai en d'autres Memoires d'amples éclairciffemens sur les propositions suivantes.

1°. On peut trouver des Formules autant qu'on voudra dont les Courbes couperont une autre Courbe à Tangentes égales en autant de points qu'on voudra dans une même construction. Pour cela, on a deux voies dont on peut se servir, ou ensemble ou séparément.

La premiere consiste dans la multiplicité des absciffes de chaque racine égale. Par exemple, si l'Egalité à construire est celle qu'on voit en L .

$$L \dots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = \theta.$$

Et que l'on ait pour premier lieu le Cercle R .

$$R \dots xx = 5aa - yy.$$

Ce Cercle coupera en deux points à Tangentes égales la Courbe que donne le second lieu.

Les differens ordres de racines égales que renferme l'Egalité à construire, sont aussi une voie pour cette recherche. Ainsi, multipliant L par $x^3 - 6axx + 12aax - 8a^3 = \theta$, on aura S .

$$S \dots x^6 - 9ax^5 + 33aax^4 - 63a^3x^3 + 66a^4xx - 36a^5x + 8a^6 = \theta.$$

Et construisant cette Egalité en prenant $xx = ay$ pour le premier lieu, cette parabole sera coupée en deux points à Tangentes égales par la Courbe du second lieu. Cette seconde voie convient aux Courbes données bien mieux que la premiere voie.

Si l'on construit S en prenant R pour le premier lieu, les deux voies se trouveront de concert. Aussi l'on verra que les Courbes se couperont en 4 points à Tangentes égales.

2°. Il y a quantité d'exemples où les Courbes se coupent à Tangentes inégales au point où elles donnent des racines égales, & même des exemples où cela se trouve plusieurs fois dans une même construction.

Si l'Egalité à construire est T .

$$T \dots x^{13} + 2a^1x^7 - 4a^6x^6 + a^{10}xx - 4a^{11}x + 4a^{12} = \theta.$$

Et que l'on ait pour le premier lieu $x^3 = aay$. Alors le second lieu sera V .

$$V...y^4 + 2ayyx - 4aayy + aaxx - 4a^3x + 4a^4 = 0.$$

Les Courbes se couperont en deux points. Un de ces points donnera les deux racines égales de T qui sont commensurables; l'autre point, les deux racines égales incommensurables, & l'on verra que dans chacun de ces points, les Tangentes des deux Courbes sont fort différentes. Si l'on veut sur cela un exemple dans lequel il n'y ait qu'une couple de racines égales, on n'a qu'à prendre $x^3 = aay$ pour construire $x^5 - ax^4 + a^3xx - 3a^4x + 2a^5 = 0$. On verra que les Courbes se coupent pour les racines égales & que les Tangentes ne sont pas les mêmes au point d'intersection qui donne ces racines.

3°. En d'autres cas, les Courbes se coupent à Tangentes égales, quoique l'Egalité proposée ne renferme point de racines égales, comme on le verra si l'on prend $yx + 1 = x$ pour construire $x^4 - 2x + 1 = 0$. Alors les Courbes se couperont à Tangentes égales pour $x = 1$ qui est une des racines inégales de l'Egalité proposée. Il se trouve encore dans cet exemple qu'un autre rameau du second lieu coupe la Courbe du premier lieu au point de $x = 1$, pour les racines égales de la réduite, & néanmoins la Tangente de ce rameau n'est pas la même dans ce point que la Tangente de cette Courbe.

Il y a aussi des cas où les Courbes se touchent, & d'autres cas où elles se coupent à Tangentes égales, quoique toutes les racines de la proposée soient imaginaires.

4°. Il peut même arriver que la plupart de ces inconvéniens soient joints à d'autres inconvéniens qui sont beaucoup plus considérables pour la méthode en question. Si pour construire $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, on a pour premier lieu $x^3 = 6xx - 11x + 6$, le second lieu sera $x = 2 + yy$. Et l'on trouvera que les Courbes se touchent d'une manière peu commune pour la racine $x = 2$: Qu'elles se coupent en deux endroits pour la racine $x = 3$, & qu'elles ne se rencontrent pas pour la racine $x = 1$.

ARTICLE III. Dans l'usage de la Méthode en question, le premier lieu est ou donné ou pris à volonté. Lorsqu'on

336 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 peut le prendre à volonté, on peut aussi éviter les incon-
 veniens qui regardent le fond de cette Méthode, ou en
 tirer avantage pour s'assurer en plusieurs cas des constru-
 ctions impossibles. Ce qui m'oblige de marquer ici entre
 tous ces inconveniens, ceux qui regardent particuliere-
 ment le choix du premier lieu & l'usage du second lieu.

Car les premiers lieux les mieux choisis donnent assez
 souvent de seconds lieux imaginaires, ou des lieux réels
 qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite; ou des lieux
 divisibles qui dans l'usage ordinaire, donneroient l'ex-
 clusion à des racines réelles de l'Egalité à construire; &
 l'expérience a fait voir qu'il est nécessaire d'expliquer
 ces inconveniens avant que d'y remédier. Voici des Exem-
 ples avec des Remarques qui serviront à ce dessein,

PREMIER EXEMPLE.

*Dans cet Exemple l'Egalité à construire renferme plusieurs
 racines réelles: Elle est la même que la réduite des lieux,
 comme on le désire dans la Méthode. Le premier lieu est
 aussi réel; il fournit une Courbe dont les quatre rameaux
 s'étendent à l'infini & donnent une infinité d'appliquées
 positives avec une infinité d'appliquées négatives. Ce-
 pendant le second lieu que fournit la Méthode est un lieu
 absolument imaginaire.*

L'Egalité à construire est l'Egalité *A*.

$$A \dots x^8 + nx^6 + n^2x^4 - n^3 = 0.$$

Le premier lieu est celui que l'on voit en *B*.

$$B \dots x^4 = nnyy + 2n^2.$$

Et la Méthode donne le second lieu *C*.

$$C \dots nxx + nx + y^4 + 4nnyy + 3n^2 = 0.$$

En voulant construire ces lieux, on verra que *B* four-
 nit une hyperboloïde du second genre. Mais quand on
 viendra au second lieu *C* que la Méthode a donné, on
 trouvera qu'en prenant à volonté une valeur réelle pour
 une des inconnues laquelle on voudra; l'autre inconnue
 n'a que des valeurs imaginaires, & si l'on observe com-
 ment

ment cela arrive, on s'appercvra qu'en vain l'on chercheroit une Solution réelle de ce lieu *C*. On le verra peut-être mieux si l'on dégage *x* par la règle ordinaire du second degré. Alors la valeur de cette inconnuë sera exprimée, comme on le voit en *D*.

$$D...x = \pm \frac{1}{2}n \pm \sqrt{-\frac{11}{4}nn - 4yy - \frac{y^4}{nn}}.$$

Où l'on peut voir qu'en prenant pour *y* une valeur réelle comme on voudra, ou positive, ou negative, ou même le 0, la somme des monomes que renferme le signe radical sera toujours negative; & par conséquent ses racines toujours imaginaires. On voit que les autres parties de la valeur de *x* n'ont rien qui puisse détruire ces racines, & qu'elles ne peuvent être séparées par la division. Ce qui me paroît suffire pour s'assurer que toutes les valeurs de *x* dans *D* sont des valeurs imaginaires lorsque *y* est réel; & pour s'assurer aussi que le lieu *C*, que la Méthode a donné, est un lieu absolument imaginaire.

On pourroit encore voir que ce lieu *C* n'a aucune solution réelle, en y appliquant la première des deux Méthodes que je donnai au public en 1699. pour la résolution générale des Questions indéterminées, & je serois obligé de me servir de cette Méthode si j'avois entrepris de faire connoître toute l'étenduë des principaux inconveniens de la Méthode dont il s'agit. Mais je me propose seulement de marquer la réalité de ces inconveniens, en quoi il m'a paru que l'Algebre la plus ordinaire pouvoit suffire, lorsqu'une des inconnuës ne passe point le second degré. Il y a quantité de lieux où les Inconnuës sont d'un degré plus élevé, qui peuvent être examinées à fond par la voie des Cascades algébriques. Mais ce ne sont aussi que des cas particuliers, & il y a infiniment plus d'Exemples où il faut nécessairement une Méthode aussi générale que la Méthode des Indéterminées de l'année 1699. pour sçavoir si les lieux sont réels ou imaginaires & en distinguer les especes.

SECOND EXEMPLE.

La Proposée est l'Egalité *E*.

$$E \dots x^5 + a^3xx - 2a^3cx + a^3cc + a^3dd = 0.$$

On a $x^2 = ay$ pour le premier lieu, & la Méthode donne le second lieu *F*.

$$F \dots xxy + aaxx - 2aax - aacc + aadd = 0.$$

En dégageant x ou y , on pourra voir que ce second lieu est tout à-fait imaginaire, suivant ce qui a été dit dans le premier Exemple. On ne peut douter néanmoins que le premier lieu n'exprime une Courbe, ni que l'Egalité à construire ne renferme du moins une racine réelle, quelque valeur que l'on veuille prendre pour *a. c. d.* puisqu'elle est d'un degré impair. Il faut néanmoins excepter $d=^3$, qui jette dans un autre écueil.

On peut remédier aux inconveniens que désignent ces deux Exemples, en transformant ou le premier lieu, ou l'Egalité proposée. Ce qui ne seroit pas aisé si l'on vouloit régler généralement ces transformations.

Voici d'autres Exemples où les premiers lieux sont d'un usage ordinaire dans la Méthode en question, & néanmoins cette Méthode ne laisse pas de donner de seconds lieux imaginaires & de seconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe. Mais l'on n'aura pas besoin de transformations pour remédier aux inconveniens indiquez par ces Exemples.

TROISIEME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, on se propose de trouver un second lieu qui exprime un Cercle. On prend pour premier lieu le plus commode de tous les lieux qui peuvent servir à ce dessein, & l'Egalité à construire est aussi du degré le plus avantageux pour cette recherche. Cependant le second lieu que la Méthode fournit se trouve imaginaire, quoique revêtu des apparences d'un lieu au Cercle.

L'Egalité à construire est l'Egalité *G*.

$$G \dots x^4 + aaax - a^3x + a^4 = 0.$$

Le premier lieu est la parabole ordinaire *H*.

$$H \dots xx - ay = 0, \text{ ou } xx = ay.$$

1°. Ne substituant la valeur de *xx* prise de *H*, que dans le premier terme de la proposée *G*, il en résulte le second lieu *I*.

$$I \dots yy + xx - ax + aa = 0.$$

qui est figuré comme un lieu au Cercle. Mais comme ce lieu est fort simple, il est fort facile aussi de s'assurer que toutes les Solutions dont il est capable sont imaginaires, & que le Cercle qu'il promet n'a rien de réel. Ainsi, il seroit inutile d'en apporter les raisons, après ce qui a été dit dans l'explication du premier Exemple.

2°. Si l'on substituë la valeur de *xx* dans les deux premiers termes de *G*, on aura le second lieu *K*.

$$K \dots yy + ay - ax + aa = 0.$$

Et combinant affirmativement ce lieu *K* avec le lieu *H*, il en résultera le lieu imaginaire *I*. En sorte que si l'on insiste à vouloir que le second lieu soit un Cercle; les moïens, ou vagues ou précis, que la Méthode fournit, ne donneront qu'un Cercle imaginaire. Encore un Exemple de cette espece.

QUATRIÈME EXEMPLE.

Dans cet Exemple la Méthode ne permet pas de faire varier les substitutions dans la recherche du second lieu. Celui qu'elle fournit fait espérer un Cercle ou une Ellipse. Mais ce Cercle & cette Ellipse se trouvent imaginaires.

La proposée est l'Egalité *L*.

$$L \dots x^6 + ba^3xx - 2a^4bx + ba^5 = 0.$$

Le premier lieu est $x^3 = aay$. Ainsi la substitution de *aay* à la place de x^3 ne se peut faire que dans le premier terme de *L*. Ce qui donne le second lieu *M*.

$$M \dots ayy + bxx - 2abx + baa = 0.$$

qui a les apparences d'un lieu à l'Ellipse lorsque *a* est différent de *b*, & celles d'un lieu au Cercle lorsque *a* est

340 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 égal à b . Mais en l'examinant selon ce qui a été dit dans
 le premier Exemple on verra aisément qu'il n'a aucune
 solution réelle ; non-seulement quand on prend pour a
 & pour b deux quantitez positives à volonté , mais aussi
 lorsque l'une & l'autre est négative ; de maniere que ce
 second lieu M n'exprime ni Courbe ni ligne droite dans
 ces deux hypothèses. Cependant le premier lieux est des
 mieux choisis & d'un frequent usage.

Si l'on prend encore $x^3 = aay$ pour construire l'Egalité N .

$$N \dots x^{12} - 14a^3x^9 + a^4x^8 + 2a^5x^7 + 49a^6x^6 - 86a^8x^4 \\ (+ a^{10}xx + 1296a^{12} = 0.$$

Le second lieu n'aura que trois solutions réelles ; ainsi ,
 il n'exprimera ni Courbe ni ligne droite. Comme cette
 difficulté tient à celle des lieux imaginaires , il faut l'ex-
 pliquer ici , & prendre pour cela un Exemple plus simple
 que N .

CINQUIEME EXEMPLE.

*Le second lieu que fournit la Méthode dans cet Exemple est
 un lieu réel , mais d'une réalité qui n'exprime aucune
 Courbe ni même aucune ligne droite. Cependant le pre-
 mier lieu est des mieux choisis , & l'Egalité à construire
 renferme des racines réelles.*

L'Egalité proposée est celle qu'on voit en O ,

$$O \dots x^6 - 4ax^4 - 8a^2x^2 + 8a^4xx + 32a^6 = 9.$$

Pour la construire on a le lieu P .

$$P \dots x^3 = bhy.$$

Et la Méthode donne le second lieu marqué Q .

$$Q \dots b^4yy - 4abhhxy - 8a^3hhy + 8a^4xx + 32a^6 = 9.$$

Ce lieu est réel , parce que $x = 2a$, & $y = \frac{8a^3}{bh}$ en sont
 une solution , dont il est facile de s'assurer en y substi-
 tuant ces valeurs. Mais il faut encore s'assurer qu'il n'en
 a point d'autres. Ce que l'on peut faire , comme on le va
 dire ici

Dégageant x par la règle ordinaire du second degré ,
 on aura sa valeur sous la forme que l'on voit en R .

$$R \dots x = \frac{bhy + 8a^3 - bh\sqrt{4aa - 1}}{4aa}$$

Où il est évident 1°. Que le signe radical ne renferme aucune racine réelle, & que si ce signe subsistoit toujours dans l'Egalité R , la valeur de x seroit toujours imaginaire. 2°. Que le signe radical ne peut se détruire qu'en détruisant son multiplicateur. 3°. Que ce multiplicateur est détruit en faisant $8a^3 - bhy = 0$. Mais alors, on a $y = \frac{8a^3}{bh}$, & comme cette valeur est la seule qui se peut tirer de cette Egalité $8a^3 - bhy = 0$, c'est aussi la seule qui peut en détruire tous les termes, & par conséquent la seule encore qui peut détruire le signe radical de R . On a donc $y = \frac{8a^3}{bh}$ pour l'unique valeur de y qui convient à l'Egalité R , & il est évident que cette valeur étant substitué dans cette Egalité donne $x = 2a$. D'où il suit que l'Egalité R & par conséquent l'Egalité \mathcal{Q} , ont pour solution $x = 2a$, $y = \frac{8a^3}{bh}$, & qu'elles n'en ont point d'autre. En quoi l'on peut observer que l'infinie variété des valeurs dont b est capable, n'empêche pas que l'inconvénient ne subsiste.

REMARQUE. Si du dernier terme de l'Egalité O on ôte une quantité positive aussi petite qu'on voudra, le second lieu exprimera une Courbe; & si au contraire on ajoute à ce dernier terme une quantité positive telle qu'on voudra, le second lieu sera toujours imaginaire, en prenant P pour le premier lieu,

On auroit un exemple plus simple dont la proposée est réelle, si l'on prenoit $x^3 = yy$ pour construire l'Egalité $x^3 + xx - 2x + 1 = 0$. Alors le second lieu n'auroit qu'une solution dans laquelle $x = 1$. Mais on pourroit dire que le premier lieu n'est pas choisi.

SIXIÈME EXEMPLE.

Dans cet Exemple se réunissent les deux conditions que l'on a désirées dans le premier & le 2^d lieu. Cependant la Mé-

On a pour l'Egalité à construire, celle qui est en S .

$$S \dots x^{16} - 6a^8x^8 + a^{14}xx - 2a^{15}x + r = 0.$$

dans laquelle r exprime une quantité ou égale à $10a^{16}$ ou plus grande que $10a^{16}$, à volonté.

Le premier lieu est celui qui est en T .

$$T \dots x^4 = a^3y.$$

Et la Méthode fournit le second lieu V .

$$V \dots aaxx - 2a^3x + y^4 - 6aayy + r = 0.$$

Lorsque $r = 10a^{16}$ dans la proposée S , le second lieu V se trouve réel, mais il n'exprime ni Courbe ni ligne droite; parce qu'il n'a que deux solutions réelles. Et si l'on prend r pour une quantité plus grande que $10a^{16}$, comme $11a^{16}$, $20a^{16}$, &c. le second lieu sera toujours imaginaire comme on le peut voir, en dégagant l'inconnue x , & en rappelant les explications que j'ai données sur le premier Exemple & l'Exemple 5.

Lorsque les Egalitez sont du 16^e degré & que le premier lieu n'est point donné, non-seulement on a souhaité que ce premier lieu fût celui qui est en T , mais aussi que les inconnues n'eussent pas plus de quatre dimensions dans le second lieu. Ce sont là toutes les conditions que l'on a désirées dans les lieux pour la construction de ces Egalitez, & l'on voit dans ce 6^e Exemple que ces conditions n'empêchent pas de tomber dans deux inconveniens considérables. Voici encore un Exemple sur cela, avec d'autres Remarques.

SEPTIEME EXEMPLE.

La Proposée est l'Egalité Z .

$$Z \dots x^{16} - 6a^4x^{12} + a^6x^{10} + 2a^7x^9 + 9a^8x^8 - 8a^{11}x^7 + (a^{14}xx + a^{16}) = 0.$$

Le premier lieu est T du 6^e Exemple.

Et la Méthode donne ce second lieu Π .

$$\Pi \dots y^4 - 6ay^3 + xxyy + 2axy + 9aayy - 8aaxy + (aaxx + a^4) = 0.$$

qui a les conditions que l'on y a désirées. Mais en degageant x , on verra qu'il n'exprime ni Courbe ni ligne droite. Car le dégagement donne Δ .

$$\Delta \dots x = \frac{4aay - ayy + y^3 - 3ayy + a^3\sqrt{-1}}{yy + aa}$$

Et suivant le détail du 5^e Exemple, les solutions de cette Egalité seront celles du Problème que l'on voit en Ω .

$$\Omega \dots \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4aay - ayy}{yy + aa} \\ y^3 - 3ayy + a^3 = 0. \end{array} \right.$$

dont les trois solutions sont réelles & incommensurables. Ainsi, l'Egalité Δ & par conséquent le lieu Π , auront ces trois solutions réelles & n'en auront point d'autres.

REMARQUE I. Si l'on remonte des conclusions aux prémisses & aux hypothèses, ce retour fournira deux Règles pour trouver des Exemples autant qu'on voudra, ou la Méthode donnera de seconds lieux imaginaires, ou bien de seconds lieux réels qui n'exprimeront ni Courbe ni Ligne droite, à volonté.

La première Règle donnera le second lieu; l'autre fournira le premier lieu & l'Egalité à construire.

Règle pour le second Lieu.

Ayant supposé la valeur de x comme on le voit ici en A .

$$A \dots x = \frac{B + C\sqrt{-D}}{E}$$

1^o. On prendra pour B & pour E des quantitez connues à volonté, ou bien des quantitez dont y soit la seule inconnue à laquelle on pourra donner autant de termes qu'on voudra & prendre pour leurs Coëfficiens des quantitez connues telles qu'on voudra.

2^o. On prendra pour n un nombre entier à volonté.

3^o. Pour D , on prendra une quantité connue & négative telle qu'on voudra. Ou bien la somme des termes d'une Egalité entièrement imaginaire dont y soit la seule inconnue, en observant de changer tous les signes de

344 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cette somme avant que de la substituer à la place de D .

4°. Cela posé, si l'on prend pour C une quantité connue à volonté, l'inconnue x n'aura que des valeurs imaginaires.

En prenant pour C la somme des termes d'une Egalité dont y soit la seule inconnue & dont tous les Coëfficiens soient des quantitez connues à volonté; les valeurs de x seront tantôt réelles & tantôt imaginaires.

Toutes ces valeurs seront imaginaires, lorsque l'Egalité prise pour C sera entierement imaginaire.

Et si l'Egalité prise pour C n'est pas imaginaire, l'Inconnue x aura autant de valeurs réelles que cette Egalité renfermera de racines réelles.

Ainsi, l'Egalité A aura autant de solutions qu'il y aura de racines réelles dans l'Egalité que l'on prendra pour C , & comme il est libre de mettre dans cette dernière Egalité autant de racines qu'on voudra & telles qu'on voudra, on peut faire aussi que l'Egalité A ait autant de solutions qu'on voudra, & même telles qu'on voudra; parce que les valeurs de B & de E sont arbitraires.

5°. Aiant ainsi donné ces valeurs à B, C, D, E, n . de manière que y s'y trouve au moins une fois, on fera évanouir le signe radical; & l'Egalité qui en résultera, sera un lieu qui aura les mêmes solutions que l'Egalité A & qui n'en aura point d'autres.

A la place de x , on pourroit mettre dans A une quantité algébrique où cette inconnue & y aussi, auroient autant de termes qu'on voudroit. Ce qui fourniroit une Règle beaucoup plus générale que la précédente, & dans laquelle il y auroit peu d'exceptions. Une Règle bien plus générale sur cela sans comparaison, seroit une Inverse de la premiere Méthode que je donnai en 1699. pour la résolution des questions indéterminées. Mais cette Inverse ne pourroit pas être inserée dans ce Memoire, & il suffit pour l'Inconvénient de la Méthode en question que j'ai voulu marquer dans ce 3^e article, de faire voir qu'elle fournit une infinité de seconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe & qu'elle donne chacun de ces lieux dans une infinité d'Exemples.

Si

Si $B=2$. $E=1$. $n=1$. $D=-1$. $C=y-1$. La formule
 A donnera $x=2+y-1\sqrt[3]{-1}$; & faisant évanouir le signe
 radical on aura le lieu F .

$$F \dots xx + yy - 4x - 2y + 5 = 0.$$

qui est réel & qui promet un Cercle, mais il n'exprime
 ni cercle ni aucune ligne. Car $x=2$, & $y=1$ en est l'uni-
 que solution. On va voir dans la seconde Règle qu'il y a
 une infinité d'Exemples où la Méthode donne F pour le
 second lieu, quoique le premier lieu soit des mieux choi-
 sis & que les substitutions qu'elle prescrit dans la recher-
 che de ce second lieu, soient faites de la manière la plus
 avantageuse à cette Méthode.

*Règle pour trouver le premier Lieu & l'Egalité à construire,
 lorsque le second Lieu est donné.*

Un Lieu quelconque étant proposé, on peut trouver
 autant d'Exemples qu'on voudra de la Méthode en que-
 stion; de manière que le second Lieu qu'elle fournira,
 dans tous ces Exemples, soit le même que le Lieu pro-
 posé; & faire en même tems que le premier Lieu soit de
 ceux qui sont les plus avantageux à cette Méthode. Voici
 la Règle.

1^o. Aiant pris la Formule que l'on voit ici en G pour
 l'expression des premiers Lieux,

$$G \dots y = \frac{x^c + ba^{c-1}}{a^{c-1}}.$$

On fera, ou $b=0$, ou b réel à volonté; lorsque le Lieu
 proposé aura des monomes entierement connus; & tou-
 jours b réel, lorsque ce Lieu n'aura aucun de ces mono-
 mes.

Pour c on prendra à volonté, un nombre entier & po-
 sitif qui surpasse le plus haut degré de x du Lieu propo-
 sé, & si les coëfficiens de ce Lieu ne sont que de nom-
 bres, on peut prendre pour a un nombre tel qu'on vou-
 dra. Ensorte que si le Lieu proposé étoit, par exemple,
 le Lieu F de la Règle précédente, dans lequel le nom-

346 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 bre 2 désigne le plus haut degré de x ; il faudroit prendre
 pour c un nombre plus grand que 2, & pour a un nom-
 bre à volonté. Si l'on se détermine à $c=3$, $a=1$ & $b=0$,
 la substitution de ces valeurs dans G , donnera le premier
 Lieu H .

$$H \dots y = x^3.$$

2°. Faisant évanouir l'inconnuë y qui est commune au
 lieu proposé (F) & au lieu trouvé (H) leur réduite sera
 l'Egalité à construire. Ainsi, dans cet Exemple, cette
 Egalité sera celle qu'on voit en I .

$$I \dots x^6 - 2x^3 + xx - 4x + 5 = 0.$$

En sorte que si l'on se propose de construire l'Egalité I
 en prenant pour le premier lieu celui qui est H , la Mé-
 thode donnera le second lieu F .

Et si l'on prend pour c un autre nombre entier à volonté
 au-dessus de 3, on aura un autre premier lieu & une au-
 tre Egalité à construire. Ainsi, l'on peut trouver autant
 d'Exemples qu'on voudra où la Méthode donnera le lieu
 F . C'est à dire, un lieu qui est figuré comme un lieu au
 Cercle & qui n'exprime ni Courbe ni Ligne droite.

Si le second lieu proposé étoit, par exemple, $xx=py$
 $-yy$, on prendroit pour b une ligne réelle : à cause que
 ce lieu n'a point de monome entierement connu.

Quoique la premiere Règle soit des plus commodes
 pour trouver des lieux imaginaires & des lieux réels qui
 n'expriment ni Droite ni Courbe, elle ne donne pas tou-
 jours néanmoins les lieux les plus simples de ces deux es-
 peces quand on veut que l'inconnuë y se trouve en B , C ,
 D , E . Et delà aussi l'Egalité à construire que fournit la
 seconde Règle, n'est pas aussi des plus simples. En voici
 un Exemple.

Ayant pris une Egalité imaginaire comme $yy-ry+rr=0$
 pour la valeur de D , suivant la premiere Règle, on aura
 $D=-yy+ry-rr$.

Prenant aussi une Egalité imaginaire pour C comme
 $yy+bb=0$, quand on veut que le lieu qu'on cherche
 soit imaginaire, on aura $C=yy+bb$, ou bien $C=-yy-bb$.

Car l'une & l'autre expression convient au dessein.

Et si pour E & B dont les valeurs sont entierement arbitraires, on prend $E = yy$ avec $B = eey$, il se trouvera en faisant $n = 1$ que la Formule A donne le lieu imaginaire.

$$x = \frac{eey + yy + bb\sqrt{yy + ry - rr}}{yy}.$$

Délivrant ce lieu du signe radical, on l'aura sous la forme K .

$$K \dots y^6 - ryy^5 + xxy^4 - 2eexy^3 + 2rrbbyy - rb^4y + rrb^4 \\ + 2bby^4 - 2rbby^3 + b^4yy \\ + rry^4 + e^4yy$$

Si l'on veut des Exemples où la Méthode donne ce lieu imaginaire pour le second lieu d'une construction, de manière que le premier lieu soit de ceux qui sont les plus avantageux à cette Méthode, on prendra pour c de la Formule G , un nombre plus grand que 2. suivant la seconde Règle, & pour b , ou θ une ligne réelle à volonté, par la même Règle. Si $c = 2$, & $b = \theta$, on aura $y = \frac{x^3}{aa}$ pour le premier lieu : Et substituant cette valeur de y dans K comme le prescrit cette Règle, il en résultera l'Egalité à construire que l'on voit ici en L .

$$L \dots x^{18} - raax^{15} + a^4x^{14} + rra^4x^{12} + 2bba^4x^{12} - 2eea^6x^{10} \\ - 2rbba^6x^9 + 2rrbba^8x^6 + b^4a^8x^6 + e^4a^8x^6 \\ - rb^4a^{10}x^3 + rrb^4a^{12} = 0.$$

Ainsi, quand on se proposera de construire l'Egalité L par la Méthode en question, cette Méthode donnera le second lieu imaginaire K , lorsque le premier lieu sera $x^3 = aay$. En cela, je suppose que dans la recherche du second lieu, on pousse les substitutions jusques à ce que les inconnues aient le moins de dimensions qu'il est possible, comme on le pratique dans la Méthode. Si on ne le faisoit pas, la difficulté de la Méthode seroit différente & ne seroit pas moins considerable.

Il suit de la premiere Règle, qu'il y a une infinité de lieux imaginaires avec une infinité de lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, & l'on voit par la

seconde Règle qu'il y a aussi une infinité d'Exemples où la Méthode donne chacun de ces lieux pour la construction de l'Egalité proposée; c'est-à-dire, que la premiere Règle fournit une infinité d'Exemples, qui étant pris un à un, chacun donne par la seconde Règle une infinité d'autres Exemples où la Méthode fournit un second lieu imaginaire, ou un lieu réel qui ne renferme ni Courbe ni Ligne droite. Ce qui marque une exception considerable de cette Méthode.

Cependant la premiere Règle ne donne pas à beaucoup près tous les lieux de ces deux sortes. Par exemple, le lieu que l'on voit ici en *M*.

$$M.. \left\{ \begin{array}{l} y^6 - 4aay^4 + 2a^3y^3 + 6a^4yy - 4ay^5 + a^6 \\ + 2x^6 - 12aax^4 + 4aayx^3 + 18a^4xx - 12a^4yx \end{array} \right\} = 0$$

est un lieu qui n'a que neuf solutions réelles, & que cette Règle ne le donne pas.

Il y a infiniment plus de ces lieux imparfaits qui ne peuvent ni se former ni s'expliquer par les Règles particulières, que de ceux qui peuvent s'en déduire. La Formule *N* en donne encore une idée.

$$N... x^{2m} - x^{2r+1} + y^{2h} - y^{2t+1} + 4 = 0.$$

Car si l'on prend $m=3$. $r=0$. $h=3$. $t=0$, on aura le lieu imaginaire *O*.

$$O... x^6 - x + y^6 - y + 4 = 0.$$

Et prenant à volonté des nombres plus grands que 3 pour *m* & *h*, avec un nombre plus petit que *m*, pour *r*; & un nombre plus petit que *h*, pour *t*; tous les lieux qui en résulteront se trouveront inexplicables par les Règles particulières de l'Algebre. Mais l'on pourra en faire l'analyse & s'assurer qu'ils n'ont aucune solution réelle en y appliquant la Méthode & la Theorie des Cascades algebriques.

Il y a une infinité d'autres lieux de differens ordres où cette Méthode & cette Theorie ne suffiroient pas, & où il faudroit encore la Méthode des questions indéterminées que je donnai en 1699 avec une nouvelle Theorie, pour prouver que ces lieux sont, ou imaginaires, ou de

ceux qui sont réels & qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite.

Il paroît de ce détail , que l'Exception de la Méthode qui a pour mesure l'immense étendue des Formules *A* & *G*, est engloutie dans une autre exception infiniment plus vaste dont ces Formules & les Exemples *N. O* ne sont que de foibles indices.

REMARQUE II. On verra d'autres inconveniens de la Méthode dans l'usage qu'elle fait des lieux les mieux choisis , si l'on prend les paraboles $xx = ay$, $x^3 = bby$. $x^4 = acny$. pour construire les Egalitez marquées *G*, *H*, *I*, dans mon premier Memoire page 343. ; selon ce que j'en ai dit dans la page 346. On y verra qu'en se divisant point l'Egalité à construire, une partie de ses racines ne se trouveroient pas dans l'effection géométrique si l'on construisoit les lieux comme on le fait ordinairement, & que leur Réduite seroit essentiellement differente de la Proposée, si l'on suivoit les Régles ordinaires de l'évanouissement des Inconnuës. Il est facile de remedier à cet inconvenient quand il est seul ; mais il n'est pas aisé de remedier à la plûpart des autres inconveniens de la Méthode que nous avons marquez ici & dans le premier Memoire. Cependant il ne seroit pas bien difficile de reformer la Méthode dans le cas où le premier lieu est arbitraire , & même l'on pourroit éviter en cela les inconveniens du 3^e Article. Car une des Inconnuës aura toujours des valeurs de toutes les grandeurs dans un lieu , lorsque le plus haut degré de l'autre inconnuë y sera exprimé par un nombre impair, & une Egalité n'a jamais de racines égales quand elle n'a point de Diviseurs. De plus, le premier lieu étant pris dans la Formule *G* de la premiere Remarque, l'Egalité proposée est toujours imaginaire lorsque le second lieu est imaginaire ; & si, dans la même hypothèse le second lieu est un de ces lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, les racines de l'Egalité proposée se trouveront parmi les Solutions réelles de ce lieu : Ou bien, cette Egalité sera ima-

350 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ginaire. Ainsi l'on pourra réformer la Méthode sur cette
idée, lorsque le premier lui est arbitraire.

On pourra voir aussi que cela abrége la Méthode, si
l'on considère que dans le cas où le second lieu exprime
une Courbe ou une Ligne droite, il faut plus de calcul
pour s'en assurer que pour sçavoir dans les autres cas que
ce lieu n'exprime aucune ligne, toutes choses d'ailleurs
étant semblables; & l'on a encore l'avantage dans ces der-
niers cas de n'avoir point de Courbe à construire: puis-
que le second lieu n'en donne aucune, & que la question
est alors résolue sans former la Courbe du premier lieu.

On peut encore considérablement abréger la Métho-
de, lorsque les diviseurs du second lieu jettent dans l'in-
convenient dont j'ai parlé cy-dessus. Car ce qui caracté-
rise ces diviseurs, fournit une Règle simple & précise
pour les trouver; & de-là une autre Règle pour trouver
les diviseurs de l'Egalité à construire. Ce qui efface l'in-
convenient & réduit cette Egalité à d'autres Egalitez
beaucoup plus simples. A quoi il faut ajouter que ces re-
formes ne font aucun obstacle à la recherche des lieux
les plus simples, dans la supposition que le premier lieu
est arbitraire; de manière que sur cette hypothèse la Mé-
thode en question se trouvera toujours vraie dans ses ef-
fets, capable d'une solide démonstration, & plus com-
mode qu'avant sa réforme. Mais il faut encore donner
un Memoire sur les inconveniens qui n'ont pas été assez
expliquez avant que de regler les additions qu'il faut faire
à cette Méthode. Quant à l'inconvenient des Courbes
qui se coupent à Tangentes égales, quoiqu'on l'évite par
les voies que je propose ici; je ne prétens pas que ces
voies conviennent tout-à-fait à des Méthodes que l'on a
données sur d'autres sujets, dans lesquelles il arrive aussi
que des Courbes se coupent quelquefois à Tangentes éga-
les. Comme les difficultez de ces Méthodes, indiquées
par cet Inconvenient, sont différentes de celles que j'ai
expliquées ici, il faut un autre détail pour les résoudre.

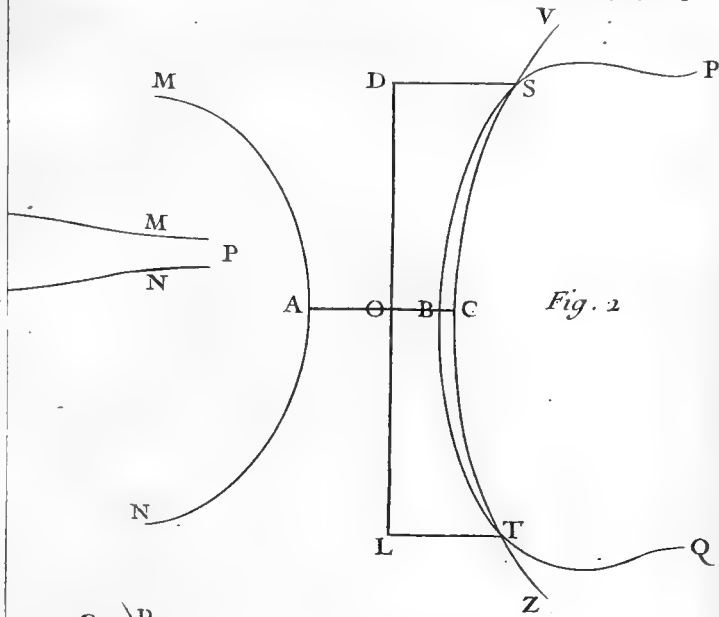


Fig. 2

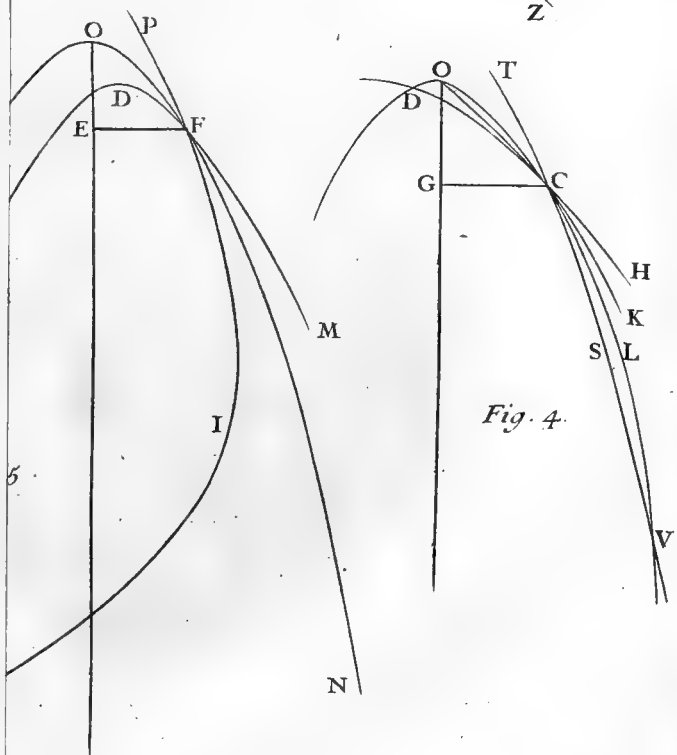
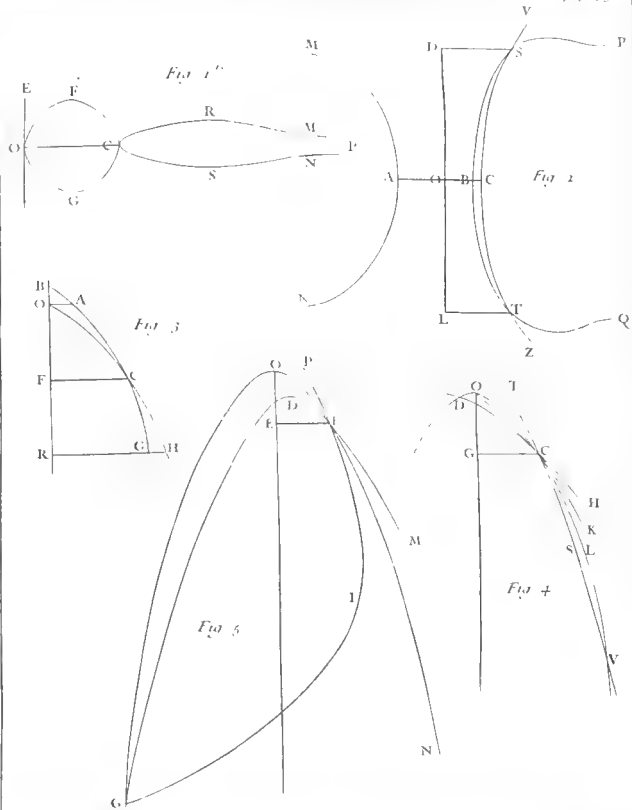


Fig. 4



P R O B L E M E

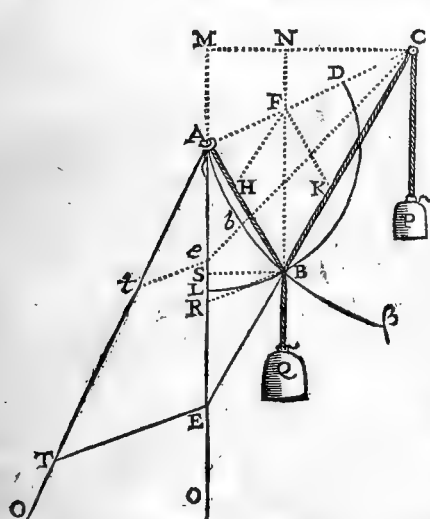
DE STATIQUE.

PAR M. VARIGNON.

C E Problème me fut proposé il y a quelques jours :
voici la Solution que j'en trouvai presque aussitôt
par le moyen d'une Courbe des plus aisées à décrire.

1709.
28. Août

P R O B L È M E.



Deux Poids donnés
 P, Q , étant attachés à
une corde $ABCP$, qui
retenuë par une de ses
extrémités au clou A ,
passe librement par
dessus une poulie C
fixe entre ces poids :
On demande en quel
point B , ou en quelle
situation ABC de la
corde ces deux poids
demeureront en équi-
libre entr'eux.

SOLUTION.

Après avoir mené
la droite AC avec la verticale AEO , d'un des points quel-
conque E , de laquelle soit en angle aussi quelconque la
droite ET . $AE :: P, Q$ Soit par les points A, T , la droite
 ATO rencontrée en une infinité d'autres points t , par une
infinité de droites et parallèles à ET , & qui rencontrent aussi
la verticale AEO en une infinité de points e, E , par lesquels
du point C soient autant d'autres droites Ce, CE . Si l'on
prend par tout sur elles depuis AEO les portions $eb = et$,

$EB = ET$, la Courbe $Ab B\beta$ qui passera par tous les points b, B , ainsi trouvés, déterminera par sa rencontre avec l'arc de cercle DBL décrit du centre A & du rayon donné AB , le point B auquel le poids Q demeurera en équilibre avec le poids P . *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallelogramme HK dont la diagonale BF soit sur la verticale QB prolongée vers F ; & les côtés BH, BK , sur les portions AB, BC , de la corde $ABCP$. La ressemblance des triangles rectilignes FKB, ABE , donnera $BK.BF :: BE.EA$ (*constr.*) :: $ET.EA$ (*hyp.*) :: $P.Q$. c'est-à-dire, $BK.BF :: P.Q$. Donc suivant le projet d'une nouvelle Mécanique (prop. des poids soutenus avec des cordes) le poids Q demeurera ici en équilibre en B avec le poids P . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Le rayon AB du cercle DBL étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il soit, le point B de suspension du poids Q en équilibre avec le poids P , se trouvera toujours sur la Courbe $AbB\beta$. Ainsi si ce poids Q , au lieu d'être attaché en B à la corde $ABCP$, eût été proposé coulant le long de cette corde entre le crochet A & la poulie C , & qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arrêter en équilibre avec le poids P : cette question auroit été résolue par le moien de la Courbe $AbB\beta$ faite comme ci-dessus, en répondant que ce poids Q auroit pû demeurer ainsi en équilibre avec les poids P dans tout ce que la longueur de la corde $ABCP$ lui peut permettre de points B qui puissent atteindre à cette Courbe $AbB\beta$, & qu'il y seroit en effet demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette Courbe; puisque par la construction de cette même Courbe $AbB\beta$, ce poids Q y auroit été par tout au poids $P :: BF.BK$. Et conséquemment aussi en équilibre partout là avec le poids P suivant la proposition qu'on vient de citer du *Projet d'une nouvelle Mécanique*. D'où l'on voit

voit que ce même poids \mathcal{Q} peut ainsi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde $ABCP$ ainsi repliée jusqu'à la Courbe $AbBB$: de sorte que cette Courbe est le lieu de tous ces points B d'équilibre.

SCHOLIE.

I. Pour trouver l'équation de la Courbe $AbBB$, soit F le point où la droite AC est rencontrée par la verticale $\mathcal{Q}B$ prolongée jusqu'à elle. Soient appelées AC , a ; CF , x ; FB , y ; P , p ; \mathcal{Q} , q . L'on aura $CF(x)$. $FB(y) :: CA(a)$. $AE = \frac{ay}{x}$. Et par la nature ou construction (*Solut.*) de la Courbe $AbBB$, l'on aura aussi $\mathcal{Q}(q)$. $P(p) :: AE$. $ET(\text{constr.}) :: AE \left(\frac{ay}{x}\right)$. $EB = \frac{a py}{q x}$. Soit BR parallèle à CA , & conséquemment $BR = FA = a - x$: l'on aura de plus $BR(a - x)$. $BE \left(\frac{a py}{q x}\right) :: CA(a)$. $CE = \frac{a a p y}{q x a - x}$. Et conséquemment $\overline{CE}^2 = \frac{a^4 p p y y}{q q x x \times a - x}$.

Pour trouver encore une autre valeur de \overline{CE}^2 , soit l'horizontale CM qui rencontre en M la verticale OEA prolongée jusqu'à elle. L'angle M étant ainsi droit, & l'angle CAE ou CAM étant donné aussi-bien que l'hypothénuse CA du Triangle rectangle AMC , son troisième angle sera aussi donné avec ses deux autres côtes CM , MA . Donc en appelant CM , b ; MA , c ; aiant alors $ME = MA + AE = c + \frac{ay}{x} = \frac{cx + ay}{x}$, l'on aura pareillement ici $\overline{CE}^2 (\overline{CM}^2 + \overline{ME}^2) = bb + \frac{ccxx + 2acxy + aayy}{xx} =$

$$\frac{bbxx + ccxx + 2acxy + aayy}{xx} \text{ (à cause de } aa = \overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 \text{)}$$

$$+ \overline{MA}^2 = \overline{bb} + \overline{cc} = \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}.$$

Donc $\frac{a^4ppyy}{qqxx \times a - x^2} = \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}$, ou $a^3ppyy =$
 $= axx + ayy + 2cxy \times qq \times a - x^2$ est l'équation cherchée
 de la Courbe $AbB\beta$.

II. Voici encore une autre équation de la même Courbe
 $AbB\beta$. Pour la trouver soit BF prolongée jusqu'à la ren-
 contre de CM en N : & après avoir appelé CN , u ; BN , z ;
 l'on aura $CN(u) \cdot BN(z) :: CM(b) \cdot ME = \frac{bz}{u}$. Et con-
 séquemment $AE = \frac{bz}{u} - c = \frac{bz - cu}{u}$. Mais la Solution
 donne $q.p :: AE \left(\frac{bz - cu}{u} \right) \cdot EB = \frac{bpz - cpu}{qu}$. En menant
 BS parallèle à CM , l'on aura aussi $SB(b-u) \cdot BE \left(\frac{bpz - cpu}{qu} \right)$
 $:: CM(b) \cdot CE = \frac{bbpz - bcpu}{qu \times b - u}$. De plus $CE \left(\sqrt{\overline{ME} + \overline{CM}^2} \right)$
 $= \sqrt{\frac{bbzz}{uu} + bb} = \frac{b}{u} \sqrt{zz + uu}$. Donc $\frac{b}{u} \sqrt{zz + uu} =$
 $= \frac{bbpz - bcpu}{qu \times b - u}$, ou $\sqrt{zz + uu} = \frac{bpz - cpu}{q \times b - u}$ sera encore l'équa-
 tion de la Courbe $AbB\beta$ sur l'axe CM au lieu du diame-
 tre CA .

L'accord de ces deux équations (art. 1.2.) est aisé à découvrir.

OBSERVATIONS

*Touchant l'effet de certains Acides sur les Alcalis
volatils.*

PAR M. HOMBERG.

1709.
13. Août

LEs Alcalis volatils, soit des Plantes ou des Animaux,
 ne font pas indifféremment des effervescences & des
 ébullition avec toutes sortes d'acides; il faut que leurs

forces soient proportionnées entr'eux pour produire ces effets; & quand elle ne le font pas, ils se mêlent tranquillement dans une même liqueur, se confondent & demeurent ensemble sans se pénétrer en aucune façon. On en peut voir un exemple dans la confusion du vinaigre distillé & de l'esprit d'urine, qui ne font nul effet l'un sur l'autre, à moins qu'on n'affoiblisse beaucoup l'esprit d'urine, ou que l'on ne verse une grande quantité de vinaigre distillé dessus, & en ce cas l'ébullition ne commence à se faire qu'au moment qu'on en a versé assez pour que la proportion requise s'y trouve, & alors l'ébullition se fait tout à coup, comme s'il n'y avoit que les seules dernières gouttes du vinaigre qui eussent produit cette ébullition, sans que la grande quantité qu'on en avoit mis auparavant y eût contribué.

Nous en voyons un exemple pareil dans la liqueur rousse qui distille de toutes les plantes immédiatement avant que l'huile fétide commence à paroître cette liqueur donne en même tems des marques d'alcali en faisant ébullition avec l'esprit de sel, & des marques d'acide en rougissant la teinture de Tournesol, c'est-à-dire, que l'acide & l'alcali nagent séparément dans cette liqueur sans se pénétrer; & ils restent en cet état pendant fort long-temps. J'ai examiné une pareille liqueur, il y avoit plus de quatre ans qu'elle avoit été faite, je l'ai trouvée semblable à celle qui venoit d'être fraîchement distillée.

Tout ceci n'arrive que dans les mélanges des alcalis volatils avec les acides distillez des vegetaux, & non pas avec les acides distillez des minéraux; car si dans l'esprit d'urine, quelque fort ou quelque foible qu'il soit, on verse une goutte d'esprit de sel ou semblable, il se fait sur le champ une ébullition à proportion de la quantité d'esprit de sel qu'on y aura mis, qui se continuë à mesure qu'on en met davantage, jusques à ce que toutes les parties de l'alcali soient rassasiées d'acide; ce qui arrive de même dans la liqueur rousse distillée des plantes, c'est-à-dire,

356 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
que l'acide mineral qu'on y mêle se joint dans le moment
& avec ébullition à l'alcali volatil qui se trouve dans cette
liqueur, pendant que l'acide vegetal, naturellement contenu
dans la même liqueur, n'étoit pas capable de le faire,
non plus que le vinaigre distillé en petite quantité dans
l'observation précédente.

Pour donner la raison de cette différence selon l'idée
que je m'en suis faite, je supposerois 1°. que les sels qui
entrent dans les plantes sont les sels minéraux, tels que
les racines des plantes les rencontrent dans la terre.

2°. Que les pointes acides de ces sels y sont comme par
paquets, c'est-à-dire, que plusieurs de ces pointes sont cou-
chées les unes sur les autres, & sont attachées ensemble
de la même manière que nous observons la structure de
tous les corps qui sont naturellement aiguilleux, comme
sont l'antimoine, la ferrette d'Espagne, l'amiante solide
& qui ne s'est pas encore séparée en filasse, la pierre he-
matite & semblables.

3°. Que les pointes simples ou les aiguilles qui compo-
sent ces paquets se peuvent séparer les unes des autres
sans se corrompre, comme nous l'observons encore dans
la plupart de ces mêmes corps aiguilleux que nous venons
de rapporter.

4°. Que les pointes simples ont moins de masses, &
qu'elles sont plus déliées & moins roides que les paquets,
qui sont composez de plusieurs de ces simples; & par con-
séquent que les composez sont capables d'un plus grand
effort que les simples, & de soulever des poids que les sim-
ples ne sont pas capables de soulever.

5°. Que ces paquets de sels minéraux aiant été succez
par les racines dans les plantes, s'y mêlent avec les ma-
tières sulfureuses des vegetaux, qui passant ensemble par
les filieres fort étroites des organes des plantes, se pene-
trent intimement les uns les autres, y souffrent des fer-
mentations, & se subdivisent; de sorte qu'ils se résolvent
ou se dégagent en aiguilles simples, c'est-à-dire, que les
sels acides roides pesans & multiples des minéraux, de-

viennent par les filtrations & par les différentes fermentations dans les plantes, des acides simples, déliés, plians & légers des vegetaux.

6°. Que l'alcali volatil, ou le sel d'urine est une matiere spongieuse & capable de compression; & qu'ainsi plus il y en a de dissous dans une petite quantité de liqueur aqueuse, plus la masse de ce sel est comprimée & pèse sur lui-même, & plus il est par conséquent difficile à être pénétré par les pointes des acides qui se présentent pour entrer dans ses pores; & qu'au contraire étant dissous dans une suffisante quantité d'eau, ses pores sont dans leur état naturel, c'est-à-dire, ouvert autant qu'il le peuvent être, & par conséquent faciles à être pénétrés par les acides.

7°. Que toutes les actions des acides sur les alcalis & semblables, ne se font que parce qu'ils sont poussés les uns dans les autres par la matiere de la lumiere, que j'ai prouvé ailleurs être toujours en mouvement, & heurter contre les parties solides de tous les corps, c'est-à-dire, les pousser continuellement.

Toutes ces suppositions étant accordées, j'en ferois l'application au fait dont il s'agit en cette façon: les acides distillés des vegetaux consistant en pointes simples, légers & fort déliés, presenteront peu de masses à la matiere de la lumiere qui les pousse, & qui par conséquent ne leur imprimera qu'un très-petit effort sur l'alcali volatil, puisque les efforts ne sont qu'à proportion des masses; & comme ces pointes si déliées ont peu de fermeté, elles plieront & elles glisseront plutôt de dessus la masse pesante & comprimée du sel d'urine qui nage dans peu de liqueur aqueuse, que d'en soulever les parties & de s'introduire dans ses pores, pour faire l'effervescence & l'ébullition, que la pénétration des acides dans les alcalis produit ordinairement; mais quand le sel volatil d'urine a été delayé dans une grande quantité de liqueur aqueuse, ses parties sont écartées les unes des autres, & n'étant pas entassées dans un petit espace, ses po-

358 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
res ne sont pas comprimez , mais se tiennent ouverts , & pour lors le petit effort, dont les pointes legeres & pliantes des acides des vegetaux sont capables, suffira pour les introduire sans aucune résistance dans ses pores , & elles produiront l'effervescence & l'ébullition, comme nous le voyons par l'experience.

Et comme nous avons supposé les pointes acides dans les mineraux couchées les unes sur les autres attachées ensemble par paquets, la masse de ces paquets sera d'autant plus multipliée, qu'il y aura de pointes simples rassemblées dans chaque paquet ; & par conséquent aussi l'effort qu'ils recevront de la matiere de la lumiere, sera d'autant plus grand; ces pointes ramassées en paquets étant plus fermes que les pointes simples, elles releveront aisément le poids des alcalis volatils entassez dans peu de liqueur aqueuse , & s'introduiront de même dans leurs pores sans se plier ou glisser dessus , & produiront l'effervescence & l'ébullition , sans que l'alcali volatile ait besoin d'être délayé dans une plus grande quantité d'eau, ce que les pointes simples des acides des vegetaux n'étoient pas capables de faire , comme l'expérience le démontre.

Nous avons vû dans les faits que nous venons de rapporter, que les acides distillez des mineraux, agissent plus promptement & avec plus de vigueur , que ceux des vegetaux sur les alcalis volatils distillez , en quelque degré de forces qu'ils les rencontrent ; cependant il ne laissent pas de penetrer fort difficilement dans les pores de ces mêmes alcalis volatils qui n'ont pas été distillez , & qui sont encore enchassez dans les parties animales ou vegetales qui les contiennent naturellement. J'ai vû l'esprit de nitre produire une ébullition très-sensible avec les mouches cantharides , & la continuer pendant plus de deux ans. Voici l'occasion qui me l'a fait observer.

J'ai vû employer avec succès dans les maux des reins & dans la gravelle une certaine préparation des mouches cantharides, que l'on appelloit le *Lythontripticum Tulpii* ; on en faisoit un secret. J'en eus la préparation que voici :

Prenez une dragme de cantharides sans les ailes, & une dragme de la petite cardamome sans les coques. Pulvérisez-les, & versez dessus une once d'esprit de vin rectifié, & demi-once d'esprit de nitre; laissez-les en infusion froide pendant cinq ou six jours; en les remuant de tems en tems. Il ne faut pas boucher exactement la fiole; car elle se casseroit par la fermentation continuelle qui s'y fait; on en prend depuis quatre jusques à quinze ou vingt gouttes dans un verre d'eau & de vin, le matin une heure après avoir pris un bouillon, & l'on continué d'en prendre trois ou quatre jours de suite.

Cette liqueur a travaillé toujours pendant plus de deux ans, & ne s'est jamais clarifiée parfaitement, même après l'avoir séparée par inclination de dessus ses feces; le sel d'urine ou l'alcali volatil qui se trouve dans les cantharides, est selon toutes les apparences, si fort enveloppé de matieres huileuses & des autres parties de cet animal, que l'acide quoique mineral ne l'a pû atteindre que peu à peu, & pendant tout ce tems une ébullition douce se faisant continuellement, la partie la plus volatile de cette liqueur se rarefie en vapeurs, comme il arrive toujours en pareille cas; ces vapeurs étant enfermées dans la fiole & occupant plus de place qu'elles ne font dans leur premiere forme de liqueur, auroient brisé la fiole si on l'avoit bouchée exactement. Aussi l'ai-je trouvé débouchée plusieurs fois, & le bouchon de liege sauté fort loin, quand par mégarde je l'avois enfoncé un peu trop. Il m'est arrivé à peu près la même chose avec la cochenille & avec la chair sèche des viperes, apparemment par les mêmes raisons; mais les substances liquides animales comme l'urine, la ferosité du sang, la liqueur contenue dans la bourse du fiel; &c. ne produisent pas des effets semblables; au contraire les ébullitions s'y font avec les mêmes acides très-promptement & ne durent pas, apparemment parce que le sel volatil contenu dans ces liqueurs y est à nud, & non enveloppé de matieres huileuses ou d'autres parties de l'animal, qui par conséquent doit être touché

tout aussi-rôt, & pénétré par les acides minéraux, & même il paroît que dans ces cas il n'est pas toujours besoin que les acides soient distillés, pour produire des ébullitions & des effervescences, & qu'il suffit quelquefois d'employer seulement les sels minéraux tels qu'ils se trouvent en les tirant de leurs mines, comme nous le verrons par les Observations suivantes.

Prenez une livre de fiel de bœuf, mêlez-y demi-once d'alun en poudre, battez-les un peu ensemble, il se fera sur le champ une ébullition très-considérable avec effervescence, & toute la liqueur deviendra trouble comme de la bouë épaisse, à peu près de la même couleur qu'étoit le fiel de bœuf avant que d'avoir été précipité par l'alun, c'est-à-dire, d'un vert tirant sur le jaune; mais le précipité se jettant peu à peu au fond du vaisseau, la liqueur se clarifie au Soleil, & change sa première couleur en un rouge tirant sur le gris de lin, laissez reposer le tout pendant cinq ou six jours, & séparez-en les saletés qui surnagent & la résidance épaisse du fond; remettez cette liqueur claire au Soleil pendant trois ou quatre mois dans une fiole bien bouchée, il se fera encore quelque sédiment au fond du vaisseau, & il s'amassera peu à peu sur la surface de la liqueur une graisse fort blanche & fort dure de la grosseur environ d'une grosse noix, & la couleur rouge de la liqueur se changera en un jaune fort foible couleur de citron, & elle acquerra un odeur semblable à celle des écrevisses cuites.

Il se fait dans cette dernière opération une précipitation fort ample, que nous n'avons pas observé dans les expériences précédentes, apparemment par la raison que l'alcali volatil du fiel de bœuf, ayant absorbé l'acide de l'alun, la matière terreuse a perdu son dissolvant, & elle a reparu dans sa première forme terreuse, & s'est précipitée au fond de la liqueur; mais comme ce précipité surpasse de beaucoup la quantité de l'alun qu'on y avoit mis, il faut que le fiel de bœuf y ait contribué une partie; nous voyons arriver précisément la même chose dans la
préparation

préparation des lacques des Peintres, qui ne sont autre chose que des extractions des teintures de la cochenille, de certains bois, ou des fleurs des plantes par le moyen de quelque alcali fixe, & précipitez ensuite par l'alun, dont la masse est toujours plus pesante que l'alun qui l'a précipité.

L'on observe dans cette dernière operation un fait remarquable, qui est que dans la liqueur rouge & clarifiée du fiel de bœuf, il se trouve une quantité fort sensible d'une graisse blanche & dure comme du suif de mouton, & que cette liqueur étant exposée au Soleil, perd sa rougeur peu à peu, à mesure que la graisse s'en sépare; & quand elle en est toute séparée, la liqueur a perdu aussi toute sa couleur rouge; cette observation confirme l'idée que l'on avoit de la liqueur contenuë dans la bourse du fiel, sçavoir, que c'est une espece de savon liquide. Il est constant que le savon dans ce pays-cy n'est autre chose que de l'huile d'olives unie par la cuisson au sel de la soude; & dans les pays froids, où le sel de la soude & l'huile d'olives sont fort chers, l'on substitué à la place de l'un le sel lixiviel du bois de chêne; & à la place de l'autre le suif des animaux, qui produisent un savon aussi blanc, aussi dur & aussi bon pour le blanchissage que celui qui est fait avec l'huile d'olives. Dans la liqueur du fiel la nature a employé une graisse semblable au suif, qui dans cette operation s'en sépare peu à peu, & qui reprend la même forme que nous observons dans la graisse des animaux; mais au lieu d'un alcali fixe que nous employions dans la fabrique de nos savons factices, elle s'est servie de l'alcali volatile, dont toutes les parties animales sont remplies: cet alcali ayant été détruit dans notre operation par l'acide de l'alun, la liqueur du fiel a rendu la graisse qu'elle contenoit, de la même maniere que dans nos savons factices les alcalis fixes se détruisent par l'addition de quelque acide, & sont reparoître l'huile ou la graisse qui étoit entrée dans sa composition.

Nous avons observé que la liqueur du fiel de bœuf est

rouge après sa premiere précipitation , & qu'elle perd sa couleur à mesure que la graisse s'en sépare ; la raison en est , que presque toutes les dissolutions des matieres huileuses ou grasses sont rouges, en quelque menstüe qu'elles soient dissoutes , & que celle-cy étant une de ces dissolutions , elle en conserve la couleur tant qu'elle contient de la graisse , laquelle en étant séparée , la couleur s'est perdue aussi qu'il en avoit été produite.

Notre fiel de bœuf ayant été dégagé de sa partie terreuse & grasse , de la maniere que nous l'avons enseigné dans cette derniere operation , devient un des meilleurs remedes que nous aïons , pour ôter commodément les tannes qui paroissent dans la peau , & particulièrement au nez de la plûpart des hommes , & qui sont d'autant plus sensibles que la peau est blanche & délicate. Il faut l'employer de cette façon :

Prenez une dragme & demie de cette liqueur , après qu'elle aura été au moins deux ou trois mois exposée au Soleil en esté , & autant d'huile de tartre par défaillance ; ajoutez-y une once d'eau de riviere , mêlez bien ensemble , & gardez dans une fiole bien bouchée ; il ne faut pas faire beaucoup de ce mélange à la fois , parce qu'il ne se conserve pas long-tems. Pour s'en servir l'on mouille un doigt dans ce mélange , on en tappe l'endroit où sont les tannes , on le laisse sécher & on en remet ; l'on fait cela sept ou huit fois par jour , jusques à ce que l'endroit , étant sec , commence à devenir rouge , alors on cesse d'en mettre ; on sentira une très-legere cuisson , ou plutôt une espece de chatoüillement , & la peau se fera un peu farineuse pendant un jour ou deux ; la farine étant tombée les tannes seront effacées pendant cinq ou six mois de temps , après quoi il faudra recommencer le même remede : Si après la premiere application du remede , c'est à dire la farine étant tombée , les tannes n'étoient pas tout à fait effacées , il en faudroit appliquer deux fois de suite.

Les tannes m'ont toujours paru n'être autre chose que

la matiere terreuse, huileuse & saline de la sueur, laquelle reste dans les mailles de la peau, tandis que la liqueur aqueuse, qui leur servoît de vehicule, s'en évapore par la chaleur du corps, ces matieres remplissent peu à peu ces mailles; de sorte qu'il en regorge toujours une partie par les petits trous ou par les pores que ces mailles ont dans la surpeau; & comme cette matiere est tenasse & gluante, elle retient la crasse & la poudre qui vole sur le visage, & quoiqu'on l'essuie souvent, non seulement on n'emporte pas la crasse, qui s'est placée sur les extrémités des tannes, qui sont dans les enfoncures de ces trous; mais au contraire le linge qui essuie le visage, la ramasse & la presse dans ces creux, où elle reste & produit ces petits points noirs, qui paroissent dans les pores de presque tous les nez, & qui fait le petit bout noir de la tanne quand on la fait sortir de son trou, en la pinçant d'une certaine façon; ce qui a fait croire aux personnes peu instruites, que les tannes sont des vers qui s'engendrent dans la peau, & que ce petit point en est la tête, au lieu que c'est un petit peloton de la sueur desséchée dans les pores de la peau, dont la petite extrémité qui regarde le jour est sale & crasseuse par la poudre qui journellement vole dessus, & en est retenue par la matiere gluante de la tanne même. Il en paroît ordinairement plus sur le nez & sur le menton qu'aux autres endroits du visage, peut-être parce qu'en ces endroits la peau étant plus tendue; les pores s'y tiennent plus ouverts pour recevoir en plus grande abondance & pour retenir la poudre qui vole dessus.

Ce remede du fiel de bœuf étant une espece de lessive, elle entre peu à peu dans les pores, où elle détrempe & dissout entierement la tanne; & comme dans cet état la tanne occupe beaucoup plus de place qu'elle ne faisoit auparavant, la plus grande partie de sa substance sort de son creux & s'en va en farine, il faut un temps assez considerable pour remplir de nouveau ces creux, pendant lequel il n'en paroît point dans la peau.

DE LA FORMATION

ET DE L'ACCROISSEMENT

DES COQUILLES DES ANIMAUX

*tant terrestres qu'aquatiques, soit de mer soit
de riviere.*

PAR M. DE REAUMUR.

1709.

Novembre.

LA Sageſſe de la Nature n'auroit pas aſſez fait pour la conſervation des Animaux, ſi contente d'avoir travaillé avec un art merveilleux leurs délicates parties intérieures, elle eût négligé d'employer la même adreſſe à les défendre contre les corps qui les environnent : le trop rude attouchement de ces corps auroit bientôt détruit ces canaux ſi déliés, ces fibres ſi ſubtiles ſur leſquelles eſt fondé tout le jeu ſurprenant deſ machines animales. Auſſi la Nature a-t-elle pris ſoin de revêtir ces délicates parties de diverſes envelopes qui ne peuvent pas aiſément être altérées par le corps qui les entourent ; non-ſeulement elle les a renfermées dans une dernière peau plus ferrée & plus ſolide que les autres, mais elle a encore ordinairement couvert cette dernière peau de poils, de plumes, d'écaillés, ou de coquilles. Ce ſont là les petits remparts, ſ'il m'eſt permis de parler de la forte, à l'abri deſquels les machines animales peuvent ſoutenir les efforts de la plûpart des corps qui les frotent, pouſſent, ou choquent continuellement. L'attention même de la Nature a été juſques à proportionner la force de ces défenſes à la foibleſſe des parties intérieures, je veux dire, que les animaux qui par leur figure, ou la moleſſe de leur ſubſtance donnent plus de priſe aux corps qui les environnent, ont en récompènſe de plus fortes envelopes ;

ainſi voïons-nous que des coquilles couvrent ceux dont la ſubſtance eſt très-humide & très-molle, & la figure preſque plate ou ſpirale, qui par ce double inconvenient ſeroient expoſés à être déchirés par la terre, le ſable ou les pierres ſur leſquelles ils rampent. Combien la Nature conſerve-t'elle d'eſpeces d'animaux différentes ſur la terre, dans les rivières & dans les mers par le moïen de ces coquilles ? avec quel art ne paroît-elle pas les avoir travaillées ? Il ſemble qu'elle ait pris plaisir à varier leurs figures, leurs ſtructures & leurs couleurs. Auſſi la plupart de ceux que les beautés de la Nature touchent, ont mis leurs ſoins à en aſſembler le plus qu'il leur a été poſſible, chaque nouvelle coquille fourniffant de nouveaux attraits à leur curioſité ; leurs cabinets ne contiennent qu'une partie de celles qui parent l'univers, & en ont toujours de reſte pour exciter l'admiration de ceux qui ſçaient admirer. Mais il ſemble qu'on ſe ſoit borné à contempler ce bel ouvrage ; perſonne, au moins que je ſçache, n'a expliqué de quelle maniere il eſt produit ; de ſorte que n'ayant pas trouvé à m'en inſtruire chez les Auteurs, j'ai conſulté la Nature elle-même par diverſes experiences ; & c'eſt en rapportant ce qu'elles m'ont appris, que je vais faire voir dans la ſuite comment ſe font la formation & l'accroiffement des Coquilles.

• Quoiqu'il parût d'abord naturel d'expliquer de quelle maniere les coquilles des animaux ſont formées avant de parler de leur accroiffement, je ſuivrai cependant ici un ordre contraire. Je commencerai par expliquer de quelle maniere elles croiſſent, ce qu'il a été plus aisé de découvrir par des experiences, & ce qui ſuffira pour faire connoître de quelle maniere ſe fait leur formation, qui n'eſt, pour ainſi dire, que leur premier degré d'accroiffement.

Un corps peut croître de deux manieres différentes ; ou, pour parler ſelon des idées plus diſtinctes, les petites parties de matiere qui viennent s'unir à celles dont le corps étoit déjà compoſé. & qui par là augmentent ſon étendue, peuvent lui être ajoutées par deux différentes

voies : ou ces parties ne s'attachent à celles qui composent déjà le corps qu'après avoir passé au travers de ce corps même, y avoir été préparées & en quelque façon rendues propres à occuper la place où elles sont conduites; & c'est ce qu'on appelle ordinairement Croître par *vegetation*, & dans l'Ecole Croître par *Intussusception*.

C'est ainsi que la sève monte dans les plantes par divers petits canaux des plantes mêmes, qui après l'avoir préparée en quelque sorte la conduisent en differens endroits de la plante où elle se colle, & augmente par conséquent l'étendue de cette plante. C'est ainsi qu'une certaine portion du sang aiant été conduite par les artères aux extrémités du corps de l'animal, s'attache à ses chairs, & en augmente le volume. La seconde espece d'accroissement est lorsque les parties qui augmentent l'étendue d'un corps, lui sont appliquées sans avoir reçu aucune préparation dans ce corps même, & c'est ce qu'on nomme Croître par *apposition*, ou en termes de l'Ecole, par *Juxtaposition*. Toutes ces plantes artificielles que nous devons à l'adresse des Chymistes, croissent de cette maniere, comme aussi toutes les cristallisations, les sels, &c.

L'accroissement des coquilles doit se faire de l'une ou de l'autre des manieres précédentes. Ceux qui ont tout fait *vegeter* jusques aux pierres, n'auroient eu garde apparemment de soupçonner, que des coquilles travaillées avec tant d'art pussent être produites par une simple juxtaposition. L'analogie même qui paroît être entr'elles & les os (car ne pourroit-on pas les regarder comme des os extérieurs?) sembleroit confirmer cette opinion, puisque les os *vegetent* veritablement, Mais de pareilles conjectures ne suffisent point en bonne Physique. Les seules experiences faites sur les choses dont il est question, y doivent servir de bases à nos raisonnemens : elles seules peuvent nous faire connoître le chemin qu'il a plû à la Nature de prendre pour arriver à son but; c'est avec le secours de ces experiences que nous verrons dans la suite que les coquilles sont produites par une simple apposi-

tion. Au reste, quoique je n'en aie fait que sur quelques especes de coquilles de terre, de mer, & de riviere, je ne laisse pas de me croire en droit d'expliquer en général l'accroissement & la formation des coquilles. Les voies générales dont la Nature se sert pour produire des ouvrages semblables sont assez connus. Ne suffiroit-il pas à un Physicien d'avoir expliqué comment une plante croît, de quelle maniere se fait la nutrition dans un animal pour en conclure, ou plutôt afin que tout le monde Philosophe conclût avec lui, que c'est ainsi que toutes les plantes croissent; que la nutrition se fait de la même maniere dans tous les animaux; après qu'il a été démontré que le sang circuloit dans l'homme, qui a douté qu'il ne circulât dans toutes les machines animales?

Aussi me contenterai-je de rapporter les experiences que j'ai faites sur diverses especes de Limaçons terrestres, pour ne pas fatiguer par d'ennuieuses repetitions dans lesquelles je tomberoïs necessairement si je rapportois de semblables experiences faites sur des Limaçons aquatiques tant de riviere que de mer, sur diverses especes de coquilles à deux pieces, comme Moules, Palourdes, Pectongles, &c. outre qu'il ne seroit pas aisé à bien des gens de repeter les mêmes experiences sur les coquilles de mer ou de rivières, au lieu que tout le monde les peut faire commodément sur les limaçons terrestres. J'avertirai seulement que j'ai renfermé diverses sortes de coquillages de mer & de riviere dans de petites cuves que j'ai fait enfoncer dans la mer ou dans la riviere après les avoir percées de plusieurs trous assez grands pour donner libre entrée à l'eau, mais trop petits pour laisser sortir les coquillages; ce qui m'a donné la facilité de faire à peu près les mêmes experiences sur leurs coquilles, & avec le même succès, que celles que je rapporterai avoir faites sur les Limaçons terrestres. Ceci supposé, je passe à expliquer comment se fait l'accroissement des Coquilles.

Lorsque l'animal qui remplissoit exactement sa coquille

croît, il arrive que cette même coquille n'a plus assez d'étendue pour le couvrir tout entier, ou qu'une partie de la surface du corps de l'animal se trouve nue; la partie qui se trouve ainsi dépouillée de coquille par l'accroissement de l'animal est toujours celle qui est la plus proche de l'ouverture de la coquille, car le corps de l'animal peut seulement s'étendre de ce côté là. Tous les animaux qui habitent des coquilles tournées en spirale, comme les Limaçons, ne peuvent s'étendre que du côté de la tête où est l'ouverture de la coquille; au lieu que les animaux des coquilles de deux pieces, comme les Moules, peuvent s'étendre dans tout leur contour. Or dans toutes les especes de coquillages, c'est cette même partie du corps qui se trouve dépouillée par l'accroissement de l'animal, qui fait croître la coquille. Voici la mécanique sur laquelle cet accroissement est fondé.

C'est un effet nécessaire des loix du mouvement, quand les liqueurs coulent dans des canaux, que les petites parties de ces liqueurs, ou les petits corps étrangers mêlés parmi elles, qui à cause de leur figure ou leur peu de solidité par rapport à leur surface, se meuvent moins vite que les autres, s'éloignent du centre du mouvement, ou qu'ils se placent proche des parois de ces canaux. Il arrive même souvent que ces petites parties s'attachent à la surface intérieure de ces canaux, lorsqu'elles sont assez visqueuses pour cela. Les canaux qui conduisent de l'eau à des réservoirs nous en fournissent des exemples. On voit ordinairement, lorsqu'on les ouvre, leur surface intérieure couverte d'une petite croute de matière visqueuse; on remarque même que ceux dans lesquels passent certaines eaux, ont une croute pierreuse. Il est de plus certain que les liqueurs qui coulent dans ces canaux, poussent leurs parois de tous côtés, ou (ce qui est la même chose) qu'elles poussent les petites parties pierreuses & visqueuses des croutes dont nous venons de parler, contre les parois. De sorte que si ces canaux étoient percés comme des cribles, d'une infinité de petits trous de figure propre à donner
seulement

seulement passage à ces petits corps visqueux & pierreux, ils s'échapperoient des canaux, & iroient se placer sur leur surface extérieure, où ils formeroient la même croute que l'on voit sur leur surface intérieure avec cette seule différence que cette croute pourroit devenir beaucoup plus solide & même plus épaisse, étant moins exposée au frottement de la liqueur que celle qui se forme dans l'intérieur du tuyau. L'accroissement des coquilles est l'ouvrage d'une semblable Mécanique; la surface extérieure de la portion du corps de l'animal qui s'est trop étendue pour être couverte par l'ancienne coquille, est remplie d'un nombre prodigieux de canaux dans lesquels circulent les liqueurs nécessaires à la nutrition de l'animal; beaucoup de petites parties de matiere visqueuse & pierreuse sont mêlées parmi ces liqueurs, mais comme ces petites parties visqueuses & pierreuses sont moins fluides que celles qui composent les liqueurs avec lesquelles elles coulent, elles se trouvent les plus proches des parois de ces vaisseaux, qui étant remplis d'une infinité de pores du côté de la surface extérieure du corps de l'animal, propres à leur donner passage, ces petites parties de matiere pierreuse & visqueuse s'échappent aisément des canaux qui les contenoient; car elles sont continuellement poussées contre leurs parois par la liqueur qui les remplit, & elles vont se placer sur la surface extérieure de ces canaux, ou plutôt sur toute celle du corps de l'animal qui n'est point couverte par la coquille, où elles arrivent avec d'autant plus de facilité, que tous les pores leur donnent une libre sortie, au lieu que plusieurs de ces pores peuvent être bouchés sur le reste du corps par la coquille dont il est revêtu. Ces petites parties de matiere pierreuse & visqueuse étant arrivées à la dernière surface du corps de l'animal, s'attachent aisément les unes aux autres & à l'extrémité de la coquille; sur-tout lorsque ce qu'il y avoit de plus subtil parmi elles, s'est évaporé, elles composent alors toutes ensemble un petit corps solide qui est la première couche du nouveau morceau de coquille. D'autres petites parties

370 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
de matiere semblable à celle de la premiere couche ; dont la liqueur qui circule dans les vaisseaux fournit abondamment, s'échappent de ces vaisseaux par la même Méchanique ; car on ne doit pas craindre que la premiere couche ait bouché tous les pores, & elles forment une seconde couche de coquille, il s'en forme de la même maniere une troisième, & ainsi de suite, jusques à ce que la nouvelle coquille ait une certaine épaisseur, mais ordinairement beaucoup moindre que celle de l'ancienne, lorsque l'accroissement de l'animal donne l'origine à un autre nouveau morceau de coquille. C'est aux experiences que je vais rapporter à faire voir, si j'ai véritablement décrit la maniere dont la Nature agit, ou si l'on doit regarder tout ce qu'on vient d'avancer comme un simple jeu d'imagination.

J'ai commencé par supposer que l'animal croît avant sa coquille ; & c'est de quoi il est aisé de s'assurer, si l'on veut regarder avec quelque attentions des limaçons de Jardin dans le temps qu'ils augmentent l'étendue de la leur ; on voit d'une maniere très-sensible qu'elle est trop petite pour les contenir. Ils s'attachent alors contre les murs, où ils restent en repos, & donnent la facilité d'observer qu'une portion de leur corps déborde tout autour de la coquille. Cette portion, comme tout le reste de leur corps, est remplie d'une quantité prodigieuse de petits canaux, les yeux seuls en apperçoivent un grand nombre qui leur paroît augmenter considérablement, lorsqu'on leur donne le secours du Microscope.

Les pores dont j'ai supposé ces canaux remplis sont trop petits pour être sensibles aux yeux, mais on se convainc de leur existence par leurs effets avec autant de certitude que si on les appercevoit fort distinctement ; il ne faut pour cela que casser un morceau de la coquille d'un limaçon sans le blesser, ce qui est toujours aisé de faire, parce qu'elle ne lui est adhérente que dans un seul endroit, & ôter le morceau de coquille que l'on a cassée, on voit dans peu de tems la peau de l'animal se couvrir

d'une liqueur, qui n'a pû arriver des vaisseaux dans lesquels elle étoit contenuë jusques à cette dernière surface, sans que les pores de ces vaisseaux l'aient laissé passer; si même pour s'assurer davantage de la route que cette liqueur a prise pour arriver sur la peau du limaçon, on ôte cette liqueur en essuïant la peau avec un linge, peu d'heures après on voit reparoître une liqueur semblable à celle que l'on a ôtée qui vient en même tems de toute la partie découverte, & qui par conséquent ne peut avoir passé que par les pores.

FIG. I.

C'est cette liqueur, ou plutôt les parties de matiere moins propres au mouvement mêlées parmi cette liqueur, qui servent à faire croître la coquille du Limaçon. On n'aura gueres lieu d'en douter lorsque l'on sçaura qu'elles reparent la perte du morceau de coquille qu'on lui a enlevée; & c'est ce qu'on verra fort clairement, si après avoir dépouillé un Limaçon d'une partie de sa coquille, on le met dans quelque endroit où l'on puisse le voir commodément, dans un vase par exemple, il n'est pas long-tems sans s'attacher contre les parois de ce vase, comme ils s'attachent contre les murs des jardins dans le tems que leurs coquilles croissent. On voit alors cette liqueur s'épaissir & se figer, ou, pour parler selon des idées plus claires, les parties les plus subtiles s'évaporent, & les plus grossieres restent seules, & forment sur la partie du corps de l'animal qui est découverte une petite croute très-fine; on peut souvent distinguer cette croute après vingt-quatre heures; elle ressemble assez alors par sa finesse à ces toiles que les araignées des maisons font dans les angles des murs. C'est cette croute qui forme la premiere couche de la nouvelle coquille. On voit au bout de quelques jours cette croute s'épaissir par le moyen de différentes couches qui se produisent sous cette premiere; & enfin au bout de dix ou douze jours ordinairement, le nouveau morceau de coquille qui s'est formé a à peu près la même épaisseur de l'ancien morceau de coquille que l'on a ôtée au Limaçon.

Lorsqu'on veut voir parvenir le nouveau morceau de coquille à l'épaisseur de l'ancienne , il faut avoir la précaution de mettre dans le vase où on a renfermé les Limaçons une nourriture qui leur soit convenable , sur tout lorsqu'on a cassé cette coquille proche de l'ouverture , sans quoi le volume de leur corps diminué considérablement , & ce qu'on leur a laissé de coquille se trouvant alors assez grand pour les couvrir , il ne se forme que les premières feuilles de la coquille : il est même quelquefois à propos de les détacher des parois du vase , lorsqu'on remarque qu'ils y restent plusieurs jours de suite , afin de les obliger de se servir de la nourriture qu'on leur a donnée , & de reparer la dissipation qui s'est faite pendant la production des premières feuilles du nouveau morceau de coquille.

On peut leur donner pour les nourrir, des herbes , même de la terre & du papier souvent arrosés d'eau ; ils mangent assez indifféremment de toutes ces choses , qui peuvent fournir des petites parties de matière assez solide pour former la coquille. La terre , par exemple , doit être remplie d'une infinité de petites lames qui servent à former les pierres qui croissent dans son sein. Si ces petites lames pierreuses circulent avec les liqueurs dans les vaisseaux du Limaçon , elles doivent sans doute être très-propres à bâtir les diverses couches de coquilles : or on peut s'assurer par une expérience facile que ces petites parties pierreuses circulent avec ces liqueurs. On n'a pour cela qu'à mettre une certaine quantité de cette liqueur dans un vase¹, & la laisser exposée à l'air pendant quelques jours. Après que le plus subtil s'est évaporé , on voit au fond du vase une matière solide , parmi laquelle on distingue beaucoup de petits grains d'une matière blanche friable , assez ressemblans à des grains de sables , à cela près qu'ils ont moins d'épaisseur. On sçait de plus que les limaçons au commencement de l'hyver , font avec cette liqueur ou leur bave un petit couvercle à l'ouverture de leur coquille , dans laquelle ils se renferment entièrement. A la vérité

ce couvercle est d'une tiffure assez differente de celle de la coquille, mais il est solide, & cela suffit pour faire voir qu'il y a beaucoup de matiere solide mêlée parmi ces liqueurs. La difference qui est entre la tiffure de la coquille, & celle de ce couvercle vient sans doute de la difference des pores par lesquels cette liqueur a passé avant de former l'une ou l'autre

La maniere seule dont se forme un nouveau morceau de coquille en la place de celui qu'on a enlevé, pourroit suffire pour prouver que les coquilles ne vegetent point; car si elles croissoient par vegetation, ce ne pourroit être que de deux manieres qu'il n'est pas possible d'accommoder avec l'experience précédente. Ou les liqueurs que l'animal fourniroit pour l'accroissement de la coquille, & qu'il ne pourroit dans cette hypothèse lui communiquer que par le petit endroit auquel il lui est attaché, qu'on devroit regarder alors en quelque sorte comme la racine de la coquille; ou, dis-je, ces liqueurs enfileroient dès cet endroit des canaux qui les porteroient à toutes les parties de la coquille; ou ils ne les conduiroient que vers l'extrémité qui doit s'étendre; or dans l'une & l'autre de ces suppositions, il arriveroit que lorsque l'on auroit cassé un morceau de la coquille, la liqueur qui coule au travers de cette coquille, s'échaperoit par l'ouverture qu'on lui a faite; & alors ce seroit sur le contour du trou qu'on a fait à la coquille, que l'on appercevroit cette liqueur que l'on ne voit que sur le corps de l'animal; laquelle liqueur après s'être figée, feroit une espece de calus, qui s'augmentant peu à peu boucheroit enfin entierement le trou. C'est ainsi que les calus des os fracassés se forment par l'extravasion du suc qui servoit auparavant à les nourrir & à les faire croître, que lorsque l'on a coupé des chairs de quelque partie du corps, les chairs voisines s'étendent & recouvrent la partie qu'on avoit découverte; enfin nous voyons arriver la même chose aux arbres dont on a enlevé une partie: il se forme un calus du suc qui s'extravase de l'arbre & qui recouvre l'arbre peu à peu;

tout se passe autrement dans la production du nouveau morceau de coquille. Rien ne s'échappe de la coquille; toute l'étendue du trou se bouche en même tems par la liqueur qui sort du corps de l'animal; & afin qu'on ne soupçonne pas que cette liqueur s'étant extravasée de la coquille d'une manière insensible tombe par son propre poids sur le corps de l'animal où elle se rassemble en assez grande quantité pour composer ensuite le nouveau morceau de coquille qui est toujours posé directement sous l'ancienne; je vais rapporter deux expériences qui serviront également à dissiper ce scrupule, & à démontrer ce que j'ai avancé.

FIG. II.

J'ai cassé plusieurs coquilles de limaçon de deux manières différentes. Premièrement, j'ai fait aux unes un assez grand trou entre les deux extrémités de la coquille, c'est-à-dire entre la pointe de la coquille & son ouverture; après quoi j'ai fait couler par ce trou entre le limaçon & sa coquille un morceau de peau de cannepin, c'est avec cette peau qu'on fait les gands qu'on nomme *Gands de poule*; cette peau étoit très-mince, mais d'une tissure serrée; je l'ai collé cette peau à la surface intérieure de la coquille, de manière qu'elle bouchoit assez exactement le trou que je lui avois fait; c'est-à-dire, que je l'ai collée entre la coquille & le corps de l'animal. Or il est évident que si la coquille ne se formoit pas d'une liqueur qui sort immédiatement du corps de l'animal, mais de celle qui passe au travers de la coquille, qu'il auroit dû se former un morceau de coquille sur la surface extérieure de la peau de gant, & qu'il n'étoit pas possible qu'il s'en formât entre le corps du Limaçon & cette peau. Le contraire est cependant toujours arrivé; le côté de la peau qui touchoit le corps de l'animal s'est couvert de coquille, & il ne s'est rien formé sur la surface extérieure.

L'autre expérience n'est pas moins décisive que celle-ci. 2^o. J'ai cassé plusieurs coquilles de Limaçon de manière que j'ai diminué le nombre de leurs tours. J'ai, par

exemple, réduit des coquilles de gros Limaçons des jardins, qui sont ordinairement quatre tours de spirales, ou quatre tours & demi, à trois tours & demi ou à quatre tours; ainsi j'ai rendu ces coquilles trop petites pour couvrir le Limaçon; & je les ai mises à peu près dans le même état où elles sont, lorsque l'accroissement du corps de l'animal les fait croître. Après avoir ainsi cassé plusieurs coquilles, j'ai pris comme dans l'expérience précédente un morceau de peau aussi large que le contour de l'ouverture de la coquille, j'ai fait entrer une des extrémités de cette peau entre le corps du Limaçon & la coquille, à la surface intérieure de laquelle j'ai collé cette peau; & ayant renversé l'autre extrémité de la peau sur la surface extérieure de la coquille, je la lui ai pareillement collée; d'où l'on voit que j'ai enveloppé tout le contour de l'ouverture de la coquille avec cette peau. Or si la coquille croissoit par un principe de végétation, il seroit arrivé l'une de ces deux choses, ou le morceau de peau ainsi collé l'auroit empêché de croître, ou la coquille s'allongeant auroit porté la peau plus loin. Mais il est arrivé au contraire que la coquille a crû, & que la peau est restée où je l'avois placée; car l'accroissement de la coquille s'est fait de telle sorte, que l'épaisseur du gant est restée entre le nouveau morceau de coquille & l'ancienne, qui par conséquent n'a contribué en rien à cette formation.

Au reste il ne doit pas paroître difficile à concevoir comment les petites parties de matiere solide qui sont mêlées parmi la liqueur, peuvent s'attacher les unes aux autres pour former une premiere couche de la nouvelle coquille, ni comment une seconde couche peut s'unir à cette premiere, une troisième à la seconde, & ainsi de suite; ou plutôt, cette difficulté n'est point differente de celle que l'on a à expliquer l'union des parties de tous les corps solides; mais quelque système que l'on veuille adopter, il est aisé de comprendre que ces petites parties solides qui nagent dans une liqueur très-visqueuse, ont une grande facilité à s'unir entr'elles, comme aussi les

376 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
diverses couches de coquille qu'elles composent ; je rapporterai pourtant une expérience qui pourroit peut-être donner quelque ouverture pour expliquer comment ces petites parties qui forment les coquilles s'attachent les unes aux autres.

J'ai broïé dans un mortier des coquilles de Limaçon ; & après les avoir réduites dans une poudre très-fine, j'ai fait passer cette poudre par un tamis dont le tissu étoit très-ferré, afin d'en séparer les parties les plus grossieres. J'ai mis cette poudre dans un vase, & j'ai jetté du vinaigre dessus avec lequel elle a fermenté. Il s'est fait une espece de pâte que j'ai laissée sécher exposé à l'air ; elle est devenue d'une assez grande dureté sur tout la premiere couche, ou celle qui étoit la plus exposée à l'air ; lorsqu'au contraire j'ai délaïé cette poudre avec de l'eau, quand elle s'est séchée, les petits grains de poudre ont cessé d'être adhérens. D'où il paroît que des acides analogues à ceux du vinaigre sont très-propres à lier entr'eux les petits corpuscules qui forment les coquilles de Limaçon. Ceux qui emploient volontiers par tout les acides de l'air, pourroient trouver ici leur compte, en s'imaginant qu'ils contribuent à coaguler la liqueur qui vient se placer sur le corps du Limaçon ; mais il semble que pour rendre cette conjecture vrai-semblable, il seroit nécessaire qu'il se trouvât aussi certains acides mêlés parmi l'eau de mer qui servissent à coaguler les liqueurs qui forment les coquilles de mer ; & si cela étoit vrai, il devroit arriver, lorsqu'on auroit délaïé de la poudre de coquille de mer avec de l'eau de mer, que cette poudre auroit plus de consistance étant sèche, que n'en a celle de coquille de Limaçon délaïée avec de l'eau de riviere, & c'est ce qui n'arrive point.

On ne doit pas craindre aussi, qu'une premiere feuille de la coquille étant formée, elle bouche tous les passages nécessaires à la nouvelle liqueur qui doit s'échaper des vaisseaux pour produire une seconde couche de la coquille ; & ainsi de suite jusques à ce qu'elle ait une certaine épaisseur.

Il n'est pas possible que le corps du Limaçon s'applique assez exactement sur cette nouvelle feuille de coquille, pour boucher entièrement tous ces petits pores : on verra même cette difficulté s'évanouir entièrement pour peu qu'on fasse réflexion que cette première couche de coquille n'a pû être produite sans que le volume du corps du limaçon soit diminué non-seulement de la quantité des parties solides qu'il a fournies pour sa formation, mais encore de beaucoup de parties de matière plus liquide qui étoient mêlées parmi elles, & qui se sont évaporées, sans ce qui peut s'être dissipé par d'autres voies. Ainsi on voit qu'il doit rester assez d'espace entre cette nouvelle feuille, qui est immédiatement appuyée sous l'ancienne coquille, & le corps de l'animal, pour qu'une nouvelle liqueur puisse se placer entre deux, & former ensuite une seconde couche par la même Mécanique qui a formé la première : on raisonnera de même de la troisième couche, & de toutes celles qui donnent l'épaisseur de la coquille.

Les diverses couches qui composent l'épaisseur de la coquille deviennent très-sensibles, si on jette les coquilles dans le feu, & qu'on les en retire après les avoir un peu laissé brûler : l'épaisseur de la coquille se divise alors en un grand nombre de différentes feuilles qui se sont un peu éloignées les unes des autres, le feu ayant trouvé des passages plus commodes entre ces diverses feuilles, qu'entre les petites parties qui forment chacune d'elles ; c'est aussi ce qui arrive ordinairement aux corps formés par couches. Toutes les patisseries que l'on nomme feuilletées ; nous en fournissent un exemple vulgaire, mais sensible : tout leur art est d'être faites de diverses couches de pâte & de beurre posées les unes sur les autres ; lorsqu'on les fait cuire, elles se divisent en plusieurs feuilles, le feu s'ouvrant plus aisément des chemins ou en trouvant d'ouverts entre ces différentes couches qui ne peuvent jamais être exactement appliquées les unes sur les autres dans toute leur étendue.

Les diverses feüilles peuvent aisément s'attacher les unes aux autres sans qu'il doive arriver qu'elles se collent aussi ou corps de l'animal qu'elles couvrent ; l'humidité de sa peau doit l'empêcher ; & s'il leur arrivoit de s'y coller légèrement , les divers mouvemens qu'il se donne dans sa coquille , suffiroient pour les détacher.

C'est une suite nécessaire de la maniere dont nous venons de voir que les coquilles des Limaçons croissent , qu'elles ne deviennent plus grandes que par l'augmentation du nombre de leurs tours de spirale , & que la longueur de chaque tour de la coquille formée reste toujours la même ; c'est aussi une verité de laquelle il est aisé de se convaincre : si l'on réduit la coquille d'un Limaçon qui est parvenu à son dernier degré d'accroissement , au même nombre de tours que celle d'un petit limaçon de la même espece ; ces deux coquilles alors paroissent de même grandeur. J'ai comparé plusieurs fois des coquilles de Limaçons qui ne faisoient qu'éclore , ou même que j'avois tirées de leurs œufs avant qu'ils fussent éclos , avec d'autres coquilles des plus gros Limaçons de la même espece , auxquelles je ne laissois que le même nombre de tours de spirale qu'avoient ces petites coquilles ; & alors elles paroissent égales ; au reste le nombre de ces tours augmente considérablement la grandeur de la coquille des Limaçons , & un tour plus ou moins fait une grande difference ; car le diametre de chaque tour de spirale , ou sa plus grande largeur , est à peu près double de celui qui la precede , & la moitié de celui qui la suit ; ainsi on voit qu'un demi-tour , ou même un quart de tour plus ou moins , doit considérablement augmenter l'étendue de la coquille ; & il n'est pas souvent aisé de démêler si une coquille fait un quart de tour plus ou moins. De sorte que pour remarquer fort distinctement qu'une coquille fait plus ou moins de tours qu'une autre coquille de même espece , il est nécessaire de comparer de grosses coquilles de cette espece avec de très-petites de la même espece , & alors la difference des tours devient fort sensible.

Tout ce que nous avons dit jusques ici de l'accroissement des coquilles, nous exempté d'entrer dans le détail de leur premiere formation. Car on conçoit aisément que lorsque le corps d'un petit embrion, qui doit un jour remplir une grosse coquille, est parvenu à un certain état, dans lequel les diverses peaux qui l'envelopent ont assez de consistance pour laisser échaper par leurs pores la seule liqueur propre à former la coquille; on conçoit, dis-je, que cette liqueur va se placer sur ces peaux, qu'elle s'y épaisit, qu'elle s'y fige, en un mot, qu'elle y commence la formation de la coquille de la même maniere qu'elle continuë son accroissement. Les Limaçons ne sortent point de leurs œufs sans être déjà revêtus de cette coquille, qui a alors un tour de spire & un peu plus.

Il me reste à éclaircir deux difficultez, qui pourroient paroître considerables : la premiere naît naturellement des Experiences que j'ai rapportées; voici en quoi elle consiste. Le nouveau morceau de coquille qui se forme pour boucher le trou qu'on a fait à la coquille du Limaçon, est ordinairement de couleur blanchâtre, & par conséquent très-differente de celle du reste de la coquille: d'où il semble qu'il doit être d'une differente tiffure, & on en pourroit conclure avec quelque apparence qu'il n'est pas formé de la même maniere que le reste de la coquille; ainsi les experiences précédentes ne décideroient rien pour leur accroissement ordinaire. Pour répondre à cette difficulté, il est nécessaire d'expliquer d'où naît la réguliere variété des couleurs de certaines coquilles; les mêmes experiences qui en fourniront la cause, serviront à dissiper entièrement cette difficulté.

Cette variété réguliere de couleurs est sur tout remarquable dans une petite espece de Limaçons des jardins; le fond de leur coquille est blanc, citron, ou jaune, ou d'une couleur moienne entre celles-ci. Differentes raies paroissent tracées sur ce fond, elles tournent en spirale comme la coquille, dans quelques-unes ces raies sont noires, dans d'autres brunes, quelquefois rougeâtres. La

Bbb ij

FIG. V.
VL

largeur de chacune de ces raïes s'augmente insensiblement en s'approchant du côté de l'ouverture de la coquille : il arrive même quelquefois que deux de ces raïes s'étendent assez pour se rencontrer, & ne faire qu'une seule raïe dans la suite ; quelques coquilles ont jusques à cinq ou six de ces raïes , d'autres n'en ont que trois ou quatre , même deux ou une seule : on peut aussi remarquer diverses raïes brunes & blanches sur les gros limaçons des jardins ; mais elles frappent moins , & il faut les regarder avec quelque attention pour les démêler les unes des autres : les Limaçons de l'une & de l'autre espece n'ont pas toutes ces raïes de même largeur dans le même endroit de la coquille.

Il ne paroît qu'une seule maniere vrai-semblable de rendre raison de la variété de ces couleurs dans le système que nous avons établi de l'accroissement des coquilles par *juxtaposition* : car aïant regardé la peau de l'animal comme une espece de crible qui donne passage aux particules qui servent à former la coquille , il est clair que si l'on conçoit que cette peau est différemment percée en divers endroits, ou (ce qui revient au même) qu'elle est composée de différens cribles dont les uns laissent passer de petites parties différentes en figure , ou de différente nature de celles qui passent par les autres , & ferment le passage à celles-cy ; il arrivera que ces petites parties de figure , ou de nature différente , seront propres à former des corps qui réfléchiront différemment la lumière, c'est-à-dire , qu'elles formeront des morceaux de coquille de diverses couleurs.

C'est aussi une suite nécessaire de la maniere dont croît la coquille du Limaçon , que tout le contour de cette coquille (je ne dis pas toute son épaisseur) soit formée par le colier du Limaçon parce qu'il est la partie la plus proche de la tête , & que par conséquent pour peu que l'animal croisse , il cesse ce colier d'être couvert par l'ancienne coquille : c'est donc toujours à lui à l'étendre , & on peut le regarder comme l'ouvrier de tout le contour de la co-

quille; ainsi il suffira que ce colier soit composé de differens cribles pour former une coquille de differente couleur: s'il a, par exemple, deux ou trois petits cribles propres à laisser passer les parties noires ou brunes, & que les côtés de ces cribles soient paralleles entr'eux, pendant que le reste de sa surface laisse échaper toutes les petites parties de matiere propres à réfléchir la lumiere de telle sorte qu'elle fasse apercevoir une couleur de citron; la coquille qui sera formée par les petits corps qui ont passé par ces differens cribles, fera elle-même de couleur d'un fond citron avec des raies noires ou brunes, presque paralleles ou qui s'approcheront les unes des autres insensiblement, & deviendront plus larges dans la même proportion que ces cribles seront augmentez.

Quand nous ne verrions rien de semblable aux differens cribles dont je viens de parler sur le colier du limaçon, ils nous fournissent une explication si probable de la variété des couleurs des coquilles, qu'il seroit necessaire de les y supposer; mais heureusement ils se découvrent eux-mêmes, sur tout dans la petite espece de limaçon si remarquable par ses raies distinctes. Lorsqu'on a dépouillé un de ces Limaçons d'une partie de sa coquille, tout le reste du corps paroît d'une couleur assez blanche, au colier près dont le blanc tire un peu plus sur le jaune, & qui outre cela est marqué d'un nombre de raies noires ou brunes égal à celui des raies de la coquille, & posées dans le même sens; ainsi les Limaçons qui n'ont qu'une raie noire sur leur coquille, n'ont aussi qu'une tache noire sur leur colier; ceux qui ont quatre raies sur la coquille, en ont aussi toujours quatre sur le colier: ces raies sont placées immédiatement sous celles de la coquille; elles commencent à une ligne quelquefois, ou environ de l'extrémité du colier qui est aussi ordinairement elle-même tachetée de noir tout autour. La longueur de ces raies du colier est differente dans differens Limaçons de même espece, on ne peut méconnoître les cribles dont j'ai parlé en remarquant ces raies, leur differente cou-

FIG. V.

Pour ne pouvoir plus douter que ces taches ne fassent la fonction de cribles differens de ceux du reste du colier , & que le reste du colier qui paroît aussi de couleur differente du reste de la peau du corps entier ; laisse aussi échapper des particules d'une figure , ou d'une nature differente ; il ne s'agit que de sçavoir si l'expérience s'accommode avec ces raisonnemens ; & il ne faut pour cela que laisser réparer au Limaçon la coquille qu'on lui a enlevée : car s'il arrive que ce qui se forme de coquille vis-à-vis ces raies noires soit noir , & que ce qui est formé entr'elles soit d'une couleur differente de ce qui s'est formé sur ces raies & sur le reste du corps , il doit paroître incontestable que ces differens endroits sont les fonctions qu'on leur a attribuées. Or l'expérience se trouve parfaitement d'accord avec le raisonnement précédent : la coquille qui croît sur le colier vis-à-vis les raies brunes ou noires , est elle-même noire ou brune ; celle qui se forme entre ces raies , est blanche ou citron , & celle qui vient sur tout le reste du corps , est blanche , mais d'un blanc different de celle du colier lorsqu'elle est blanche aussi. La même chose arrive aux gros Limaçons des jardins : toute la coquille qui se forme sur leur colier , est brune ou de couleur semblable à celle de l'ancienne ; & la coquille qui vient sur le reste de leur corps , est blanche.

FIG. VI.

Il est bon de dissiper à present un autre scrupule qui pourroit naître à ceux qui tenteroient les mêmes expériences que j'ai rapportées. Il arrive quelquefois que la nouvelle coquille qui se forme vis-à-vis le colier en la place de celle qu'on a ôtée , n'est pas de même couleur que l'ancienne , il semble pourtant par l'explication & les experiences que je viens de rapporter , que cela ne devoit pas arriver.

Cette espece d'irregularité paroîtra moins difficile à concilier avec les raisonnemens & les experiences précédentes , lorsqu'on fera attention que la nouvelle coquille formée vis-à-vis le colier , n'est jamais de couleur diffé-

rente de celle de l'ancienne , à moins que sa surface extérieure ne soit extrêmement raboteuse , & qu'elle ne représente plusieurs sillons , au lieu que celle du reste de la coquille est assez polie.

L'inégalité de cette surface de la nouvelle coquille est causée par les mouvemens que le Limaçon se donne lorsqu'il veut rentrer dans sa maison , avant que la nouvelle coquille ait assez d'épaisseur pour se soutenir , sans s'appuyer sur lui ; car il est aisé de comprendre que s'il se retire ainsi , lorsqu'il n'y a encore qu'une ou peu de feuilles formées du nouveau morceau de coquille , il rapprochera l'extrémité de ces feuilles trop minces encore pour pouvoir se soutenir , de l'ancienne coquille ; & que les réduisant à un moindre espace , il leur fera faire differens plis , ce qui pourroit presque seul suffire pour changer la couleur de la nouvelle coquille : mais il est quelque chose de plus ; c'est que la premiere couche qui se forme lorsqu'on a enlevé un grand morceau de coquille est ordinairement blanche , les parties de liqueur propres à former la coquille de cette couleur sortant plus aisément par les pores qui leur donnent passage , que ne sont celles qui forment la coquille d'une autre couleur ; ce qui est assez visible , le reste du corps de l'animal étant couvert de liqueur d'une matiere très-sensible ; avant qu'on en apperçoive sur son colier , d'où il arrive que cette liqueur s'étend sur le colier & y produit une premiere couche de coquille blanche ; mais comme cette couche est extrêmement mince , elle est aussi transparente & ne suffit pas ordinairement pour empêcher la coquille que le colier lui-même a produit ensuite , de paroître de la couleur qui lui est naturelle. Or s'il arrive que le Limaçon rentre dans sa coquille lorsqu'il n'y a encore que cette premiere couche blanche de produite , on voit clairement qu'il rapprochera les extrémités de cette couche l'une de l'autre , parce qu'elle lui est adherente en quelques endroits , qu'il lui fera faire differens plis , & augmentera son épaisseur en diminuant sa largeur & sa transparence ; ce qui rendra

la nouvelle coquille d'une couleur moyenne entre celle qui est ordinairement formée sur le colier, & celle qui est formée sur le reste du corps : mais la surface interieure du nouveau morceau de coquille qui est toujours polie, doit aussi toujours être de la couleur de celle que doivent former les pores qui lui correspondent ; aussi paroît-elle de couleur variée de la même maniere que celle de l'ancienne coquille, lors même que la surface extérieure n'a pas la couleur qui semble lui être naturelle.

On concluoit mal, si l'on concluoit de ce que nous venons de dire de la formation des raies qui parent certaines especes de coquilles, que la surface extérieure de toutes les coquilles devoit être raïée, ou d'une couleur uniforme, & qu'il ne devoit point y en avoir de ces coquilles dont la surface extérieure fût marquée de diverses taches posées différemment, de figure irréguliere, séparées les unes des autres par des intervalles inégaux, telle qu'est la coquille de la figure 7^e, & cela fondé sur ce que ces taches ne peuvent être produites sur la surface de la coquille, sans qu'il y ait sur le collier de l'animal qui l'habite, des especes de petits cribles qui laissent passer une liqueur différente de celle qui passe par les autres endroits, & par conséquent sans que cet animal ait tout ce qui est nécessaire pour produire une coquille rayée. Car il est aisé de voir, qu'il faut que ces cribles subsistent pendant l'entiere formation de la coquille, afin de rendre cette coquille raïée dans toute son étendue ; mais s'il arrive au contraire que ces cribles changent, c'est-à-dire, que si les pores qui laissent échaper de la liqueur propre à former une coquille de couleur brune, deviennent trop larges ou trop étroits, ou changent en quelqu'autre façon de figure, après avoir filtré une certaine quantité de cette liqueur, & ceux qui donnoient passage à la liqueur qui forme la coquille blanche, changent aussi de configuration, il arrivera aussi alors que la coquille qui se formera, sera marquée de diverses taches noires & blanches combinées avec la même irregularité que s'est fait le changement des cribles.

Ceci

Ceci ne paroîtra pas une supposition purement gratuite, à ceux qui voudront faire attention qu'il arrive même quelques changemens aux cribles du colier des Limaçons qui produisent les coquilles raïées ; car on peut remarquer que quelques-unes de ces coquilles ont des raïes très-marquées & d'une couleur très-vive vers leur ouverture, pendant qu'on n'apperçoit aucune de ses raïes sur les premiers tours de la spirale, c'est-à-dire, sur ceux qui sont les plus proches du sommet de la coquille, ou qu'on les y voit ces raïes marquées très-faiblement. Or ce changement de couleur ne peut être arrivé que par un pareil changement dans les cribles du colier. Il faut à la vérité imaginer des changemens bien plus considérables sur le colier des animaux qui habitent des coquilles telles que celle de la figure 6^e, mais ces changemens sont également possibles.

La fluidité de la liqueur qui sert à former la coquille, a peut-être aussi quelque part à la distribution irrégulière des couleurs que l'on voit sur quelques especes. Car il est aisé de concevoir que si certains animaux laissent échapper pour la formation de la coquille, une liqueur assez fluide & qui coule aisément d'un endroit sur un autre, il pourra se former des coquilles marquées irrégulièrement s'ils ont des cribles sur leur colier qui laissent passer des liqueurs différentes ; puisqu'il arrivera souvent alors que la liqueur ne restera pas vis-à-vis l'endroit par où elle est sortie, & que ce qui est sorti de liqueur propre à faire de la coquille blanche, ira se poser sur l'endroit d'où est sorti la liqueur qui fait la coquille noire ; comme aussi celle qui fait la coquille noire, coulera peut-être sur l'endroit où est sortie quelqu'autre liqueur qui fait la coquille blanche. Or comme cela arrivera irrégulièrement selon les diverses positions plus ou moins inclinées dans lesquelles sera l'animal lorsque la coquille se forme, ces taches seront aussi posées d'une manière irrégulière.

Il faut pourtant avoir recours à la 1^{re} des deux causes dont nous venons de parler ; c'est-à-dire, au changement

de la tiffure des cribles du colier , pour expliquer la réguliere position des taches rouges , de figure quarrée ou rectangle , qui ornent la coquille représentée fig. 8^e, étant nécessaire pour la former telle , que les cribles de figure quarrée ou rectangle , qui laissent passer la liqueur propre à colorer ainsi la coquille , se bouchent & se débouchent dans une certaine proportion.

Quoique le colier du Limaçon trace tout le contour de la coquille , & que cela suffise pour lui donner les couleurs distribuées régulièrement , il ne lui donne pas cependant toute l'épaisseur qu'elle peut avoir , de petites parties de liqueur qui s'échappent par les pores du reste de la peau , l'augmentent cette épaisseur , c'est de quoi on ne peut douter ; car si l'on réduit la coquille d'un gros Limaçon au même nombre de tours que celle d'un petit , elles paroissent également grandes , mais celle du grand paroît plus épaisse. Cette augmentation de l'épaisseur de la coquille est sur-tout remarquable dans quelques especes de coquilles de mer tournées en spirale , elle devient quelquefois telle que les premiers tours de la coquille se bouchent enfin absolument , & que la queue de l'animal qui les habite est obligée de se placer dans des tours plus éloignés , ce qu'on peut voir d'une maniere très-sensible dans des coquilles que M. Mery a disséquées avec beaucoup d'adresse. La fig. 8^e représente une de ces coquilles ; les espaces marqués *aaa* occupés autrefois par le corps de l'animal , y sont devenus entierement solides.

La queue de l'animal n'étant point adhérente au sommet de la coquille , comme quelques-uns l'ont crû , il lui est aisé de se placer , sur-tout dans le tems que l'endroit par lequel l'animal est attaché à la coquille , change (car cet endroit change selon que le corps de l'animal fait plus ou moins de spirés) : un petit Limaçon , par exemple , y sera attaché par une partie du premier tour de sa spire ; & lorsqu'il sera devenu plus gros , il n'y sera attaché que dans le 2^e tour.

Les dernières couches qui sont produites par la peau

qui ne couvre pas le colier du Limaçon doivent être blanches, selon tout ce que nous avons dit jusques ici, aussi le sont-elles ; ce que l'on voit aisément si on se donne la peine d'user avec une lime les premières couches de la surface extérieure de ces coquilles, celles qui restent alors paroissent blanches ; ou sans se donner ces mouvemens, ou peut s'assurer de la même chose, en faisant attention que les couleurs des coquilles vuides que l'on trouve dans les jardins, sont souvent très-effacées, & que dans quelques endroits mêmes elles paroissent blanches, les premières couches qui sont seules colorées aiant été enlevées par de fréquens frottemens contre la terre.

L'accroissement des coquilles étant proportionné à celui des animaux qui les habitent, se fait d'une manière presque insensible ; on peut néanmoins dans la plupart des coquilles distinguer assez aisément leurs divers degrés d'accroissement : ils sont marqués par diverses petites éminences paralleles entr'elles, qu'on prendroit volontiers pour les fibres de la coquille : ces éminences reignent sur tout le contour de la coquille dans celles qui sont plates ou de deux pieces, & sur la largeur dans celles qui sont tournées en spirale. Pour peu qu'on fasse attention à la manière dont nous venons de voir que les coquilles se forment, on remarquera aisément qu'elles ne peuvent croître sans laisser paroître les petites éminences dont je viens de parler : car chaque nouveau petit morceau de coquille doit être immédiatement collé sous celui qui le précède, qui par conséquent sera plus élevé que celui-ci de toute l'épaisseur qu'il avoit, lorsque l'accroissement de l'animal a donné l'origine à ce dernier, sous lequel doit aussi être posé le morceau qui est produit ensuite. Ainsi la coquille doit être remplie d'un grand nombre de petites éminences paralleles entr'elles ; on les voit fort distinctement sur les coquilles des Limaçons, elles sont très-proches les unes des autres.

FIG. I.

Chaque coquille a ordinairement quelques-unes de ces éminences beaucoup plus distinctes, que les autres, &

FIG. II.
XIII.

Ccc ij

388 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 assez éloignées, elles marquent les differens tems où la coquille a cessé de croître, & ont quelque chose d'analogue avec les diverses poulsses qu'on peut remarquer sur chaque jet d'arbre. La chaleur de l'été ou le froid de l'hyver arrêtant l'accroissement de l'animal qui habite les coquilles, ce que nous voïons arriver aux Limaçons, l'étendue de la coquille ne peut pas s'augmenter pendant ces saisons; il n'en est pas de même de son épaisseur, car il s'échape continuellement de petites parties de liqueur du corps de l'animal dont elle profite. Ainsi lorsqu'il recommence à croître dans une saison plus favorable; le nouveau morceau de coquille qu'il produit, se colle sous une coquille beaucoup plus épaisse que lorsque son accroissement se fait insensiblement; par conséquent ce premier terme doit être marqué par une plus grande éminence.

FIG. II.

Il est encore une autre chose qui rend sensibles ses differens endroits où la coquille a commencé à croître après avoir cessé quelque tems; c'est un changement de couleur qu'on apperçoit distinctement sur les raïes dont nous avons parlé cy-dessus: les raïes noires ou brunes sont dans ces endroits d'une couleur beaucoup plus claire, & même quelquefois peu differente de celle du reste de la surface supérieure de la coquille. La cause de ce changement n'est pas difficile à trouver pour peu qu'on se souvienne que les cribles du colier qui laissent passer la liqueur propre à former ces raïes noires ou brunes, ont leur origine à quelque distance de l'extrémité du collier; d'où l'on voit que la premiere couche de coquille qui est tracée par l'extrémité de ce colier, doit être de couleur differente de celles des raïes. Mais comme l'accroissement de l'animal fait que les raïes du colier se trouvent sous cette premiere coquille, pendant qu'elle est encore très-mince, & par conséquent transparente, elle n'empêche point que la coquille qui est produite sous elle ne paroisse noire dans les endroits où elle l'est: mais lorsque l'animal a cessé de croître pendant quelque tems, il aug-

mente alors l'épaisseur de cette coquille produite par l'extrémité du colier ; de sorte que la coquille , que les raies du colier produisent sous cette dernière quand l'animal recommence à croître , se trouvant posée sous un morceau de coquille beaucoup plus épais & moins transparent , la couleur de ces raies y paroît beaucoup moins ; & ainsi elle doit être différente dans ces endroits de celle du reste de la raie.

La figure de certaines coquilles est ce qui pourroit paroître à présent de plus difficile à concilier avec la manière dont nous avons vû qu'elles croissent. C'est aussi la 2^e difficulté que je me suis proposé d'éclaircir. Ce qui me paroît y avoir de plus embarrassant pour accommoder l'accroissement des coquilles par *juxtaposition* avec leurs figures , peut se réduire à quatre choses. 1^o. Comment il se peut faire , que la courbure de certaines coquilles change en certains endroits , ou , pour m'expliquer plus clairement , comme peuvent être produites certaines coquilles dont la courbure , après s'être étendue quelque tems en dehors , revient sur elle-même. La figure 10^e est la section transversale d'une de ces sortes de coquilles. On y peut voir qu'après que cette coquille a tourné depuis *a* selon les lettres *ccc* jusques en *eee* , elle rebrousse chemin en *ddd*. Une simple apposition de parties sembleroit devoir continuer la même courbure. 2^o. Comment se produisent les cornes qu'on voit sur certaines coquilles. J'appelle cornes , certaines éminences qui sont sur quelques especes de coquilles , qui ressemblent assez par leur figure aux cornes de quelques animaux. On les voit ces éminences fig. 9^e & 10^e marquées par les lettres *ccc*. 3^o. De quelle manière peuvent être produites les canelures qui ornent la surface extérieure de certaines coquilles pendant que leur surface intérieure est polie ; car pourquoi ces coquilles sont-elles plus épaisses dans toute leur longueur en certains endroits que dans d'autres : telles sont celles des fig. 12^e, 13^e, 14^e. 4^o. Comment enfin se fait une cavité avec laquelle le corps de l'animal ne communique

390 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
point & qui regne tout du long de la rampe de la co-
quille. Elle est marquée fig. 2^e par la lettre *e* qui va la ren-
contrer par une ligne ponctuée.

Les coquilles des Limaçons terrestres nous fourniront encore une réponse à la premiere de ces difficultez. Le dernier degré d'accroissement de ces coquilles est une espece de rebord d'une ligne de largeur ou environ qui tourne en dehors au lieu que le reste de la coquille tourne en dedans : lorsque ce rebord est formé , ces coquilles ne croissent plus , c'est leur dernier periode. Ceux qui n'au-
roient point vû de coquille de Limaçons sans un pareil rebord , paroïtroient conclure avec beaucoup de fonde-
ment que ces coquilles ne peuvent être produites par une simple juxtaposition ; car elles devroient alors tourner dans un sens contraire à celui où elles tournent ; mais lorsque l'on considère des coquilles de Limaçons de differens âges , on ne leur veut point de tel rebord , ce qui fait éva-
nouïr toute la difficulté ; car la même chose arrive sans doute aux coquilles telle qu'est celle de la fig. 10^e. Ce re-
bord est de la même couleur que les raïes dans les petits Limaçons raïés (fig. 6.) aussi l'extremité du colier est-elle de même couleur que la peau qui forme les raïes , comme on peut le voir dans la fig. 5^e.

La courbure de la coquille ne peut changer , que celle du corps de l'animal qui lui sert de moule ne change : il est aisé d'imaginer des causes probables d'un tel change-
ment ; apparemment que dans l'accroissement des Lima-
çons , par exemple , il arrive que les fibres extérieures du colier ne croissent pas dans la même proportion que les intérieures , par conséquent qu'elles retirent le colier du Limaçon vers elles & l'obligent de se recourber en de-
hors.

Comme la difference de la longueur des fibres du co-
lier nous fait aisément comprendre de quelle maniere il arrive qu'il se recourbe en dehors ; aussi pourrons-nous voir assez clairement en faisant attention à la differente longueur de ses fibres , comment il peut se faire que le

corps de divers animaux tourne en spirale. Car si l'on conçoit que dès la production de ces animaux les fibres d'une certaine surface de leurs corps sont plus longues que celles de la surface qui lui est opposée ; il est clair que le corps se recourbera de manière que la surface dont les fibres sont les plus courtes formera le concave de la courbure , & la surface dont les fibres sont les plus longues formera le convexe. Ce qui suffira pour faire décrire au corps de l'animal une spirale, parce qu'il ne pourra croître qu'il ne se replie toujours ainsi sur lui-même , si les fibres plus longues & plus courtes croissent dans la même proportion. Il est vrai que dans le cas dont nous venons de parler , il décrirait seulement des spirales dont les différens tours seroient presque sur le même plan , & peu d'animaux ont leur coquille ou le corps qui leur sert de moule tourné ainsi : les différens tours des spirales de leurs corps ou de leurs coquilles sont sur différens plans ; mais avec une supposition de plus , on concevra également comment se forment ces dernières spirales. Outre les deux surfaces dont nous avons supposé que les fibres de l'une sont plus longues que les fibres de l'autre , il faut encore imaginer deux autres surfaces directement opposées , chacune desquelles est comprise entre les deux précédentes , mais plus petites qu'elles ; & que ces deux dernières surfaces sont aussi formées de telle sorte que les fibres de l'une sont toutes plus longues que les fibres correspondantes de l'autre. Ce qui obligera encore le corps de l'animal de s'incliner d'un côté , & qui fera former à son corps des spirales tracées sur différens plans.

S'il arrivoit aux Limaçons terrestres de produire un rebord semblable à celui qui est leur dernier terme d'accroissement après la formation de chaque quart de tour de spirale que fait leur coquille , & que leurs fibres extérieures se relâchant après ils produisissent un autre quart de coquille recourbé dans le premier sens , après quoi ils produisissent encore un nouveau rebord & ainsi de suite ; leur coquille seroit d'espace en espace marquée par de

pareils rebords qui lui feroient un petit ornement. C'est par un art semblable que sont formées diverses especes de coquilles de Limaçons marins qui paroissent merveilleusement travaillées. Ce sont divers petits rebords de la coquille disposez d'espaces en espaces qui l'ornent de maniere , qu'il semble que la Nature ait pris plaisir à la sculpter.

Les cornes que l'on voit sur plusieurs especes de coquilles, sont aussi produites par la même mécanique que le reste de la coquille. Certains tubercules charnus qui viennent sur le corps des poissons qui les habitent, leur servent de moules , & selon qu'il se forme plus ou moins de ces tubercules pendant que l'animal croît d'un tour de spirale, il y a plus ou moins de ces cornes dans le même tour ; elles sont creuses lorsque ces tubercules sont restés sur le corps de l'animal pendant tout le tems qu'il a vécu. Elles sont en partie creuses & en partie solides, lorsque ces tubercules ne se sont dissipés qu'en partie , & enfin absolument solides lorsque ces tubercules se sont absolument dissipés pendant la vie de l'animal.

On doit ramener à la même formation & à celle des rebords, certaines éminences beaucoup plus petites, que leur figure peut faire nommer assez proprement épines; elles sont ordinairement à la fin des termes d'accroissement sensibles de ces coquilles ; ce qu'on peut remarquer fig. 13^e.

Les cannelures qui paroissent sur la surface extérieure des coquilles pendant que leur surface intérieure est très-polie, ne donneront pas plus d'embarras à expliquer. Il me suffira de dire que toute l'extrémité du contour du corps de l'animal est cannelée ; aussi voit-on la coquille cannelée dans sa surface intérieure jusques à quelque distance de son extrémité. Mais comme le reste de la surface du corps de l'animal qui les habite est polie & molle, l'animal croissant, & la partie de son corps qui n'est pas cannelée venant à correspondre à celle de la coquille qui est cannelée, ce que cette partie fournit pour la coquille
sert

FIG. XII.
XIII.
XIV.

sert à boucher les cannelures intérieures, & la coquille se trouve seulement cannelée sur sa surface extérieure, excepté les seules premières lignes de la largeur de sa surface intérieure.

Il est une coquille de mer plate comme les huitres, assez semblable aux coquilles de S. Jacques, dont la formation paroîtroit difficile si nous ne venions de voir comment se font les cannelures des autres coquilles, elle est elle-même cannelée; mais les deux côtés des cannelures sont de petits canaux renfermés de coquilles de tous côtés, & percés depuis le sommet de la coquille jusques à son extrémité; il est aisé de voir comment se forment ces petits canaux; il suffit de concevoir que la première extrémité du corps du poisson est profondément cannelée, mais que le reste de son corps est très-uni & d'une substance assez dure pour ne pouvoir pas entrer dans la cannelure formée par l'extrémité; de sorte que le reste du corps produit seulement quelques feuilles de coquilles qui s'appliquent sur cette cannelure sans la boucher intérieurement; ainsi il doit rester un canal tel que nous venons de le dépeindre.

FIG. XIV.

FIG. XIV.

Avant d'expliquer enfin comment se forme la cavité qui regne tout du long de la rampe de certaines especes de coquilles, & avec laquelle le corps de l'animal ne communique point, il est bon de dire ce que nous entendons par rampe. Pour s'en faire une idée nette, il faut prendre garde, que lorsque le colier de l'animal trace les différens tours de spirale de coquille, que la partie de la surface extérieure qui est la plus proche de l'axe autour duquel il tourne, forme des spirales dont le diamètre ou la largeur est plus petite que celle des spirales décrites par d'autres points de ce colier; or on appelle rampe de la coquille cette partie qui est formée par les spirales de la moindre largeur ou des plus petits diamètres. La rampe des escaliers peut donner une idée sensible de celle des coquilles.

Pour développer à présent le mystère de la formation

du trou qui est le long de la rampe, il faut d'abord remarquer que la surface supérieure du colier de l'animal est de figure convexe & sa surface inférieure de figure concave; ce qui est évident puisque la première est posée sous le concave de la coquille, & la seconde sur le

Fig. II. convexe. Or la surface supérieure du colier étant toujours découverte par l'accroissement de l'animal, c'est aussi toujours elle qui forme la nouvelle coquille, & la partie de la surface supérieure de ce colier qui trace des spirales des plus petits diamètres, est aussi celle qui produit la rampe de la coquille. Si on veut à présent imaginer que le colier de l'animal s'avance & s'étend pour produire un nouveau morceau de coquille & par conséquent un nouveau morceau de la rampe; comme l'animal est entortillé dans toute sa coquille, on doit concevoir en même tems qu'une certaine partie de son corps s'avance & s'entoure autour d'une partie de la rampe à laquelle elle n'avoit pas encore été appliquée; cette partie qui s'applique ainsi à un nouvel endroit de la rampe est celle où la surface inférieure du colier fait un angle avec sa surface supérieure. Or si on imagine que cette partie de l'animal n'est ni assez courbe ni assez flexible pour se mouler parfaitement sur la partie de la rampe où elle s'est récemment appliquée, il est clair qu'il restera un petit espace vuide, renfermé entre la rampe, une portion du corps de l'animal, & un petit morceau de l'ancienne coquille qui se trouve entre cette portion du corps, & la rampe. La petite partie qui contribue à renfermer ce trou n'étant pas couverte de coquille, laissera échaper de la liqueur propre à la former, & par la production de ce nouveau petit morceau de coquille, le petit trou se trouvera entouré de tous côtés, & on voit bien que ce trou doit regner tout du long de la rampe, parce que la coquille ne peut croître sans qu'il se forme.

Si la petite partie qui aide à renfermer le trou, laisse échaper de la liqueur très-abondamment, alors il arrivera que le trou deviendra absolument solide étant bou-

ché par la nouvelle coquille. C'est aussi ce qui arrive à plusieurs coquilles de mer, dont les rampes sont beaucoup plus épaisses qu'elles ne sembleroient devoir être.

Si la Courbure de la rampe diminuë assez pour donner la facilité au corps de l'animal de se mouler dessus, lorsque cette coquille a fait un certain nombre de spires; il est clair qu'il ne doit plus alors se former de trou, & que celui qui est formé doit se boucher vers sa surface supérieure. C'est aussi ce qui arrive aux Limaçons qui sont parvenus à leur dernier degré d'accroissement; ou dont le rebord de la coquille est formé, ce qu'on peut voir dans la fig. 6^e. La petite coquille qui y est représentée a un rebord marqué *bbb*, & le trou qui paroîtroit en *e* si elle n'étoit pas parvenue à son terme d'accroissement, est bouché à cause qu'elle y est parvenue. La même chose arrive aux gros Limaçons, & on ne voit les trous marqués *e* (fig. 2^e. & 3^e.) sur la rampe de leur coquille, que parce qu'ils n'étoient pas parvenus à leur dernier degré d'accroissement, sans quoi ces trous seroient couverts par-dessus comme dans la fig. 6^e.

Lorsque le colier de l'animal trace les différentes lignes spirales de la coquille autour d'un petit cône, il est clair qu'il doit rester un petit espace vuide de figure conique au milieu de la coquille, c'est-à-dire qu'on doit voir un petit espace vuide autour duquel sont posés les divers tours de la coquille. Plusieurs especes de coquilles de mer, (telle est celle de la fig. 7.) & diverses especes de Limaçons terrestres ont une pareille couverture coniques.

Si le sommet du cône autour duquel le colier de l'animal tourne est à l'origine de la coquille, on voit bien que ce trou doit se terminer à la pointe de la coquille qui le bouche en cet endroit; telle est le trou des coquilles de Limaçon dont je viens de parler & de celui de la fig. 7. il finit où la coquille commence; mais si le sommet de ce cône est par-delà l'origine de la coquille, elle doit être entierement percée; plusieurs coquilles de mer sont faites de cette dernière manière.

Enfin si l'on conçoit que le colier de l'animal tourne autour d'un solide de figure courbe au lieu du cône dont nous avons parlé cy-dessus, & que le sommet de ce solide soit à l'origine de la coquille, il est encore évident qu'il se formera dans la coquille un trou de la figure de ce solide.

Si l'animal qui habite une pareille coquille, forme tout du long de la rampe de cette coquille un trou tel que les gros Limaçons des jardins en forment un le long de la leur, comme nous l'avons vû cy-dessus; cette coquille sera percée de deux trous differens dans toute sa longueur, & aura deux longues ouvertures avec lesquelles le corps de l'animal ne communiquera point.

Ces deux trous peuvent aussi quelquefois être produits de la même manière que celui qui regne le long de la rampe, il n'est besoin pour le concevoir que d'imaginer que la partie qui occupe ensuite la place de celle qui a formé le trou, parce qu'elle ne pouvoit pas se mouler sur la rampe, que la partie, dis-je, du corps de l'animal qui succède à celle-ci, ne peut pas exactement se mouler sur la coquille qu'elle a produite.

Un long ouvrage suffiroit à peine pour épuiser tout ce que les figures des coquilles ont de singulier; mais je me suis prescrit des bornes plus étroites, & je l'ai fait d'autant plus volontiers qu'on peut toujours amener la formation de ce qu'elles ont de plus extraordinaire à celle de quelques-unes des choses dont nous venons de parler.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA Figure 1^{re} représente une coquille de gros Limaçon de jardin qu'on a cassée en deux endroits differens. Les lettres *aaa* marquent le contour des trous qu'on lui a faits. On y voit ces trous bouchés par de nouveaux morceaux de coquille posés immédiatement sous l'ancienne. Il est à remarquer que cette nouvelle coquille n'est pas colorée comme l'ancienne, qu'elle n'a pas aussi diverses

petites lignes, qu'on peut appeller, quoiqu'improprement à cause de leur figure, fibres de la coquille, lesquelles fibres sont distinctement marquées sur l'ancienne.

Fig. 2^e. Les lettres *aaa* marquent le contour d'une ouverture faite à la coquille. *i* est un morceau de peau de cannepin, appelée vulgairement Peau de poule, qui bouche cette ouverture cette peau est collée à la surface intérieure de la coquille. *b* représente la nouvelle coquille qui s'est formée sur la surface du cannepin qui touchoit le corps du Limaçon.

d d est le contour de l'ouverture de la coquille qui n'est point rebordé comme celui de la fig. 1^{re}.

e marque par une ligne ponctuée l'ouverture d'un trou qui regne tout du long de la rampe de la coquille jusques à son sommet, ou sa pointe *p*.

cc est un des termes notables de l'accroissement de la coquille. On y voit les raies presque interrompues ou faiblement tracées.

Fig. 3^e. est la coquille d'un gros Limaçon de jardin, dont le contour de l'ouverture alloit jusques en *a*, mais qu'on a cassée de maniere en suivant tout le tour de cette ouverture qu'elle a été terminée par les lettres *bcc*. *ccc* est un morceau de cannepin, qui paroît ici collé sur la surface extérieure de la coquille, mais qu'on doit aussi concevoir collé sur la surface intérieure de la même coquille, de façon qu'il envelope tout le bord de la coquille, qui est par conséquent renfermé entre les deux extrémités de ce morceau de cannepin. *edddq* marquent la nouvelle coquille qui a été produite, qui a été séparée de l'ancienne par l'épaisseur de la peau du cannepin sur laquelle elle est appliquée.

Fig. 4^e. représente la coquille d'un petit Limaçon, qui est sorti de son œuf depuis peu de tems.

Fig. 5^e. est celle d'un petit Limaçon de jardin qui porte une coquille, sur laquelle sont peinte cinq raies noires ou brunes; les intervalles qui sont entre ces raies sont de couleur citron. Ce Limaçon paroît dépeuplé d'une partie

de sa coquille qui alloit autrefois jusques en *aaa*, & qui est à présent terminée en *bb*, ce qu'on a fait à dessein de faire voir le colier de ce Limaçon, qui est aussi lui-même marqué de cinq raies *cccc* de couleur brune, mais moins foncée que celle de la coquille : l'origine de ces raies est à quelque petite distance de l'extrémité du colier ; & elles n'ont ordinairement qu'une ligne ou deux de longueur. L'espace qui est entre ces raies, & celui qui est entre leur extrémité la plus proche du bord du colier & ce même bord de colier *aa*, est de couleur beaucoup plus claire que celle des raies, mais aussi plus brune que celle du reste de la peau, qui est depuis l'extrémité des raies *cccc* la plus éloignée de *aaa* jusques au sommet *p* de la coquille.

Le bord *aaa* du colier de l'animal est de couleur un peu brune.

Fig. 6^e. est aussi une coquille raïée, mais qui avoit seulement trois raies. On a fait deux trous à cette coquille, dont le plus éloigné du colier est marqué *a*, & le plus proche *dcc*. La coquille qui s'est formée pour boucher le trou *a* est de couleur différente de celle des raies & de celle de leurs intervalles. Mais celle qui a bouché le trou *dcc* est de même couleur que l'ancienne ; en sorte que les raies noires sont continuées en *cc*, & que *d* est de couleur citron. Ce dernier trou est pourtant peint ici un peu moins près qu'il ne devrait être du bord de la coquille.

bbb marquent le rebord de cette coquille, qui étoit parvenu à son dernier degré d'accroissement. Ce rebord est de couleur brune ; aussi a-t-on vû (fig. 5^e) que l'extrémité du bord du colier de l'animal est brun. L'origine des raies de la coquille n'est point à ce rebord, comme l'origine des raies du colier (fig. précédente) n'est point à l'extrémité de ce colier.

e marque la coquille qui bouche alors la cavité qui est le long de la rampe.

Fig. 7^e. représente une coquille appelée la Veuve ; elle est marquée de diverses taches noires, de figures irréguli-

lières, & posées irrégulièrement sur un fond blanc.

On voit en *a* un trou qui va jusques au sommet de la coquille. Ce trou est formé bien différemment de celui des fig. 2^e & 7^e.

Fig. 8^e. est une espece de turbinites, sur laquelle on voit divers petits quarrés qui sont de couleur rouge, disposés dans une proportion assez réguliere.

Fig. 9^e. est la coupe d'une coquille, dont la queue de l'animal a été obligée d'abandonner les premiers tours, parce qu'ils sont devenus entierement solides. Les lettres *a a a a a* marquent les espaces qui étoient autrefois occupés par le corps de l'animal, & qui se sont remplis dans la suite. On voit aussi qu'une partie de l'espace *e b* est devenue solide, sçavoir celle qui est marquée *e*, le corps de l'animal n'occupoit plus que les espaces *bb*, *ddd d d d*, &c.

cccc sont de ces éminences de coquilles que j'ai appelées cornes, ou des coupes de ces éminences.

Fig. 10^e. est la coupe transversale d'une coquille, qui après avoir fait un certain nombre de tours de spires jusques en *cccc* dans un sens, rebrousse chemin en *ddd*.

a a sont deux trous qui sont dans toute la longueur de la coquille, avec lesquels le corps de l'animal ne communique pas, qui occupe les espaces *bbb* &c.

ccc sont des éminences ou petites cornes.

Fig. 11^e. est une espece de turbinites qui paroît artistement travaillée. Cet ornement lui vient de divers rebords tels que le dernier *a a a* disposés d'espace en espace.

Fig. 12^e. a aussi divers rebords comme la précédente. Mais on peut remarquer de plus que chacun de ces rebords est cannelé.

bb est la surface intérieure de la coquille, qui est polie, quoique les rebords soient cannelés.

Fig. 13^e. est une coquille dont la surface extérieure est cannelée, quoique sa surface intérieure soit polie.

cc, *ccc*, *ddd*, sont trois termes d'accroissemens très-sensibles, dont le dernier *dddd* est orné de diverses petites éminences que j'ai nommées points à cause de leur figure.

Fig. 14^e. est aussi une coquille cannelée, mais qui a cela de particulier, que chacun des côtés des cannelures sont eux-mêmes de petits canaux, c'est-à-dire qu'il reste des espaces vuides au milieu de ces côtés dans toute leur longueur, & que ces trous sont entourés de coquille de maniere que le corps de l'animal n'entre point dedans. On a ouvert un de ces canaux marqués *b*, *dd*, *aa*, *cc*. On voit que la surface intérieure *dd*, qui est appliquée sur le corps de l'animal, se termine en *aa*, c'est-à-dire que ces longs trous ne sont pas renfermés depuis *aa* jusques à l'extrémité *cc* dans laquelle le corps de l'animal entre.

C O N J E C T U R E S

ET REFLEXIONS.

Sur la matiere du Feu ou de la Lumiere.

PAR M. LEMERY le fils.

1759.
13. Novemb.

LA matiere du Feu est le premier & le plus puissant dissolvant des corps terrestres, nous n'avons aucun agent qui y pénétre aussi profondément, & qui en dissuise aussi parfaitement les substances essentielles.

C'est donc à cette matière que le Chimiste est redevable des secrets qu'il arrache à la Nature, & qu'elle ne lui reveleroit jamais, si elle n'étoit forcée, & mise pour ainsi dire, à la question par un dissolvant aussi actif.

Une matiere qui contribué si fort à nous faire connoître les autres corps, mérite bien de nous occuper à son tour, & d'exciter notre curiosité sur les propriétés qui lui sont particulieres.

On ne peut disconvenir qu'elle ne soit le principe véritable de la chaleur, de la lumiere, & même de la fluidité ou de la fusion de plusieurs corps terrestres, qui sans le mélange & l'action de cette matiere, conserveroient toujours une forme solide. Mais elle n'est pas toujours assez

Fig. 2.

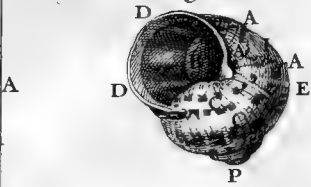


Fig. 3.

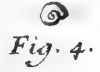


Fig. 5.

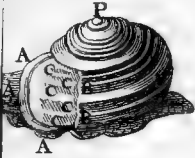


Fig. 6.

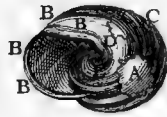


Fig. 7.



Fig. 8.



Fig. 1^{re}



Fig. 2

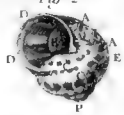


Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6



Fig. 7

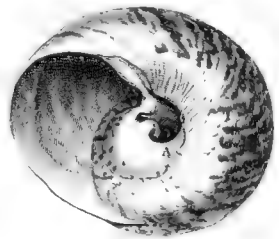


Fig. 8



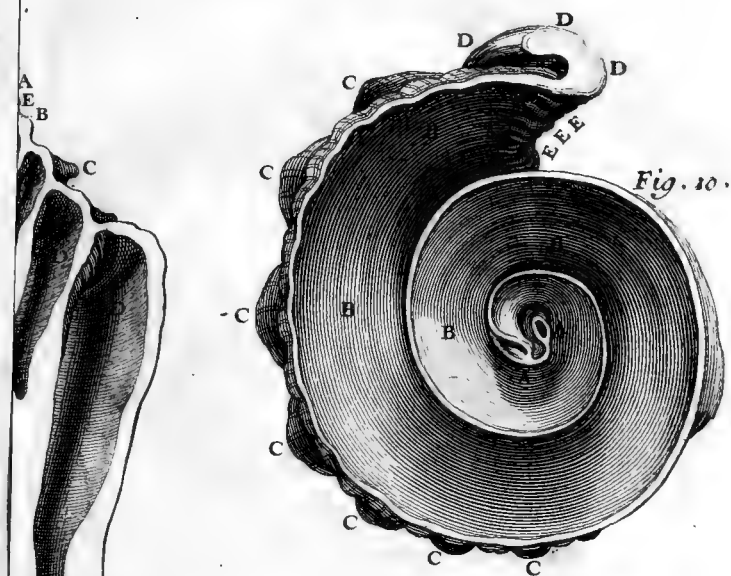


Fig. 13.

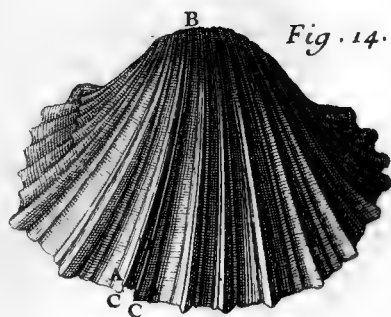


Fig. 9.

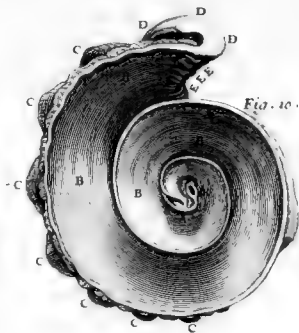


Fig. 10.



Fig. 11.



Fig. 12.

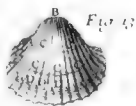


Fig. 13.

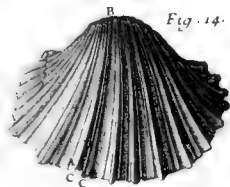


Fig. 14.

assez abondante, ou elle ne trouve pas toujours des corps qui lui résistent assez peu pour les mettre si facilement en fusion; on remarque même souvent qu'au lieu de les fondre, ou de les entretenir dans la fluidité qu'elle leur avoit d'abord communiquée, elle s'y engage & s'y enveloppe de maniere qu'elle y demeure emprisonnée, & qu'elle n'en sort que quand une cause étrangere vient à son secours, & ouvre exterieurement les cellules qui la retenoient.

Il y a encore deux circonstances remarquables dans cette matiere enfermée; c'est 1^o. qu'elle augmente quelquefois très-sensiblement la pesanteur du corps qui la contient; & en second lieu, qu'elle conserve pendant tout le tems de sa captivité, les proprietéz particulieres de matiere de feu, dont elle donne des marques évidentes quand on la met en état de s'échaper de sa prison, & d'aller faire son impression sur quelque autre corps.

Tout le monde ne convient pas de ce que je viens d'attribuer à la matiere du feu. On prétend même que ce sentiment répugne à l'idée qu'on doit avoir de ce qui constituë la nature propre de cette matiere; cependant il est appuyé sur tant & de si solides experiences que plusieurs Chimistes du premier ordre n'ont pû se dispenser de l'adopter. Pour donner un nouveau jour à ce sentiment, & avoir un plus grand droit de le mettre en œuvre pour l'intelligence de quelques phénomènes que j'entreprends d'expliquer dans ce Memoire-cy & dans d'autres; je vais en rapportant les expériences qui lui servent de fondement, répondre aux objections par lesquelles on tâche de le détruire, & qui malgré toute la vrai-semblance que les experiences lui donnent, ont encore assez de force pour faire douter de sa verité.

Tout le monde sçait que quand on expose au feu plusieurs matieres métalliques telles que le Régule d'Antimoine, le Plomb, l'Etain, & même le Mercure, quoique plusieurs de ces matieres perdent beaucoup de leur propre substance qui s'échape en l'air pendant l'operation,

bien loin de peser beaucoup moins qu'auparavant, ce qui sembleroit devoir arriver, néanmoins elles pesent beaucoup davantage. On demande d'où peut provenir cette augmentation de poids, & la matiere du feu aiant réduit ces corps dans l'état de la calcination où nous les voïons, ne doit-on pas aussi lui attribuer la pesanteur nouvelle qu'ils acquierent?

Peut-être me dira-t-on, que cette augmentation de poids vient des acides du bois ou du charbon qui se sont introduits dans l'intérieur de ses corps à la faveur des parties de feu, & qui y sont restez pendant que les parties de feu s'en sont échappées.

Mais il est bien difficile que ces acides parviennent en assez grande quantité jusqu'au corps mis en calcination, pour y produire toute l'augmentation de poids qu'on y découvre ensuite, & qui va quelquefois à un dixième comme M. Homberg l'a remarqué. Et en effet avant que ces acides atteignent la matiere exposée au feu, il faut qu'ils traversent les parois du vaisseau qui contient cette matiere, & qui certainement ne donne pas un passage libre à ces acides, puisque les vaisseaux dont on a coutume de se servir dans ces sortes d'operations pourroient contenir les plus forts acides sans les laisser échaper au travers de leurs pores. Si donc malgré la difficulté du passage quelques acides du bois trouvent le secret de traverser à la faveur des parties de feu, les pores dont il s'agit, cette même difficulté est une preuve, qu'ils passent en petit nombre, & même que la plus grande partie de ces acides est arrêtée, & retenue par les parties même du vaisseau qui ordinairement est d'une nature à les pouvoir absorber. La matiere du feu au contraire passant librement & en abondance au travers de toute sorte de vaisseaux comme l'expérience le démontre; c'est particulièrement sur son compte que doit être mise l'augmentation dont il s'agit, & qui étant souvent fort considérable, suppose une cause abondante, & telle que la seule matiere du feu le peut être en cette occasion. Enfin ce qui

prouve encore plus clairement que cette matiere peut augmenter le poids de plusieurs corps en s'y engageant , c'est que si on expose ces mêmes corps aux rayons du Soleil réunis par le verre ardent, leur pesanteur n'augmente pas moins que s'ils eussent été exposez au feu ordinaire ; or en ce cas-cy on ne peut point avoir recours aux acides du bois & du charbon, & quelque supposition que l'on fasse, il est bien difficile d'ôter à la matiere du feu, la part qu'elle a dans ce phénomène.

Il ne suffit pas d'avoir prouvé que la matiere du feu s'insinuë dans certains corps, & en augmente le poids, il s'agit encore de faire voir que cette matiere en se logeant dans ces corps, ne change point de nature, & y conserve toujours les proprieté particuliéres qui la constituent matiere de feu. La preuve de ce second article me paroît être une confirmation du premier ; car si ce qui s'introduit dans les corps pendant leur calcination, est une matiere véritable de feu, dès qu'on concevra évidemment que cette matiere s'y engage effectivement, & y réside avec les mêmes proprieté qu'elle avoit avant son emprisonnement, on accordera aisément ensuite que c'est elle qui fait la principale augmentation de leurs poids.

La matiere du feu qui s'est engagée dans les corps métalliques, y est si fort cachée & si bien retenue, qu'elle ne se peut manifester à nous bien sensiblement par aucuns des signes propres qui la font reconnoître, & qui la distinguent de toute autre matiere. La raison en est que pour se faire appercevoir, il faudroit qu'elle forçât les portes de sa prison, & qu'elle vînt faire sur quelqu'autre corps l'impression dont elle est capable. Mais elle est retenue par des cellules si fortes & si solides, qu'il ne lui faut pas moins qu'un feu de fusion pour détruire ces cellules, & pour dégager les parties du feu qui y étoient enfermées, & qui se confondant avec celles qui les ont tirées de captivité, ne permettent pas au Physicien de vérifier leur nature particulière, & si elles sont effectivement des parties de feu.

Il n'en est pas de même de celles qui se sont insinuées dans les corps pierreux ou salins par le secours de la calcination : car ces corps étant beaucoup moins solides, l'eau suffit pour ouvrir extérieurement à la matiere du feu, des issues libres ; & cela parce qu'en choquant rudement les parties de ces corps, non seulement elle vient à bout d'en déranger l'union, mais elle les réduit encore en une poussiere très-fine qui devient propre à être entièrement suspendue dans le liquide, si les corps sont salins ; ou qui s'y soutient en partie si les corps sont pierreux. L'eau de chaux, par exemple, n'est dessicative & absorbante que par les parties pierreuses dont elle s'est chargée, & la chaux détrempée par l'eau, n'est si convenable dans les ouvrages de maçonnerie où on l'employe, que parce que ses parties ayant été fort atténuées par le liquide, elles se réunissent ensuite si intimement les unes aux autres, qu'elles forment ensemble une masse compacte & durable.

Si donc l'eau désunit si bien toutes les parties des corps salins & pierreux calcinez, & si elle les broye si subtilement ; supposé qu'il y ait de la matiere de feu engagée, & resserrée entre ces parties, elle doit s'échaper à la faveur de cette désunion ; cet aussi ce qu'elle fait ; car elle se rend dans le liquide aqueux à qui elle doit sa délivrance, & qui en est plus ou moins échauffé suivant la quantité de cette matiere.

Il arrive encore un effet considerable dans quelques-uns de ces corps calcinez ; c'est que comme ils sont souvent une très-ample provision de matiere de feu, & que la moindre cause est capable de la leur faire perdre : quand on les applique sur les chairs, les parties de feu qui s'échappent de ces corps & qui s'introduisent dans le tissu de la partie, la brûlent & y font un escare qui ne differe guere que du plus au moins, de la brûlure produite par un charbon ardent ou par un fer chaud.

La facilité qu'il y a d'expliquer les effets qui viennent d'être marquez, en supposant des parties de feu toujours

agissantes, donne un grand préjugé en faveur de la supposition ; mais ce qui la rend parfaitement solide, c'est l'examen de la maniere dont les corps calcinez deviennent propres aux effets qu'on leur voit faire. Ils n'acquiescent ces proprieté qu'en conséquence de leur calcination, ou de leur exposition à la matiere même du feu ; & ce qui est à remarquer, ces proprieté sont les mêmes que celles du feu, cela étant, y a-t-il rien de plus vrai-semblable & de plus naturel, que d'attribuer ces effets aux parties mêmes du feu qui ont été retenues dans ces corps, & qui trouvant ensuite le moyen d'en sortir, vont faire leur impression sur ceux qui s'offrent à leur passage.

Ajoutez à tout ce qui vient d'être dit, qu'il est impossible par tout autre supposition de rendre aucune raison satisfaisante des phénomènes dont il s'agit. Car si l'on prend un exemple particulier, quand la chaux plongée dans l'eau échauffe ce liquide, & le fait bouillir à peu près comme feroit du feu, attribuera-t-on cet effet à quelques principes fermentatifs contenus dans la chaux, & qui sont mis en action par l'eau ; mais on ne trouve dans la chaux qu'une pure terre dégarnie de tous sels depuis sa calcination, & dont il semble que le feu ait chassé tout autre corps pour en occuper la place. Or comment une pure terre détremée par l'eau, viendra-t-elle à bout de l'échauffer ? c'est ce qu'il est impossible de concevoir sans la supposition des parties de feu. Pourquoi donc cette supposition malgré les preuves déjà alleguées trouve-t-elle encore des contradicteurs ? Le voici.

Les parties de feu, dit-on, ne sont telles qu'à cause du mouvement rapide dont elles sont agitées. Or quand on passeroit qu'elles peuvent-être engagées dans le tissu des corps grossiers, elles y perdrieroient bientôt le mouvement qu'elles y auroient apporté, & cessant par-là d'être parties de feu, elles deviendroient incapables des effets que je leur attribue. Par conséquent il faut avoir recours à quelque autre cause pour expliquer ces effets.

Je répons que la matiere de feu doit être regardée

406 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
comme un fluide d'une certaine nature, & qui a des propriétés particulieres qui le distinguent de tout autre fluide. Je consens que ces propriétés dépendent de la rapidité avec laquelle toutes les parties de ce fluide se meuvent; mais je crois aussi que la figure de chacune de ces parties doit nécessairement entrer en ligne de compte. Quoiqu'il en soit, quand ce fluide a été arrêté dans le tissu de quelque matiere grossiere, comme il n'est pas de pire condition que tous les autres fluides que nous connoissons, il doit avoir le même sort. L'eau par exemple, est un liquide dont la fluidité, comme il sera dit dans la suite, dépend de la matiere du feu, & par conséquent dont la fluidité est bien inferieure à celle de cette matiere. Cependant l'eau s'enferme tous les jours dans une infinité de corps, sans qu'on puisse dire qu'elle y perde sa fluidité, ni aucune des propriétés qui la caractérisent. Enfin quand on l'en fait sortir, elle se retrouve avec ces mêmes propriétés essentielles qui ne l'ont pas quittée un moment. A plus forte raison notre matiere doit-elle dans la même situation conserver aussi les siennes, & se retrouver après sa sortie, telle qu'elle étoit auparavant.

Mais, me dira-on, il ne s'agit pas icy de comparaison, il s'agit de faire voir sans cela, comment les parties de feu retenues dans un corps grossier y peuvent conserver leur mouvement; c'est aussi ce qui sera expliqué dans la suite après avoir satisfait à l'objection suivante, dont la réponse conduit naturellement à cet éclaircissement.

On n'a pas de peine à concevoir qu'un fluide grossier, & dont les parties sont médiocrement agitées, soit arrêté dans le tissu d'un corps solide. Mais on ne conçoit pas de même qu'une matiere aussi subtile & aussi active que l'est celle du feu, ne trouve pas dans le corps où elle s'est introduite, quelque issue pour s'échaper, ou qu'elle ne s'en fasse pas une par la rapidité de son mouvement.

Je répons, que pour ce qui regarde l'activité de la matiere du feu, elle est certainement très-grande, & que

quand cette matiere se trouve en une quantité suffisante pour forcer la résistance d'un corps solide, elle se fait jour au travers en rompant l'union de toutes ses parties; mais elle n'est pas toujours assez abondante pour cela; & alors sa force étant inférieure ou égale à la résistance du corps solide qui l'enveloppe, l'activité & les efforts de cette matiere demeurent inutiles, s'ils ne sont aidez & secourus par quelque cause étrangere qui agisse extérieurement.

Quant à la finesse des parties de cette matiere, on ne peut disconvenir qu'elle ne soit très-considérable; mais il s'agit de sçavoir, si les pores des cellules dans lesquelles je suppose les parties de feu enfermées, ne sont pas encore plus petits que ces parties; comme nous n'avons point de microscopes assez fins, ni de mesures assez exactes pour vérifier ce qui en est, & que d'ailleurs il n'y a aucun inconvenient à supposer les pores dont il s'agit, plus étroits que les parties de feu ne sont fines & déliées; j'adopte d'autant plus volontiers cette supposition, qu'ayant d'ailleurs de fortes preuves que la matiere de feu peut être retenue dans le tissu de plusieurs corps, cette supposition y convient parfaitement.

Au reste je ne prétens pas que les pores, au travers desquels la matiere de la lumiere ne sçauroit passer, soient impraticables à toute autre matiere; car quelques déliées que soient les parties de feu, j'en puis concevoir encore de cent fois plus subtiles qui ne trouvent aucuns pores impénétrables, & dont la destination est peut-être de remplir tous les vuides de l'univers; mais quoyqu'elles surpassent en finesse les parties de la matiere du feu, je ne les crois pas pour cela aussi propres que cette matiere, aux effets dont elle est reconnue capable. Voici pourquoi.

Une des principales proprietez de cette matiere, c'est de dissoudre & de mettre en fusion les corps terrestres, ce qu'elle fait en divisant & désunissant toutes leurs parties, & donnant à chacune l'agitation necessaire, pour que le tout ait une forme de liquide; mais la matiere subtile trouve un passage si libre au travers de tous les corps,

qu'elle s'échape par les issues qui lui sont ouvertes de tous côtez, sans faire une impression aussi vive sur ces corps, que la matiere du feu, qui n'étant pas aussi subtile que l'autre, & par conséquent ne pouvant enfler les mêmes routes, se trouve contrainte pour se faire un passage de forcer les obstacles qui s'y opposent, & par-là de détruire le tissu naturel de ces corps.

Je pourrois fortifier ce raisonnement de plusieurs exemples sensibles; en voici un entr'autres qui vient assez bien au sujet. Si l'on tend un rets dans une riviere à l'exposition de son courant, les parties de l'eau passant facilement par les mailles ou les trous de ce rets ne l'endommageront point ou peu; mais s'il vient un corps qui ne puisse pas traverser ces mailles, ou il s'arrêtera-là, ou il rompra le rets pour se faire un passage. C'est aussi ce qui arrive à la matiere de la lumiere, qui suivant son abondance & sa force, s'embarasse dans les corps ou les dissout.

Pour concevoir à présent sans le secours de comparaison, comment la matiere du feu enfermée dans les cellules d'un corps solide peut y conserver son mouvement, il n'y a qu'à faire attention qu'une matiere plus subtile parcourt continuellement tous les pores de ces cellules, & par conséquent entretient l'agitation de la matiere qui y réside.

Monsieur Saurin nous a fait voir qu'on pouvoit supposer avec assurance & sans crainte de contradiction bien fondée, que la matiere propre des corps les plus solides & les plus pesans, ne faisoit pas la centmillième partie de leur volume. Sans prendre cette supposition à la rigueur, & en relâchant beaucoup de son étendue, les corps solides donneront toujours passage & habitation à une grande quantité de matiere étrangere; & en ce cas la matiere plus subtile dont il a été parlé, y passant bien plus abondamment qu'on ne se le seroit imaginé, celle du feu quoiqu'emprisonnée, ne manquera pas de causes pour entretenir sa fluidité & son mouvement.

Au reste, quand je serois obligé d'accorder que les parties de feu engagées dans un corps solide n'y pourroient pas toujours conserver leur mouvement, il ne s'ensuivroit pas de-là qu'elles y perdroient aussi leur nature propre de matiere de feu; car ce n'est pas seulement à la rapidité de leur mouvement qu'elles doivent les proprietéz qui leur sont particulieres, c'est encore à leur figure & à leur ténuité. Par exemple, quand les parties d'eau sont gélées, elles sont en repos; cependant on ne peut pas dire qu'elles soient en cet état essentiellement différentes de ce qu'elles étoient auparavant, puisque la moindre agitation, ou la moindre chaleur les remet en possession des effets auxquels la figure particuliere qu'elles conservent, les rend toujours propres, & dont tout autre corps exposé à la même chaleur, ne seroit jamais capable.

On sçait encore que le sel est la matiere des saveurs, & qu'il a de certaines proprietéz qui sont dûs à la figure propre de ses parties; cependant il n'agit que quand il est dissous, ou ce qui est la même chose quand il nage dans un liquide qui tient ses parties en mouvement. Cela étant, dira-t-on que quand il n'est pas dissous, il n'est plus la matiere des saveurs, & qu'il n'a plus les proprietéz qui caractérisent le sel en general; il faudroit pour cela que ses parties eussent encore perdu leur figure essentielle, qui est la source principale de ces proprietéz.

Par la même raison, quand il seroit vrai que l'engagement des parties de feu dans un corps solide leur enleveroit quelquefois leur mouvement, elles seroient alors dans le même cas que l'eau gelée, & le sel en repos; c'est-à-dire qu'elles pourroient encore en regagnant du mouvement, reproduire leurs premiers effets.

On me demandera peut-être comment la matiere du feu, qui a bien pû penetrer dans un corps solide, n'en peut pas sortir de la même maniere, sans avoir besoin d'une cause étrangere qui facilite son évafion; car elle n'y est entrée, que parce qu'elle a trouvé des voies assez ouvertes pour cela; pourquoi donc ne ressort-elle pas

410 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
par les mêmes issues, ou par d'autres d'une égale grandeur.

Je répons, que tant que le corps est exposé au feu, cet agent ouvré & dilate ses pores, & y fait passer librement & continuellement plusieurs de ses parties qui en peuvent aussi ressortir ensuite avec la même liberté qu'elles y étoient entrées; & cela parce que la dilatation des pores persiste toujours; mais dès que le feu cesse d'agir la cause de la dilatation cessant aussi, les parties du corps qui avoient été soulevées, s'affaissent, & les pores se rétablissent dans leur premier état; alors les parties de feu qui s'étoient introduites dans les cellules de ce corps, s'y trouvent tout d'un coup emprisonnées, & n'en peuvent plus sortir sans une nouvelle dilatation de pores ou une fusion parfaite du corps qui les retient.

On ne doit pas s'étonner de ce que les corps qui par la calcination ont fait une provision abondante de matiere de feu, ne donnent aucun sentiment de chaleur quand on les touche; car comme les parties de feu qu'ils renferment intérieurement, ne peuvent parvenir jusqu'à la main appliquée sur la surface de ces corps, elles ne se font pas plus appercevoir par cette épreuve que si elles n'y étoient pas contenuës; de même que le sel n'est sensible au goût, que quand il est assez dégagé de tout autre corps, pour frapper immédiatement l'organe de cette sensation. Par conséquent quand les corps nouvellement retirez du feu font une impression si vive de chaleur, ce n'est pas par les parties de feu qu'ils tiennent emprisonnées; mais par celles qui ont trouvé des issues assez ouvertes pour s'échapper au dehors. Car on peut admettre dans les corps deux sortes de pores, les uns qui naturellement sont assez grands pour donner en tout tems un passage libre à la matiere du feu, & les autres qui ne lui en donnent que quand ils ont été dilatez par la chaleur; comme je l'ai déjà remarqué.

Enfin on me demandera peut-être encore pourquoy la matiere du feu enfermée dans les corps salins & pierreux

ne dérange pas les parties qui s'opposent à sa sortie, puisqu'il est certain que l'eau qui a bien moins d'activité que cette matière, en vient bien à bout.

Je réponds, que si la quantité de la matière de la lumière contenue dans la chaux étoit aussi grande que celle de l'eau qu'on verse dessus pour en faire sortir cette matière, elle n'auroit peut-être pas besoin de secours étranger pour s'échapper, & elle seroit par elle-même plus que suffisante pour cela; mais toute active qu'elle est elle se peut trouver en si petite quantité par rapport aux parties de l'eau, que ces parties auront plus ou autant d'action qu'elle pour de certains effets; or il est certain qu'on dégage des corps dont il s'agit, bien moins de parties de feu qu'on n'emploie de parties d'eau pour les dégager.

De plus pour ce qui regarde les sels fixes alkalis qui sont ceux qui contiennent des parties de feu, on sçait que l'eau les dissout avec une promptitude étonnante, & que le feu le plus fort auroit bien de la peine à les mettre aussi promptement en fusion; si donc l'eau désunit si bien toutes les parties de ces sels, elle donnera facilement par-là, comme il a déjà été dit, une issue libre à la matière de la lumière engagée & retenue entre ces parties; & s'il ne faut pas moins qu'un feu de fusion pour produire la même désunion ou le même dérangement dans ces sels, comme la matière de lumière qui y est contenue, n'est pas à beaucoup près aussi abondante, & par conséquent aussi puissante que celle d'un feu de fusion, il est clair qu'elle agira en cette occasion avec moins d'efficacité que l'eau.

Enfin il ne faut pas s'imaginer que ce liquide versé sur la chaux & sur les sels alkalis, ouvre tout seul un passage à la matière de la lumière; & en effet comme on peut supposer avec toute la vrai-semblance possible, que cette matière conserve toujours son mouvement dans l'intérieur de ces corps, il y a lieu de croire qu'elle travaille continuellement, & au dedans de sa prison à forcer les obstacles qui s'opposent à sa sortie, & que si malgré ses efforts

412 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
elle ne peut parvenir à son élargissement sans un secours
extérieur : du moins contribué-t-elle beaucoup à faciliter
& à assurer l'effet de ce secours.

Le Soleil ne paroît être autre chose qu'un amas très-considérable de matiere de feu ou de lumiere , ou si l'on veut une grande flamme qui ne differe point essentiellement de la nôtre , puisque l'une & l'autre produisent parfaitement les mêmes effets ; mais comme cet astre se trouve très-éloigné de nous , il ne peut agir sur les corps terrestres que par deux voies , sçavoir , ou par des émanations & des échapées de sa substance , qui partant du lieu de leur demeure naturelle , viennent se rendre jusqu'à nous. Mais cette hypothese étant sujette à quelques inconveniens , ou plutôt ne suffisant pas pour l'intelligence de certains phénomènes , on peut encore supposer des traînées abondantes de matiere de lumiere , qui sont toutes placées dans les interstices de la grande masse du fluide interposé entre le Soleil & nous , & ces traînées agissent fortement sur les corps terrestres quand elles sont pressées & poussées vigoureusement & en abondance vers ces corps par la présence du Soleil. On pourroit les regarder chacune comme des especes de petits Soleils prolongez , mais qui dépendent du grand comme de la source de leur mouvement ou de leur action sur les corps terrestres.

Ces traînées qui forment les rayons lumineux , & qui sont les agents immediats de la lumiere , ne different point quant à leur matiere de la substance même du Soleil , & non-seulement il est inutile de le supposer , mais l'experience & l'examen y sont encore formellement opposés. Et en effet le Soleil étant une flamme qui produit les mêmes effets que la nôtre , on peut raisonner de la maniere dont il agit sur les corps terrestres par celle dont nous remarquons que nôtre flamme y agit aussi. Or il est certain que quand on plonge ces corps dans la flamme même , c'est la propre matiere de cet agent , qui sans aucun autre secours les penetre , les échaufe , & les modifie

différemment suivant leur nature particulière ; & quand on présente ces corps au feu sans qu'ils touchent à la flamme , les impressions qu'ils en reçoivent ne diffèrent point essentiellement de celles que la flamme même appliquée immédiatement sur ces corps auroit produire ; elle n'en diffère que du plus au moins , en sorte qu'un corps sur lequel une petite flamme agiroit immédiatement , n'en seroit pas plus échauffé ni autrement altéré , que si on le plaçoit à une distance assez considérable d'une grande flamme.

Tout cela marque suffisamment que la matière de feu ou de lumière interposée entre la flamme & nous est de même nature que la flamme même. Pourquoi donc les rayons lumineux qui servent à transmettre jusqu'à nous l'action du Soleil , & qui n'en paroissent être qu'une continuation ; seroient-ils d'une matière différente de celle de cet astre ; & en effet quand on les réunit par le moyen du verre ardent , ils agissent en cet état avec autant & plus de vivacité sur les corps terrestres , que pourroit faire la flamme la plus violente appliquée immédiatement sur les mêmes corps ; ce qui marque non seulement que la matière de ces rayons est la même que celle de la flamme , mais encore que la flamme consiste dans l'amás d'une grande quantité de matière de lumière qui agit d'autant plus vivement qu'elle est plus abondante & plus réunie. Suivant ce raisonnement le Soleil ne paroît différer des rayons de lumière réunis par le verre ardent , qu'en ce que la matière de lumière y étant en plus grande quantité , & peut-être même encore plus réunie qu'elle ne l'est dans ces rayons , il agiroit avec plus de force & de promptitude qu'eux , si les corps terrestres y étoient immédiatement appliquez.

L'action violente des rayons réunis par le verre ardent , fait assez connoître que le fluide qui dans leur état naturel les sépare & les étend , sert à temperer cette action , & à la rendre plus supportable ; car sans cet intermède au lieu d'éclairer & d'exciter une chaleur douce , ils con-

sumeroient tous les corps & détruiroient l'organe de la vûë; & pour me servir d'une comparaison sensible, l'air doit être regardé par rapport aux rayons lumineux qui tombent sur nous comme l'eau par rapport aux parties de feu qui passent de ce liquide dans un corps exposé à la chaleur du bain marie; c'est-à-dire que la violence des raions lumineux est tempérée par leur passage au travers de l'air, comme celle des parties de feu est adoucie par leur passage au travers de l'eau. On pourroit encore comparer les rayons lumineux aux esprits corrosifs qui déchirent & rongent puissamment quand ils sont purs, & qui produisent une aigreur très-agréable, quand ils nagent dans une suffisante quantité de liquide.

La matiere de lumiere poussée par le Soleil sur les corps terrestres, les modifie differemment suivant la nature de ces corps. Il y en a de certains que cette matiere met & entretient facilement en fusion; telles sont les parties d'eau qui originairement sont solides, & qui ne doivent leur fluidité qu'au mélange & à l'action de la matiere de lumiere. La preuve en est que leur fluidité persiste tant que le Soleil détermine une quantité suffisante de cette matiere à porter son action sur les corps terrestres; mais dans les Saisons où il ne nous en envoie que peu, comme ce peu ne suffit pas pour entretenir la fusion de ces parties, elles retombent dans leur premier état d'immobilité, d'où elles ressortent ensuite quand on les présente au feu, ou, ce qui est la même chose, quand le Soleil recommence à pousser vers les corps terrestres, une plus grande quantité de matiere de lumiere.

Ce qui vient d'être dit, fait assez connoître. 1°. Que la glace n'est qu'un rétablissement des parties d'eau dans leur état naturel. 2°. Que la seule absence de matiere de lumiere suffit pour concevoir ce rétablissement; & enfin que la fluidité de l'eau est une fusion véritable qui peut être comparée à celle des métaux exposez au feu, & qui n'en differe qu'en ce que les métaux ont continuellement

besoin d'une grande quantité de partie de feu pour être mis & entretenus en fusion, & que rarement il vient assez peu de matiere de lumiere aux parties de l'eau, pour qu'elles puissent reprendre leur premier état de solidité, comme font les métaux fondus, & éloignez ensuite de la cause de leur fusion.

Un autre effet de la matiere de lumiere répandue sur les corps terrestres; c'est de s'engager dans de certains composez de sel, de terre, & d'eau, & de former avec eux des huiles, des graisses, & en un mot, des corps inflammables qui ne sont tels que par la grande quantité de parties de feu qu'ils contiennent. Ce qui me fait adopter cette conjecture, c'est que quand on analyse ces corps, on les réduit entierement en sel, en terre, en eau, & en une substance fine & déliée qui passe au travers des vaisseaux les mieux bouchés, & qui quelque soin qu'apporte l'artiste pour ne rien perdre, se dissipe toujours en assez grande quantité pour produire une diminution de poids considerable dans le total de la matiere restante.

Il est certain que le sel, la terre & l'eau, soit qu'on les unisse ensemble, soit qu'on les sépare, ne deviennent jamais inflammables, & même qu'ils empêchent ou retardent le plus souvent l'inflammabilité des corps qui ont cette propriété. On peut même dire, que ces principes ne servent dans la composition des corps inflammables qu'à contenir & arrêter la matiere de la lumiere qui est la véritable matiere de la flamme, & qui ne s'élance en l'air sous cette forme, que quand le corps inflammable ayant été exposé au feu, cet agent extérieur en a rompu les vesicules, & a donné à la matiere enfermée dans ces vesicules toute la liberté de s'envoler.

C'est donc la matiere véritable de la flamme qui échappe à l'artiste dans l'analyse des corps inflammables, & il ne lui reste après la décomposition de ces corps, que les materiaux qui servoient à former les prisons dans lesquelles cette matiere étoit retenuë. On accordera aisé-

ment que cette matiere étant libre & renduë à elle-même, doit s'échaper au travers des vaisseaux les mieux bouchez, dès qu'on fera attention qu'il n'y a point de vaisseau exposé au feu où cette matiere ne penetre, & n'aille échauffer le liquide qui y est contenu; & quant à la cause de l'inflammabilité, l'experience nous faisant connoître que le sel, la terre, & l'eau dans quelque situation qu'on la mette, ne deviennent jamais inflammables; à qui peut-on plus vrai-semblablement attribuer l'effet dont il s'agit qu'à la matiere de la lumiere, qui comme il a déjà été prouvé, forme la flamme, & lui donne toutes ses propriétés.

Au reste on ne doit point être surpris de ce que les métaux calcinez, & en général tous les corps qui par la calcination ont fait une provision de matiere de lumiere, ne s'enflamment pas au feu comme font les huiles; car pour qu'un corps s'enflamme & se fasse appercevoir en cet état, il faut que la substance lumineuse qui s'en échappe continuellement, soit assez abondante, & forme une masse assez robuste pour presser de tous côtez & avec vigueur la matiere de lumiere qui se trouve confusément répanduë dans les interstices de l'air; ensorte que les parties de cette matiere se poussant successivement les unes & les autres selon la détermination directe qui leur a été communiquée, transmettent par-là jusqu'à une distance plus ou moins grande les impressions de la flamme. Mais quand il ne s'échape des corps solides que de petites parcelles de substance lumineuse, elles se trouvent tout d'un coup si fort offusquées par l'air qui les environne, & leur masse est naturellement si foible, qu'il ne luy est pas possible de faire des pressions assez étenduës & assez efficaces pour devenir sensibles à la vûë.

Cela étant on peut concevoir que la matiere de la lumiere contenuë dans les corps inflammables exposez au feu en sort à chaque instant en beaucoup plus grande quantité que ne fait celle qui s'est engagée dans les métaux calcinez; soit parce que les corps calcinez contien-

nent

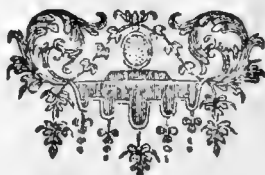
nent une moindre quantité de cette matiere que les huiles, soit parce qu'ayant un tissu de parties plus serré, ils ne luy permettent pas une sortie aussi libre, & qu'à chaque effort de l'agent extérieur qui les oblige à s'en défaire, ils n'en laissent exhaler que de petites parcelles, incapables, comme il a déjà été dit, de fraper sensiblement la vûe.

Ce raisonnement s'accorde parfaitement avec un fait assez commun; c'est que quand on expose à un trop petit feu des corps très-inflammables, comme le papier, la paille; ils se consomment quelquefois entierement sans jeter aucune flamme, & cela parce que l'agent extérieur étant trop foible pour chasser à la fois une grande quantité de la matiere de la lumiere contenuë dans ces corps, toute cette matiere s'échape successivement en petites portions invisibles, & proportionnées à la force qui procure leur délivrance.

Ce seroit ici le lieu de rendre raison de plusieurs phénomènes curieux, ausquels la supposition de la matiere de lumiere enfermée, convient parfaitement, & qui s'expliquent même si naturellement & avec tant de facilité par cette voie, qu'il semble que chacun de ces phénomènes soient autant de preuves de la verité de la supposition. Par exemple la matiere de lumiere ne paroît-elle pas convenir particulièrement aux phosphores, tant naturels qu'artificiels, & à ces fermentations violentes & accompagnées d'une flamme considerable que les huiles dont on se sert dans ces sortes d'expériences sont contraintes de laisser exhaler quand elles y ont été forcées par des acides nitreux ou vitrioliques qui les ont pénétrées. Mais si je m'engageois dans une explication complete de toutes les expériences de cette nature, & de toutes les circonstances singulieres qui les accompagnent chacune en particulier, & qui les diversifient, je passerois de fort loin les bornes que je me suis prescrites, & je déroberoïis à d'autres Memoires des sujets qui méritent bien d'être traitéz particulièrement,

Je remarquerai seulement dans ce Memoire-cy, que les phosphores en général doivent être regardez comme des especes d'éponges pleines de matieres de lumiere, dans lesquelles cette matiere est si foiblement retenuë, & tient à si peu de chose, qu'elle n'a pas besoin d'un grand secours extérieur pour devenir en état de s'exhaler sous une forme lumineuse, & souvent même de brûler, & d'enflammer les corps presentez à son action.

Il suit de tout ce qui a été dit, que si le Soleil paroît être une especie de grand réservoir de matiere de lumiere, nous en avons icy dans les corps inflammables un très-grand nombre de réservoirs particuliers qui semblent avoir été formez pour suppléer en tems & lieu au défaut du Soleil; & en effet comme sa présence nous est indispensablement necessaire pour la lumiere & pour la chaleur, & cet astre ne nous éclairant pas toujours & s'éloignant même de nous dans de certaines saisons, ou ce qui revient au même, ne déterminant alors qu'une petite quantité de matiere de lumiere à penetrer les corps terrestres, nous trouveront heureusement dans le sein de la terre même de quoy subvenir aux maux dans lesquels l'absence ou l'éloignement du Soleil nous jetteroient immanquablement; c'est-à-dire assez de matiere de lumiere pour pouvoir former des especes de petits soleils qui nous échauffent & nous éclairent aussi-bien que le grand, & qui sont en quelque sorte ses substituts.



DE L'ÉVANOUISSMENT
DES QUANTITEZ INCONNUES
DANS LA GEOMETRIE ANALYTIQUE.

PAR M. ROLLE.

Toutes les recherches que l'on a faites dans la Geometrie Analytique se réduisent à deux Classes. Dans l'une on se propose de transformer les Questions de cette Science en Problème d'Algebre ; & dans l'autre on ne s'occupe que du soin de résoudre ces Problèmes.

1709.
9. Août

Comme la Méthode de faire évanouir les Inconnues par la voie du dégagement & des Substitutions est d'un fréquent usage dans ces recherches , & qu'il se trouve dans cette Méthode plusieurs difficultez, auxquelles on n'a pas fait assez attention ; je me suis proposé en marquant ces difficultez, de marquer en même temps comment on peut les résoudre : Ce qui demande plusieurs Memoires. En cela, l'ordre le plus naturel me prescrit de commencer par l'Examen des Problèmes de pure Algebre qui n'ont que deux Egalitez & deux Inconnues, & dont les termes ne sont affectez ni de fractions ni de signes radicaux. Ce ne sont aussi que ces sortes de Problèmes qui feront le sujet de ce premier Memoire.

Ce Projet ainsi restraint, ne laisse pas de renfermer une infinité d'Exemples qui désignent quatre Inconviniens dignes de remarque dans la Méthode en question.

Car l'on y trouve, 1°. Des Questions impossibles qui paroissent possibles & même faciles à résoudre, quand on n'en juge que par cette Méthode.

Possibilitéz
apparentes.

2°. Des questions qui se réduisent à des Egalitez tout-à-fait imaginaires, ou à des contradictions manifestes comme $7=4$; qui ne laissent pas d'être possibles & solubles.

Impossibi-
litez appa-
rentes.

G g g ij

*Indétermi-
nations ap-
parentes.*

3°. Des Questions déterminées les unes possibles, les autres impossibles qui paroissent indéterminées & capables d'une infinité de Solutions.

*Indétermi-
nations ap-
parentes.*

4°. Des questions indéterminées qui se réduisent à des Egalitez ou imaginaires, ou contradictoires, ou seulement capables d'un certain nombre de Solutions réelles, & qui néanmoins en ont une infinité.

C'est-là en quoy consistent les difficultez que je veux expliquer dans ce Memoire.

Dans le premier Article je n'envisageray que des Problèmes où les Divisions que prescrit la Méthode ne peuvent se faire qu'intentionnellement. Et dans le second Article je me proposeray des Problèmes où les Divisions se font actuellement. Dans l'un & dans l'autre je marqueray les Moyens qui me paroissent les plus généraux & les plus convenables pour remédier aux inconveniens indiquez par les Exemples dont je me serai servi. De-là il sera facile de voir comment on pourra éviter de semblables inconveniens, lorsque les Divisions sont en partie actuelles & en partie supposées.

ARTICLE I. On juge ordinairement de la possibilité ou de l'impossibilité d'un Problème dans la Méthode en question, selon que la Réduite se trouve possible ou impossible. Voici des Cas où l'on verra qu'il est souvent nécessaire pour s'en assurer, non seulement de faire la substitution retrograde des racines à l'ordinaire; mais encore de la pousser jusques aux Egalitez proposées, qu'il se trouve des difficultez considerables dans ce retour auxquelles on ne fait pas attention. On y verra aussi comment on peut résoudre ces premières difficultez; ce qui servira à découvrir d'autres inconveniens de cette Méthode qui seront expliquez dans la suite.

P R E M I E R E X E M P L E..

Dans cet Exemple, la Réduite du Problème renferme plusieurs racines réelles, & néanmoins le Problème est imaginaire.

Le Problème proposé est celui qu'expriment les deux Egalitez *A*, *B*.

$$A \dots yy + xx = nx.$$

$$B \dots yy + 4nx = 6nn.$$

Dans le dessein qu'on auroit de résoudre ce Problème par la Méthode en question, & de faire premièrement évanouir y , le dégagement dans l'Egalité A , seroit comme on le voit icy en C .

$$C \dots yy = nx - xx.$$

Suivant cette Méthode, il faut substituer cette valeur de yy dans l'égalité B . Ce qui donne la résultante D .

$$D \dots xx - 5nx + 6nn = 0.$$

Cette résultante ainsi trouvée ne renfermant pas l'inconnue y que l'on a fait évanouir, elle est par conséquent la réduite du Problème A, B . Et comme cette réduite renferme des racines réelles, il faudroit conclure selon des préjuges ordinaires, que ce Problème est possible. Mais en faisant évanouir l'inconnue x par la substitution retrograde de ses valeurs prises en D , on verra aisément dans cet exemple, que le Problème est absolument impossible.

Car cette Réduite D étant résoluë, on trouve qu'elle n'a point d'autres racines que $x = 2n$ & $x = 3n$. On trouve aussi en substituant ces valeurs dans C , que les résultantes sont celles qu'on voit icy en E, F .

$$E \dots yy = -2nn. \text{ ou } y = \pm \sqrt{-2nn}.$$

$$F \dots yy = -6nn. \text{ ou } y = \pm \sqrt{-6nn}.$$

Ainsi, la substitution retrograde des valeurs réelles de x , ne donne dans l'égalité du dégagement que des valeurs imaginaires pour y ; & comme cette égalité, dans cet exemple, est la même qu'une des proposées, il est facile de voir que le Problème proposé est imaginaire, quoique sa réduite soit entièrement réelle.

Pour surcroît de preuves, on trouvera en substituant $x = 2n$ & $x = 3n$ dans B que les résultantes sont encore imaginaires. Ainsi, le Problème qu'expriment les égalitez A & B est un Problème impossible, quoique la première donne un Cercle; que la seconde fournisse une

422 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
parabole, & que leur réduite soit possible.

REMARQUE. Si l'on se propose de construire l'égalité réelle D par la Méthode ordinaire des effections géométriques en prenant l'égalité A pour le premier lieu, cette Méthode donnera B pour le second lieu, & l'on trouvera que la construction ne donne aucune des racines de D . Cet inconvenient dans un exemple aussi simple fait voir la force du préjugé où l'on étoit : Que la réduite des lieux suffit pour sçavoir si le Problème qu'ils expriment, est possible ou impossible. Car pour s'assurer du succès d'une construction, on se contente dans cette Méthode que cette réduite soit la même que la proposée, sans s'occuper de ce qui arrive dans la substitution retrograde. C'est-à-dire qu'ayant voulu construire D , & trouvant que D est la réduite des lieux, il ne faudroit rien de plus suivant ce préjugé pour s'assurer que la construction donnera les racines de cette Egalité, & que le nombre des points où les Courbes se rencontreront sera égal au nombre de ces racines.

On verra ici par d'autres exemples qu'il y a des cas où il n'est pas facile de voir cet inconvenient, & que pour le découvrir il faut ajouter des regles considerables à la Méthode en question.

SECOND EXEMPLE.

*Dans cet Exemple la Méthode oblige de faire deux dégage-
mens pour trouver la Réduite. On voit qu'ils s'accordent
dans leurs effets, & que néanmoins il faut substituer la
valeur de chaque inconnüe dans toutes les Egalitez propo-
sées, pour sçavoir si la racine de cette Réduite convient
au Problème.*

Ce Problème est celui qui representent $G.H.$

$$G \dots xyy + x^2 = nyy + cy.$$

$$H \dots xyy + pll = xxy + gyy.$$

Dégageant yy dans A on trouve I ,

$$I \dots yy = \frac{cy - x^2}{x - n}.$$

Substituant cette valeur de yy dans l'égalité H , & dé-

gageant y de celle qui en résulte on aura K .

$$K \dots y = \frac{x^4 - gx^3 - plx + npl}{nxx - x^3 + clx - gcl}.$$

Et cette dernière valeur de y étant substituée dans I ou G , donnera la réduite L .

$$L \dots 2x^9 - 3nx^8 + nx^7 - 2gx^8 - clx^7 + ggx^7 + 2gnx^7 \} = 0.$$

Cette réduite se divise par $x - n$. Donc $x = n$ en est une racine réelle. Il faut voir si elle convient au Problème proposé G , H .

Substituant cette valeur de x dans le dernier dégagement K , on aura $y = \frac{n^4 - gn^3}{cnl - gcl}$, qui s'abrège en divisant par $n - g$, & delà $y = \frac{n^3}{cl}$.

Ainsi $x = n$ & $y = \frac{n^3}{cl}$ devroient résoudre le Problème.

On trouve en substituant ces valeurs dans l'Egalité du premier dégagement I , qu'elles en sont une solution : Et comme cette Egalité est la même que la Proposée G , on peut assurer qu'elles en sont aussi une solution ; mais en substituant ces valeurs de x & de y . Dans l'autre Proposée H , il en résulte l'Egalité M .

$$M \dots pccl^4 + n^7 = cln^5 + gn^6,$$

qui seroit une Egalité résolue si p valoit $\frac{cln^5 + gn^6 - n^7}{cl^4}$, ou

si la valeur de g étoit $\frac{pccl^4 - cln^5 + n^7}{n^6}$. Ou bien, si $g = n$,

& en même tems $p = \frac{n^5}{cl^3}$. Car dans ces trois cas, le premier membre de M seroit égal au second, & cette résultante se réduiroit à $0 = 0$. Mais il est évident qu'il y a beaucoup plus de cas où M se trouveroit contradictoire.

Ainsi l'on peut voir dans cet Exemple :

1°. Qu'il ne suffit pas toujours de faire la substitution retrograde dans l'Egalité du dernier dégagement lorsqu'il fournit une valeur réelle pour l'Inconnue dégagée, ni même lorsqu'elle se confirme par les autres dégagements.

2°. Qu'il y a des cas où il faut faire la substitution des valeurs que fournit la Méthode dans toutes les Egalitez du Problème proposé, ou avoir des moyens équivalens. pour sçavoir si ces valeurs satisfont aux conditions de ce Problème.

REMARQUE I. Le Problème G , H étant conçu en termes generaux, si l'on eût fait le premier dégagement dans H , la premiere substitution se seroit faite dans G , & la seconde dans H , alors la réduite n'auroit point été divisible par $x-n$, en sorte que la racine $x=n$ ne se seroit point trouvée dans cette réduite sur l'hypothèse que les grandeurs données demeurent en termes generaux. Mais si le rapport de ces grandeurs effaçoit la contradiction qui paroît dans M , la réduite se trouveroit divisible par $x-n$, quand même le premier dégagement & les premieres substitutions auroient été faites comme je viens de le dire. Alors cette réduite seroit encore divisible par $x-g$, quoique ce binome ne divise pas la réduite L .

Dela il sembleroit que pour réformer la Méthode en question, il faudroit nécessairement dégager dans une des Proposées & poursuivre comme on l'a fait ici. Qu'ensuite il faudroit dégager dans l'autre proposée & faire un semblable manège. Mais cette Méthode sera réglée de maniere, qu'il suffira de faire le premier dégagement dans une des proposées.

TROISIEME EXEMPLE.

Dans cet Exemple une Indétermination apparente se complique avec une Impossibilité ambiguë. La substitution retrograde dans l'Egalité du dégagement, donne une solution du Problème qui paroît réelle dans l'Infini actuel, & qui se confirme par une effectiion géométrique. Cependant la substitution étant poussée jusques aux Egalitez proposées, ne donne dans l'une & dans l'autre que des contradictions absolues. De maniere que le Problème seroit soluble dans l'Infini, quoiqu'impossible dans le Fini, & qu'en ôtant les contradictions,

ditions, il se trouveroit capable d'une infinité de Solutions dont toutes les valeurs seroient réelles & finies.

Les deux Egalitez du Problème sont marquées icy N, O .

$$N \dots xy + ac = cy + ax + dd.$$

$$O \dots x^3 + axy = cxx + acy + add.$$

dégageant y dans la première, la valeur de cette inconnue sera comme on la voit en P .

$$P \dots y = \frac{ax - ac + dd}{x - c}.$$

Substituant cette valeur dans O , sans abréger la fraction que l'on voit naître dans le résultat, on aura la réduite Q .

$$Q \dots x^4 - 2cx^3 + aaxx - 2aacx + aacc = \theta.$$

$$+ cxxx$$

Et si l'on abrège la fraction en divisant ses deux termes par $x - c$, la Réduite sera comme on la voit icy en R .

$$R \dots x^3 - cxx + aax - aac = \theta.$$

Ces deux réduites n'ont point d'autre racine réelle que $x = c$. Mais cette racine se trouve deux fois dans la première réduite. Ce qui servira à expliquer une difficulté.

Sur cela, on peut faire les observations suivantes.

1^o. En substituant c à la place de x dans l'Egalité du dégagement P , on aura $y = \frac{dd}{\theta}$ (qui est l'expression ordinaire des grandeurs actuelles infinies). Ainsi, $x = c$ & $y = \frac{dd}{\theta}$ sont deux valeurs qui doivent faire une solution du Problème selon la Méthode. Mais comme il y a une infinité d'Exemples où l'on seroit trompé par de semblables apparences, il faut icy des connoissances qu'elle ne donne pas. Voici une voye qui n'est peut-être pas tout-à-fait indifférente pour cette recherche.

Déjà nous avons dans P la valeur de y que fournit la première proposée N , & substituant $x = c$ dans le numérateur de P sans substituer dans son dénominateur, on aura cette valeur de y sous la forme marquée S .

$$S \dots y = \frac{dd}{x - c}$$

Dégageant y de la seconde proposée O , on trouve $y = \frac{add + cxx - x^3}{ax - ac}$. Et ne substituant $x = c$ que dans le

numérateur, on aura $y = \frac{add}{ax-ac}$. Où l'on voit que la fraction s'abrège en divisant ses deux termes par a , & que ce diviseur étant connu, comme il est, la division ne peut rien changer dans la valeur des inconnues. Ainsi cette dernière égalité se réduit à celle-cy : $y = \frac{dd}{x-c}$ qui est la même que S .

Or cette valeur de y renferme encore x , & l'on a $x=c$. Donc en substituant dans S , on aura $y = \frac{dd}{c}$. Donc $x=c$ & $y = \frac{dd}{c}$ désigne une Solution du Problème N , O .

Il est vray que la valeur de y est une grandeur infinie dans N & infinie dans O . Mais il paroît que ces deux infinis sont parfaitement égaux. Car l'un & l'autre est exprimé par la valeur de y qui est en S . Or il est évident que cette valeur sera toujours égale à elle-même en prenant pour x une valeur arbitraire. Donc elle sera égale à elle-même lorsque $x=c$.

Pour surcroît de preuves on verroit que cette Solution du Problème N , O , se trouveroit dans l'effectiion géométrique, si l'on construiroit pleinement les Courbes qu'expriment ces deux Egalitez sur un même axe & une même origine ; en sorte que la grandeur indiquée par $y = \frac{dd}{c}$ seroit exprimée par la distance qui se trouve entre l'axe des x & le point où ces Courbes rencontrent une asymptote qui leur est commun, & l'on verroit aussi que ce point de rencontre doit être le point d'attouchement désigné par les racines égales de la réduite Q . Il est vrai que la valeur finie de x seroit inaccessible, mais on peut prouver qu'elle est dans la construction sur l'hypothèse que rien ne manque à la Methode des Effectiions géométriques. Il en sera encore parlé dans la suite.

2°. Cependant en substituant $x=c$; non dans P ; mais dans les Proposées N , O . On trouvera les deux contradictions $dd=9$. $add=8$. Ce qui combat la définition des Egalitez résolues, & il est certain aussi que le Problème

est impossible dans le fini. Mais ces contradictions deviennent infiniment petites lorsque y est infiniment grande, comme on le dira icy.

3°. On voit encore dans cette Substitution que l'Inconnue y ne reçoit aucune détermination & que les deux contradictions disparaissent lorsque $d=0$. De manière que dans ce cas la Solution du Problème $N, 0$, que j'ai indiquée ici ne se trouveroit pas, & que dans ce même cas ce Problème est capable d'une infinité de Solutions finies. C'est-à-dire que $x=c$ & $y=c$ en seroient alors une Solution. Que $x=c$ & $y=2c$ en seroient aussi une Solution. Ainsi de suite à l'Infini.

REMARQUE I. Si l'on compare les deux égalitez $N, 0$, pour faire évanouir x , on aura occasion d'y faire des remarques fort curieuses : mais il ne seroit peut-être pas facile d'en tirer une solution dans l'infini, quoique la contradiction qui désigne cette solution soit un diviseur de la réduite, parce que ce diviseur n'a que des quantitez connues, & que celui qui renferme l'inconnue ne fournit que des racines imaginaires. Un exemple moins composé fera mieux voir cette difficulté. Soit cet exemple T, V .

$$T \dots yx - ay = ad.$$

$$V \dots yx = dx + ay.$$

Si l'on fait évanouir y , l'on aura la Solution $x = a$, $y = \frac{ad}{a}$. Mais en faisant évanouir x la réduite sera $dda = 0$, qui est une marque ordinaire de l'impossible, & cette réduite ne renfermant aucune inconnue, il ne peut point y avoir de substitution retrograde. Mais la contradiction de cette réduite donne lieu de chercher la solution $x = a$, $y = \frac{ad}{a}$, & l'on n'auroit pas cet avantage dans l'exemple précédent ; parce qu'en faisant évanouir x , la contradiction ne paroît pas dans la réduite comme dans celle de T, V .

REMARQUE II. Si l'on divise par y les deux Egalitez du Problème T, V , il sera exprimé comme en A, B .

$$A \dots x = \frac{ad}{y} + a. \quad B \dots x = \frac{dx}{y} + a.$$

H h h ij

Et substituant a au lieu de x , on aura $\frac{ad}{y}$. Ainsi ce Problème seroit résolu si $\frac{ad}{y}$ étoit entierement détruite. Prenant $y = 100000a$, on aura $\frac{d}{100000}$ pour la valeur de la contradiction $\frac{ad}{y}$, & si à la place de 100000 on suppose un nombre d'une grandeur infinie; il est clair que d sera infiniment divisé. D'où il suit que la contradiction seroit alors infiniment petite si le Problème étoit sous la forme A, B , & comme la génération des Courbes qu'expriment ces deux Egalitez, répond à cette dernière forme, on peut dire qu'en Géométrie le Problème se résout dans l'infini: Il en est de même du Problème N, O , & de ses semblables. En cela, il suffit à l'égard de l'Infini, de sçavoir que l'idée que nous en avons renferme la négation du fini, parce que je ne parle ici des Solutions dans l'Infini, que pour faire voir dans la suite, comment on peut les distinguer des Solutions dont toutes les valeurs sont finies. Ce qui est absolument nécessaire pour démontrer l'étendue, & l'infailibilité de la Méthode en question, quand on l'aura reformée.

REMARQUE III. Si l'on a une Egalité comme C .

$$C \dots yy = \frac{a^4}{x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3}.$$

En prenant $x = a$, on aura $yy = \frac{aa}{\theta}$ qui est une des formules de l'Infini asymptotique, & il est vrai aussi que cette Courbe a des asymptotes réels qui sont des valeurs de y . Mais cette formule n'en désigne aucun. Elle n'exprime aucune grandeur lorsque θ est pris pour un rien absolu; & si l'on prend θ pour un point réel, la ligne infiniment longue qu'elle exprimera, n'est pas un asymptote. C'est alors une ligne hors de la Courbe que fournit C ; de manière que cette Droite & cette Courbe ne peuvent se rencontrer ni dans le Fini ni dans l'Infini.

Si l'on a les deux Egalitez D, E .

$$D. \frac{aax - 3a^3}{x - a} = yy, \quad E. yy = \frac{a^3x - 3a^4}{xx - 2ax + aa}.$$

Alors $x=a$ donnera $y = \sqrt[2]{\frac{-2aa}{1}}$ dans D & dans E .

L'asymptote que désigne cette formule est réel dans D ; mais celui qu'elle désigne pour E , est un asymptote imaginaire dans le sens de l'exemple C , & il y auroit même une autre condition pour l'exclure des asymptotes réels.

Je ne parle point des Formules de l'Infini qui viennent des valeurs imaginaires que l'on substitue, parce que cet inconvenient, quand il peut tromper, est ordinairement combiné avec d'autres inconveniens dont je n'ai encore rien dit. C'est par une semblable raison, que je ne marque point ici les cas où il ne paroît pas possible d'exprimer par ses formules les asymptotes qui peuvent servir à résoudre des Problèmes dans l'infini. Mais on pourra voir quelque chose de ces difficultez dans la Remarque qui suit.

REMARQUE IV. Lorsque dans un Problème une des Inconnues ne se trouve que dans une des Egalitez, & que parmi ses valeurs il y en a d'infinies, on n'a pas besoin de voir si ces Infinis sont égaux à d'autres Infinis pour résoudre ce Problème; & s'il se trouve aussi que cette inconnue n'ait point de termes moyens dans cette Egalité, on est certain que ces Infinis se réduisent, du moins à *parte rei*, aux Formules telles que $\frac{nn}{o}$. Mais avec tous ces avantages il ne laisse pas d'y avoir fort souvent des difficultez notables, lorsque les Quantitez qu'il faut substituer se trouvent incommensurables. On voit un indice de ces difficultez dans le Problème F , G .

$$F...yy = \frac{a^4xx - a^6}{x^3 - 3aax + a^3}.$$

$$G...x^6 + 9a^4xx + a^6 = 6aax^4.$$

On peut dire en un sens que ce Problème est capable de douze solutions. Il en a quatre réelles dans le Fini; il en a six réelles dans l'Infini, & les deux autres sont imaginaires. Si en cherchant à résoudre ce Problème, on a en vûe la Méthode en question, on reconnoîtra qu'il faut y ajouter de nouvelles règles, & qu'il est bon ou

430 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
même nécessaire de marquer les difficultez de cette Mé-
thode séparément, pour mieux faire voir dans la suite ,
comment'elles s'impliquent dans des Exemples plus com-
posez.

QUATRIÈME EXEMPLE.

*On peut voir à l'occasion de cet Exemple, les apparences al-
ternatives du possible & de l'impossible, lorsque les limi-
tes des Egalitez proposées & les racines de leur réduite
sont des quantitez incommensurables.*

Les Egalitez du Problème, sont celles qu'on voit icy
en *A* & *B*.

$$A. yyx^4 + 3a^3yyx + a^6 = aax^4 + a^3x^3.$$

$$B. x^6 + 7a^3yyx + a^6 = 3yyx^4 + a^3x^3 + 7a^5x + a^4yy.$$

Dégageant *yy* dans *A* on aura *C*.

$$C... yy = \frac{aax^4 + a^3x^3 - a^6}{x^4 + 3a^3x}.$$

Et substituant dans *B*, il en résultera *D*.

$$D... x^{10} - 3aax^8 - a^3x^7 + 7a^6x^4 - a^7x^3 - 21a^8xx \\ (-4a^2x + a^{10} = 0).$$

Suivant la Méthode il faut prendre chaque racine réelle de la réduite *D*, & la substituer à la place de *x* dans l'égalité du dégagement *C* pour avoir les valeurs de *y*. Mais routes les racines réelles de *D* sont incommensurables, & ne peuvent être tirées de cette Egalité par la voye des signes radicaux ni par la voye des Effections géométriques, d'une maniere qui convienne à la résolution du Problème. Ainsi, il ne paroît point d'autre voye pour cette recherche que celle des approximations. En quoi il seroit facile de se méprendre si l'on ne suivoit en cela què les règles ordinaires. Il est vray que par la Méthode des Cascades algébriques, on peut avoir par approximation toutes les racines réelles de la réduite *D*; en sorte que l'erreur soit plus petite qu'aucune quantité donnée, & distinguer, par cette Méthode, toutes ces racines, des imaginaires que cette égalité renferme: mais ce n'est pas assez pour faire un Supplément à la Méthode qui est icy en question. Il ne s'agit pas seulement des valeurs de *x*,

il faut encore distinguer parmi celles de y , les réelles des imaginaires dans la substitution retrograde des racines de D . On trouvera par exemple, qu'une de ces racines est entre a & θ ; en sorte que a est proche de cette racine; & si l'on s'avisait de substituer a dans C à la place de x pour avoir les valeurs de y , on trouveroit $y = \frac{1}{2}a$ & $y = -\frac{1}{2}a$ qui sont, comme l'on voit, des valeurs réelles. Cependant la véritable racine de D qui est entre a & θ , ne donne dans C que des valeurs imaginaires pour y . En d'autres occasions, au contraire, la substitution de la racine approchée donneroit des valeurs imaginaires pour y lorsqu'elle doit donner des valeurs réelles. Mais en rappelant ici la Méthode des questions indéterminées que je publiai en 1699; cette Méthode donnera les limites de x dans C ; & comparant ces limites approchées aux racines approchées de D , on découvrira tout ce qu'il y a de réel & d'imaginaire dans le Problème proposé.

Si l'on fait l'approximation de ces racines & de ces limites par les nombres les plus simples qui se présentent, on aura ici pour les limites approchantes de D , les nombres qui sont en E, F, G, H . Et pour les limites de x dans C , on trouvera les nombres K, L, M, N .

$$\left. \begin{array}{l} E. 2. 1 \frac{1}{2}. \\ F. \frac{1}{2}. \theta. \\ G. -\frac{1}{3}. -\frac{1}{2}. \\ H. -1 \frac{1}{2}. -1 \frac{2}{3}. \end{array} \right\} D. \quad \left. \begin{array}{l} K. 1. \frac{1}{2}. \\ L. \theta. \\ M. -\frac{82}{60}. -\frac{83}{60}. \\ N. -\frac{83}{60}. -\frac{84}{60}. \end{array} \right\} C.$$

C'est-à-dire que dans D , il y a une racine entre les deux nombres qui sont en E , une autre racine entre $\frac{1}{2}$ & θ qui sont en F . Encore une entre $-\frac{1}{3}$ & $-\frac{1}{2}$. Et une aussi entre $-1 \frac{1}{2}$ & $-1 \frac{2}{3}$.

On verra que dans C les limites de x sont K, L, M, N , c'est-à-dire, qu'une des limites est entre 1 & $\frac{1}{2}$. Que la seconde limite est θ ; la 3^e entre $-\frac{82}{60}$ & $-\frac{83}{60}$, & que la 4^e est entre $-\frac{83}{60}$ & $-\frac{84}{60}$.

Par la Méthode des indéterminées qui donne ces limites de C , on voit que toutes les valeurs réelles de x qui sont au-dessus de K donnent dans C deux valeurs réelles de y : Que toutes les valeurs de x entre K & L ne donnent dans C que des valeurs imaginaires pour y : Que les valeurs de x prises dans l'intervalle LM donnent deux valeurs réelles de y : Que l'intervalle MN ne fournit que des imaginaires pour y ; & que l'intervalle indéfini au-dessous de N , donne deux valeurs réelles de y . C'est-à-dire, qu'en prenant pour x des nombres à volonté au-dessous de N comme -2 . -3 . $-4\frac{1}{2}$. -100 &c. chacun de ces nombres donnera deux valeurs réelles de y dans C .

Alors, il est facile de voir en comparant les termes des racines de D aux termes des limites de C , que des quatre racines réelles de la réduite, celles qui sont marquées E, G, H , étant substituées dans C , chacune donnera des valeurs réelles de y . Mais que la racine F substituée dans C ne donnera que des imaginaires pour la valeur de cette inconnue. D'où il suit que le Problème A, B , de ce 4^e. Exemple est capables de six solutions réelles, & qu'il ne peut pas en avoir d'autres dans le Fini.

Il y a un très-grand nombre d'exemples où il arrive comme dans celui-cy, que les intervalles des limites de l'Egalité où se doit faire la substitution retrograde, donnent alternativement des valeurs réelles & des valeurs imaginaires ; en sorte qu'il faut poursuivre l'approximation de ces limites & des racines de la réduite jusqu'à ce que chacune de ces racines soit comprise dans l'intervalle qui lui est propre, pour éviter bien des méprises.

REMARQUE. Si l'on se propose l'Egalité 0 , & que pour la construire par la Méthode ordinaire des effections géométriques, on prenne l'Egalité A de ce 4^e Exemple pour le premier lieu,

$$0, \dots x^7 + 7a^6x - a^7 = 0.$$

On trouvera que les Courbes se rencontrent en six points, & que des six racines que donne la construction, il n'y en a aucune qui appartienne à l'Egalité 0 , quoique

que cette Egalité ait une racine réelle.

On pourra s'assurer de cet inconvénient par le moïen du détail précédent ; & l'on aura occasion d'y voir que la difficulté de reconnoître de pareils inconvéniens , est souvent une difficulté fort considérable.

ARTICLE II. Dans la Méthode en question, le dégagement des Inconnuës se fait presque toujours par une division ou actuelle , ou intentionnelle.

*De l'usage
ordinaire
des Divisions
actuelles que
la Méthode
prescrit.*

Il y a quantité d'Exemples où la division se peut faire actuellement , & dans ce cas on peut faire aussi , ou que la valeur dégagée n'ait point de fraction , ou bien que la fraction qui en résulte soit conçue en termes plus simples qu'elle ne l'auroit été sans cette division. Comme l'on a très-souvent l'occasion de ces divisions actuelles , lorsque l'inconnuë qu'on fait évanouïr passe le 3^e degré dans chacune des deux égalitez proposées , les inconvéniens de la Méthode sont aussi en cela fort considérables. Car dans l'usage de cette Méthode on a de coûtume de rejeter les diviseurs exacts qui servent aux dégagemens , sans rien dire de ce qui obligerait de retenir ces diviseurs , & de là il arrive souvent , que des questions possibles , qui quelquefois ont une infinité de solutions , se changent en questions impossibles , ou en questions qui n'ont pas toutes les solutions des Proposées.

En d'autres Exemples , la division du dégagement ne sçauroit être qu'intentionnelle , comme on a pû le voir dans l'article précédent ; mais si la division se peut faire actuellement , & que néanmoins on ne la fasse qu'intentionnellement ; alors les Problèmes déterminez & les Problèmes impossibles se changent très-souvent en Problèmes indéterminez & capables d'une infinité de solutions réelles & finies , quoique l'on conduise le jeu analytique de la même manière qu'on le conduit lorsque les divisions du dégagement ne peuvent être qu'intentionnelles.

De ces deux inconvéniens fondamentaux il en résulte un troisième inconvénient , qui est digne de l'attention

434 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
des Geometres. Car dans la plûpart des Problèmes où il
y a occasion de faire une division exacte pour le dégagé-
ment d'une inconnuë, on tombe dans l'un ou dans l'autre
des deux principaux écueils que je viens de marquer,
soit que l'on fasse cette division actuellement, ou qu'on
ne la fasse qu'intentionnellement. Il y a des Problèmes
néanmoins, où les deux manieres de diviser ne jettent
que dans un même écueil; mais cet écueil est différent
des autres.

Voicy des Exemples où je tâcherai d'expliquer ces dif-
ficultez & de marquer les moyens dont je me sers pour
les résoudre.

P R E M I E R E X E M P L E.

*Dans cet Exemple le Problème est indéterminé & capable
d'une infinité de Solutions. Cependant la Méthode n'en
donne que deux.*

Le Problème proposé est celui qu'expriment les Egali-
tez *A*, *D*. Les inconnuës sont *x*, *y*.

$$A \dots xxy - aay = 2axx - 2a^3.$$

$$B \dots yxx + 2aay + 3aax = 3axy + axx + 2a^3.$$

Dans le dessein qu'on auroit de résoudre ce Problème,
le meilleur parti selon la Méthode est de faire évanouir *y*
& de le dégager de l'égalité *A* en divisant chaque mem-
bre de cette égalité par $xx - aa$. Si l'on se contentoit
d'une division intentionnelle, on auroit $y = \frac{2axx - 2a^3}{xx - aa}$, mais
en divisant actuellement, on trouve que le dégagement
donne l'Egalité *C*.

$$C \dots y = 2a.$$

Suivant la Méthode il faut substituer cette valeur de *y*
dans *B*. Ce qui donne la réduite *D*.

$$D \dots xx - 3ax + 2aa = 0.$$

Dont les racines sont $x = a$ & $x = 2a$, qu'il faudroit sub-
stituer à la place de *x* dans l'Egalité du dégagement *C*,
Mais comme cette inconnuë ne s'y trouve pas, & que
sans cela on y trouve une valeur connuë de *y*, la substi-

tution retrograde que prescrit la Méthode n'a point de lieu dans cet Exemple. Ainsi, il faudroit conclure selon cette Méthode que ce Problème n'a que deux Solutions; l'une $y=2a$, $x=a$, l'autre $y=2a$, $x=2a$. Cependant ce Problème en a une infinité. Car en faisant $x=a$, par cela seul les deux proposées A , B , sont résolues. Ainsi, l'on peut prendre pour y une valeur telle qu'on voudra.

REMARQUE I. Il est évident qu'en rejetant le diviseur $xx-aa$, c'est de l'Egalité A en faire l'Egalité C & transformer le Problème indéterminé A , B , en un Problème déterminé B , C .

REMARQUE II. Si en dégagant y de A , l'on s'étoit servi de la division intentionnelle, on auroit trouvé l'indétermination de ce Problème en substituant les racines de la réduite dans l'égalité du dégagement, il est vrai aussi que cette division retient le diviseur qui a été rejeté. Ce qui justifieroit l'usage de cette espece de division, & remedieroit dans cet Exemple à un inconvenient de la Méthode. Mais il faut voir d'autres Exemples avant que de tirer ces conséquences.

REMARQUE III. Si l'on dégage y dans B par une division actuelle, on aura ces deux Solutions $y=a$, $x=a$.
 $y=a$, $x=-a$.

SECOND EXEMPLE.

Selon la Méthode le Problème paroît impossible. Cependant il est capable de quatre différentes solutions.

Les Proposées sont E , F .

$$E \dots xxy - bby = 2bxx - 2b^3.$$

$$F \dots bxx + 9b^3 + xyy = 4bbx + 2b^2y.$$

Dégagant y dans E par une division actuelle on aura G .

$$G \dots y = 2b.$$

Substituant dans F on trouvera la Réduite H .

$$H \dots xx + bb = 0.$$

Qui est, comme l'on voit, tout-à-fait imaginaire. D'où il faudroit conclure selon la Méthode, que le Problème

436 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
E, F, est impossible. Dans ce Problème néanmoins se
trouvent les quatre solutions qui sont en *I*, & *K*.

$$I. \begin{cases} x=b. y=\sqrt[2]{6bb} \\ x=b. y=-\sqrt[2]{6bb} \end{cases} \quad K. \begin{cases} x=-b. y=\sqrt[3]{\frac{14}{3}bb} \\ x=-b. y=-\sqrt[3]{\frac{14}{3}bb} \end{cases}$$

REMARQUE. Cette question est déterminée ; cepen-
dant la division intentionnelle du dégagement en auroit
fait une question indéterminée & capable d'une infinité
de solutions. Ce qu'il faudra comparer à la seconde re-
marque du premier Exemple pour voir que le Remede
qu'on y propose ne seroit pas général.

TROISIEME EXEMPLE.

La Réduite est contradictoire, & néanmoins le Problème est possible.

Les deux Egalitez du Problème sont *L*, *M*.

$$L \dots xx y - 9 b b y = 2 b x x - 18 b^3$$

$$M \dots x x y y + 15 b^4 = 4 b b x x + 4 b b y y.$$

Divisant actuellement *L* par $xx - 9bb$, on aura le dégagement *N*. $N \dots y = 2b.$

Substituant dans *M*, on ne trouvera pour réduite que la contradiction *O*. $O \dots b^4 = 0.$

Ainsi, selon la Méthode, il faudroit conclure que la question est impossible. Cependant elle a ces quatre solutions.

$$1 \dots x=3b, y=\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$$

$$2 \dots x=3b, y=-\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$$

$$3 \dots x=-3b, y=\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$$

$$4 \dots x=-3b, y=-\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$$

REMARQUE I. La contradiction *O* désigne une solu-
tion dans l'Infini, qui convient à l'égalité *M*, mais qui
ne convient pas à l'égalité *L*, ni par conséquent au Pro-
blème proposé.

REMARQUE II. Si l'on s'avise de résoudre ces trois Problèmes par des effections géométriques, on aura occasion d'observer une difficulté dans la construction des lieux qui est indiquée dans les Memoires du 11. Juillet 1708, & qui est expliquée dans le Memoire du 9 Aoust 1709; mais dont l'explication n'a pû être comprise dans l'impression de ces Memoires, & qui ne peut encore être inferée dans celui-cy.

QUATRIEME EXEMPLE.

Dans cet Exemple le Problème est possible & déterminé. Cependant la Methode le fait paroître impossible quand on dégage l'Inconnue par une division actuelle, & indéterminé lorsque le dégagement se fait par une division intentionnelle. On voit encore dans cet Exemple, qu'il n'est pas facile de reconnoître l'indétermination lorsque les racines de la Réduite sont incommensurables. En sorte que l'on ne sauroit éviter ces inconveniens par la Methode en question, quelque choix que l'on fasse des Egalitez & des Inconnues dans le début & dans la suite des Operations.

Les deux Egalitez de ce Problème sont P & Q .

$$P \dots yy + xy + xx + bn = ay + ax.$$

$$Q \dots xxxy + cnny + cnnx = bnxxy.$$

Dégageant yy dans la premiere on aura R .

$$R \dots yy = ay - xy - xx + ax - bn.$$

Substituant dans la seconde, cette valeur de yy , on aura la résultante S ,

$$S \dots x^3y - axxy + bnxxy - cnny = -x^4 + ax^3 - bnx^2 + cnnx.$$

Divisant actuellement chaque membre de cette Egalité S , par $x^3 - axx + bnx - cnn$, on aura le second & dernier dégagement T .

$$T \dots y = -x.$$

Suivant la Méthode il faut substituer cette valeur de y dans R , & la substitution donne la Réduite V .

$$V \dots xx = -bn. \text{ ou. } x = \pm \sqrt{-bn}.$$

qui est, comme on voit, absolument imaginaire. Ainsi,

438 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 il faudroit conclure selon la Méthode, que la question de ce 4^e Exemple est une question impossible, lorsque le dégagement de y se fait dans la résultante S par une division actuelle.

On évite cet écueil, & l'on tombe dans un autre; quand on fait ce dégagement par une division supposée. Alors, on le trouve comme on le voit en Z .

$$Z \dots y = \frac{-x^4 + ax^3 - bnx^2 + cnx}{x^3 - ax^2 + bnx - cn}.$$

Substituant cette valeur de y dans R ou P comme le prescrit la Méthode, on aura la réduite Δ .

$$\Delta \dots x^3 - ax^2 + bnx - cn \times \frac{-x^4 + ax^3 - bnx^2 + cnx}{x^3 - ax^2 + bnx - cn} = 0.$$

Dans laquelle il se trouvera toujours du moins une racine réelle, & il peut en avoir trois différentes entr'elles, selon les grandeurs & les rapports des quantitez connues a, b, c .

Suivant la Méthode, il faudroit substituer ces racines dans Z pour avoir les valeurs de y . Mais quand même il n'y auroit point d'écueil à craindre, il faut demeurer court (si l'on n'a point d'autre voie) tandis que les quantitez connues demeurent en termes généraux; & l'on y trouveroit encore une difficulté si ces quantitez étant conçues en termes particuliers les racines étoient incommensurables du 3^e degré, comme on le verra si l'on prend $a=7n, b=12n, c=8n$. Car l'approximation des racines de Δ ne découvreroit point l'écueil qui est en Z ; il faut pour le connoître par cette voie, que ces racines aient toute leur valeur, & n'aient rien de superflu.

Mais si l'on a, par exemple, $a=6n, b=11n, c=6n$; alors les racines de Δ se trouveront commensurables: ces racines seront $x=n, x=2n, x=3n$, & chacune étant substituée dans Z , on verra dans toutes ces substitutions que l'inconnue y ne reçoit aucune détermination, & qu'en faisant le dégagement de y dans S par une division supposée, la Méthode ne donne pas la solution du Problème déterminé P, Q ; & le transforme en un Problème Z, Δ , qui est véritablement indéterminé.

Ainsi, soit que l'on ait dégagé y de S , ou effectivement ou par supposition, la Méthode conduit dans l'un ou dans l'autre des deux écueils que j'ai marquez ici. Dans le premier, elle exclut toutes les solutions du Problème: dans le second, elle introduit une infinité de solutions étrangères sans y faire distinguer celles qu'il faut trouver.

On tomberoit dans de pareils inconveniens, si l'on faisoit évanouïr x . Les inconveniens seroient encore de même, si les premiers dégagemens pour l'une & pour l'autre inconnuë se faisoient dans la seconde égalité; & à cela se joindroient d'autres inconveniens si l'on commençoit par les derniers termes des proposées. Mais en substituant, quand on le peut, les racines de Δ dans l'une des proposées, on trouvera les solutions du Problème.

CINQUIEME EXEMPLE.

Ce Problème est absolument impossible. Cependant il paroît possible & même capable d'une infinité de solutions, par la Méthode en question.

Les deux Egalitez sont A & B .

$$A \dots yy - xy + xx = 9$$

$$B \dots yy - ry + rr = 9.$$

Dégageant yy dans l'une des deux à volonté, & substituant dans l'autre on aura C .

$$C \dots xy - ry = xx - rr.$$

Sur quoy on peut faire ces remarques.

1°. Si l'on dégage y dans C par une division intentionnelle, on aura D .

$$D \dots y = \frac{xx - rr}{x - r}.$$

Et substituant cette valeur de y dans A ou B à volonté, on trouvera la Réduite E .

$$E \dots x^4 - rx^3 - r^3x + r^4 = 9.$$

Dont les deux racines réelles sont égales, & chacune est $x = r$.

2°. Si l'on substitué cette racine en retrogradant D , on verra que l'inconnuë y ne reçoit aucune détermina-

440 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 tion & que la résultante n'a rien de contradictoire. D'où il faudroit conclure, selon la Méthode, que le Problème A, B , est non-seulement possible, mais encore capable d'une infinité de solutions réelles. Cependant à la seule inspection de ce Problème, on s'assure qu'il n'a aucune solution réelle. Ainsi d'un Problème impossible A, B , la Méthode en a fait un Problème possible E, D , ou E, C , qui a une infinité de solutions réelles.

3°. Si de C . on dégage y par une division actuelle, on aura F .
$$F \dots y = x + r.$$

Et si l'on fait la substitution retrograde de la racine $x = r$, dans ce dégagement F , on aura $y = 2r$, d'où il sembleroit que le Problème proposé A, B , seroit possible, & que $x = r$, avec $y = 2r$ en seroient une solution.

Ainsi, les deux substitutions retrogrades produisent deux differens effets, selon les différentes manieres de dégager y , & l'une & l'autre feroient croire que les Egalitez A, B , expriment un Problème réel, quoiqué ces deux égalitez soient imaginaires.

REMARQUE I. Si l'on rejettoit le dégagement D pour prendre le dégagement F qui a été fait par une division actuelle, la réduite n'auroit que des racines imaginaires : ce qui seroit conforme au Problème. Mais l'on a vû dans le second Exemple, qu'en dégageant par une division actuelle, la réduite ne renferme aussi que des racines imaginaires, & que néanmoins le Problème est possible. Ainsi cette espece de division produit des apparences contraires, quand on ne fait que ce que prescrit la Méthode en question.

REMARQUE II. Il semble dans cette Méthode que les Diviseurs actuels n'aient point d'autre usage en comparant deux égalitez pour l'évanouissement d'une inconnue, que d'abreger le calcul. Cette apparence est encore plus forte lorsque la division se fait par un simple effacement d'une autre inconnue. Cependant il se trouve des cas où l'on tomberoit dans un inconvenient considerable, si l'on rejettoit ces diviseurs comme on le fait ordinairement

ordinairement, & si l'on négligeoit d'en regler l'usage. Pour en voir un Exemple, supposons que l'on veuille construire par la voie ordinaire des effections géométriques, l'égalité marquée *G*.

$$G...x^4-4axx-16a^3x-16a^4=1.$$

Et que le premier lieu soit *H*.

$$H...yxx+axx=2aax+6aay+4a^3.$$

Alors dégagant *xx* dans *H* pour faire évanouir x^4 dans *G*, le résultat de la substitution se divisera par *y* & la division donnera *I*.

$$I...yxx+2axx+4axy+2aax-5aay-4a^3=0.$$

Qui se divise encore par $x-a$ & la division donne *K*.

$$K...xy+5ay+2ax+4aa=0.$$

Ainsi, le second lieu seroit l'hyperbole qu'exprime *K*. Mais cet abregement exclut toutes les racines réelles de la proposée. De manière, qu'en comparant le premier lieu *H* avec le second lieu *I* ou *K*, pour faire évanouir *y*; la réduite qui devroit être la même que *G* ou la renfermer, en sera fort différente. Car aucune des racines réelles de *G* ne se trouvera dans cette réduite; & l'on verra que l'exclusion de ses racines ne vient que de la division qui s'est faite en effaçant *y* du résultat de la substitution. Tout au contraire, on verra que la construction donne une racine étrangère que la Méthode a introduite: Que la seconde division n'a point détaché cette racine; quoiqu'elle soit comprise dans son diviseur, & que ce diviseur aiant été rejeté, le second lieu *K* ait demeuré indivisible.

REMARQUE III. Le dessein qu'on a eu dans ce Mémoire, n'est pas de faire voir que les inconveniens de la Méthode en question regardent toutes les Méthodes fondamentales de la Geometrie analytique. J'apporterai seulement ici un Exemple sur les Recherches de *Max.* & *Min.* pour donner occasion de penser au reste.

Si l'on se propose de trouver les *Max.* & *Min.* de *v.* dans l'Egalité *L*.

$$L...z^4-8z^3+18zz-8z+1=v.$$

Les Méthodes que les Geometres ont données pour cette recherche fourniront l'Egalité M .

$$M \dots z^3 - 6zz + 9z - 2 = 1.$$

De maniere que le Problème exprimé par L , M , étant résolu, on aura ce qu'on demande. Et si pour le résoudre par la Méthode en question on fait évanouir z , elle donnera les deux Egalitez N , O .

$$N \dots 3zz - 12z + v + 3 = 0.$$

$$O \dots vz = 2v.$$

Ensorte que pour continuer à faire évanouir z , il faut la dégager dans O , & substituer sa valeur dans N . Si l'on fait ce dégagement par une division actuelle en effaçant v , on aura $z = 2$, & la substitution dans N donnera la Réduite P .

$$P \dots v - 9 = 0.$$

La substitution retrograde de $v = 9$ ne donne que $z = 2$. D'où il faudroit conclure selon la Méthode en question, que le Problème L , M , n'a point d'autre solution que $z = 2$ & $v = 9$. Cependant il y en a encore deux qui se sont échappées en effaçant v dans O pour le dégagement de z .

Ayant trouvé $z = 2$, par le dernier dégagement, & cette valeur étant connue, comme elle l'est icy, l'usage ordinaire est d'en demeurer là, comme si cela donnoit tous les *Max.* & *Min.* Ainsi, ni selon cet usage, ni par cette Méthode, on ne trouveroit pas $z = 2 \pm \sqrt[3]{3}$, qui donnent deux *Minima* de v dans L . Ce qui n'est pas, comme l'on voit, un défaut de celles de *Max.* & *Min.*

REMARQUE IV. Si l'on veut remedier aux inconveniens de la Méthode qui sont indiquez par les précédens Exemples de ce second article.

1°. On se servira de divisions actuelles dans tous les dégagemens autant qu'il sera impossible.

2°. On supposera que chaque diviseur actuel est égal à 0, lorsqu'il renferme quelque inconnue, & cette égalité avec celle qui précède immédiatement l'égalité divisée,

exprimeront un Problème particulier dont toutes les solutions appartiennent au Problème principal ; dans l'hypothèse que ce Problème n'a que deux égalitez.

Ainsi, dans l'Exemple de la Remarque 3, le diviseur v donnera $v=0$, & cette égalité E avec l'égalité N , formeront le Problème particulier que l'on voit icy en 2.

$$2. \dots \begin{cases} 3zz - 12z + v + 3 = 0. \\ v = 0. \end{cases}$$

Dont les deux solutions sont celles que la Méthode avoit exclues du Problème principal L , M .

En formant ainsi un Problème particulier pour chaque diviseur actuel, on aura des solutions incomplètes dans certains cas. Les substitutions retrogrades poussées jusques aux égalitez du Problème principal, donnent aussi des valeurs superflus. Mais ces mêmes substitutions étant réglées suivant la Méthode des indéterminées, font connoître les valeurs qu'on doit retenir, & celles qu'on doit rejeter. Ce qui suffit pour ne rien échaper de nécessaire, en attendant que l'on puisse donner une Théorie nouvelle & de nouvelles règles pour abréger ces recherches & pour s'assurer du succez.

SIXIEME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, la Réduite du Problème n'est ni réelle, ni imaginaire, ni contradictoire. En faisant évanouir une des inconnuës, l'autre dispaçoit en même tems & ne reçoit aucune détermination. Cependant, ce Problème est ou déterminé, ou impossible, selon le plus ou le moins de grandeur des quantitez qui composent les coefficients.

Les deux égalitez du Problème sont A , B .

$$A \dots ay^3 + axxy = bxyy + bx^3.$$

$$B \dots ay^3 + axxy = x^4 + xxyy + ayy + aaxx.$$

Dégageant y^3 dans A & substituant sa valeur dans B , il en résultera C .

$$C \dots xxyy - bxyy + ayy = -x^4 + bx^3 - aaxx.$$

Divisant C par $xx - bx + aa$, ou actuellement ou inten-

444 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
tionnellement à volonté, on aura la valeur de yy , & substituant cette valeur dans A , on verra que tout disparaît & que l'on n'a pour la Réduite que $\theta = \theta$, qui n'est comme l'on voit, ni imaginaire, ni contradictoire; & l'inconnuë x n'ayant reçu aucune détermination, il faudroit conclure selon la Méthode, que cette inconnuë est indéterminée, & que le Problème peut avoir une infinité de solutions réelles. Cela se trouve vray aussi sous de semblables indices en bien d'autres Exemples; mais il y en a encore beaucoup où cela n'est pas, & celui-cy en est un. Car la Méthode étant reformée nous fera voir que le Problème est déterminé, & que dans un cas il n'a que la solution de $y = \theta$.

REMARQUE I. Pour remédier à l'inconvenient de cette Méthode qui est indiqué par ce 6^e Exemple.

1^o. On fera le dernier dégagement par une division actuelle, en observant quand il y a plusieurs diviseurs, de prendre celui qui les renferme tous, & l'on retiendra l'égalité du quotient. Ce qui donne dans cet Exemple l'Egalité D ou E .

$$D \dots yy = -xx. \quad E \dots yy + xx = \theta.$$

2^o. On divisera les deux proposées A , B , par l'égalité du quotient qui est ici l'égalité E , & l'on aura deux autres quotiens. On supposera que chacun de ces quotiens est égal à θ , & l'on aura dans ce même Exemple les deux égalitez F , G .

$$F \dots bx - ay = \theta. \quad G \dots xx + aa - ay = \theta.$$

3^o. On résoudra le Problème qu'expriment les deux égalitez telles que F , G , & toutes les solutions de ce Problème seront des solutions du Problème principal. Il est évident dans notre Exemple que le Problème particulier F , G , ne peut avoir que deux solutions: Que ces solutions sont réelles & différentes lorsque b surpasse $2a$; égales réelles lorsque $b = a$; & imaginaires lorsque $2a$ surpasse b . C'est là tout ce que ce Problème particulier fournit pour le Problème principal A , B .

4^o. On résoudra l'égalité formée du premier quotient

(qui est aussi un commun diviseur des proposées) & toutes les solutions dont elle sera capable, appartiendront encore au Problème principal. Comme l'Egalité *E* n'a point d'autre solution que $y=3$, $x=0$; c'est la seule qu'elle peut fournir pour *A*, *B*.

REMARQUE II. On a pu voir à l'occasion de ce 6^e Exemple, que la Méthode des indéterminées est souvent nécessaire pour distinguer le possible de l'impossible, dans le Problème particulier qui fournissent les deux quotiens du commun diviseur, lorsque les égalitez sont conçûes en termes généraux. On y voit aussi que cette Méthode est nécessaire pour sçavoir si l'égalité de ce diviseur est réelle ou imaginaire, lorsqu'il renferme plusieurs inconnûes, & pour sçavoir encore quand il est véritablement déterminé, de combien de solutions il est capable. On aura un Exemple de ce dernier cas, si l'on se propose de construire le Problème qu'expriment les Egalitez *H*, *I*.

$$\begin{array}{rcl} H \dots 2y^4 - 4ay^3 + 5xxyy - 6axxy + 3x^4 & = & 0. \\ & - 8axy & - 12ax^3 \\ & + 10aayy & + 15aaxx \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I \dots y^4 - 2ay^3 + 2xxyy - 2axxy + x^4 & = & 0. \\ & - 4axy & - 4ax^3 \\ & + 5aayy & + 5aaxx \end{array}$$

En faisant évanouir *y*, on trouvera que le commun diviseur donne l'Egalité *K*.

$$K \dots xx + yy + 5aa = 4ax = 2ay.$$

On verra qu'en divisant *H* & *I* par *K*, les deux égalitez que donnent les deux quotiens expriment un Problème imaginaire. En sorte que le Problème proposé ne peut avoir d'autres solutions que celles de l'Egalité *K*. Mais par la Méthode des indéterminées, cette égalité *K* n'a que la solution $y=a$, $x=2a$. Ainsi, le Problème proposé *H*, *I*, ne peut avoir que cette seule solution, malgré les apparences d'indétermination que l'on y voit, quand on n'y applique que la Méthode en question.

REMARQUE III. Il y a des Exemples où l'on a occa-

446 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 sion d'appliquer la règle que fournit la 4^e Remarque du
 5^e Exemple, avant que de trouver le commun diviseur,
 & cette règle conduit à celle de la premiere Remarque
 du 6^e Exemple. Voici comment,

Les deux Egalitez soient L, M .

$$L \dots axxy - a^3y = nx^3 - aanx.$$

$$M \dots xxyy + aacx = ayy + cx^3.$$

Divisant la premiere par $xx - aa$, on aura $ay = nx$. Et
 de là N .

$$N \dots y = \frac{nx}{a}.$$

Substituant dans M , on aura la Réduite O .

$$O \dots nnx^4 - aacx^3 - aannxx + a^4cx = 0.$$

dont les racines sont $x = 0, x = a, x = -a$, & $x = \frac{aac}{nn}$

Ces racines substituées dans N donnent les 4 solutions:

$$x = 0; y = 0; x = a, y = n; x = -a, y = -n; x = \frac{aac}{nn}, y = \frac{ac}{n}.$$

C'est-là tout ce que donne la Méthode en question.

Mais selon la Règle de la 4^e Remarque du 5^e Exem-
 ple, il faut supposer que le diviseur actuel $xx - aa$, est
 égal à 0, & prendre l'égalité M où se devoit faire la
 substitution, pour résoudre le Problème que ces deux
 égalitez expriment. Ainsi, il faut résoudre le Problème
 P, M .

$$P \dots xx - aa = 0.$$

$$M \dots xxyy - ayy + aacx - cx^3 = 0.$$

Si y se trouvoit dans P , on en poursuivroit l'évanouïf-
 sement. Mais cette égalité ne renfermant pas cette in-
 connuë, elle est la Réduite du Problème P, M . Ainsi,
 suivant la Méthode, il faut substituer les Racines de P
 dans M . Si l'on y substitue $x = a$, ou $x = -a$, on trou-
 vera 0 = 0. Ce qui marque que les deux égalitez P, M ,
 ont un commun diviseur, & que ces deux racines y sont
 comprises. Ou, plus généralement, que ces égalitez ont
 un diviseur commun qui renferme l'inconnuë x . Ainsi,
 comparant ces deux Egalitez pour faire évanouïr x , on
 auroit ce commun diviseur, suivant la Règle de la pre-

mière Remarque du 6^e Exemple. Il se trouve ici que ce diviseur est le même que P , & par la même règle toutes les solutions qui lui conviennent, conviennent aussi au Problème principal L, M . Or $x=a$ & $x=-a$ résolvent P . Donc ces deux valeurs résoudreont L, M ; & comme y ne reçoit aucune détermination dans P , il n'en recevra aucune dans L, M . De manière qu'en prenant $x=a$, ou $x=-a$, à volonté, & pour y une grandeur arbitraire; on aura la solution du Problème proposé L, M . Ainsi $x=a$ & $y=m$, en font une solution: $x=-a$, $y=r$, une autre solution, &c.

Il faudroit encore suivant les Règles prendre le Problème qui se forme en divisant P, M , par P , mais un des quotiens donne $1=0$. Ce qui rend ce Problème inutile, & indique un abrégement de ces Règles. On peut voir aussi que $xx-aa$ étant un diviseur de P, M ; il doit l'être du Problème principal L, M . Ce qui fournit une autre manière de résoudre ce Problème & ses semblables.

REMARQUE IV. En transformant les Problèmes de Géometrie en Problèmes d'Algebre, il arrive en certains cas, que le Problème algébrique est indéterminé, quoique le Problème proposé soit déterminé. Par exemple, si l'on se propose la recherche des *Max.* ou *Min.* de x dans l'Egalité A .

$$\left. \begin{aligned} A \dots & cy^6 - 2acxy^4 + aacxxyy - aaxs + 2abcy^4 \\ & - 2aabcxyy + 2aabx^4 - x^3y^4 + aabbccy \\ & - aabbx^3 + 2ax^4yy - 2abx^3yy \end{aligned} \right\} = 3.$$

Les Méthodes les plus generales de *Max.* & *Min.* donneront l'Egalité B .

$$\left. \begin{aligned} B \dots & 6y^5 - 8acxy^3 + 2aacxxy + 8abcy^3 - 4aabcxy \\ & - 4x^3y^3 + 2aabbccy + 4ax^4y - 4abx^3y \end{aligned} \right\} = 0.$$

Selon ces Méthodes la résolution du Problème A, D , doit donner tous les *Max.* & *Min.* de x dans A . Mais on n'y fait pas mention des cas où de tels Problèmes se trouvent indéterminez, & c'en est ici un Exemple. Car en faisant évanouir x ou y à volonté, on trouvera $0=0$, & un commun diviseur qui donne l'Egalité C .

$$C \dots yy - ax + ab = \theta$$

de maniere qu'en prenant y à volonté, on aura toujours une valeur de x , & que ces deux valeurs seront toujours une solution du Problème A, B .

Les deux quotiens que donne ce diviseur fournissent le Problème particulier D, E .

$$D \dots cy^4 - acxyy + ax^4 + abcy - abx^3 - x^3yy = \theta.$$

$$E \dots 6cy^3 + 2abcy - 2acxy - 4x^3y = \theta.$$

Par mi les Solutions de ce Problème on trouve que $y = \theta$ donne $x = b$ & $x = 1$, qui sont deux *Min.* de x dans l'Egalité A . Comme cette inconnue n'a point d'autres *Min.* ni aucun *Max.* dans cette égalité, on peut dire que le Problème particulier fournit tout ce que l'on demandoit du Problème principal, & c'est là un moyen pour résoudre la difficulté en pareils cas.

De plus, en appliquant la Méthode de *Max.* & *Min.* au commun diviseur, tous les *Maxima* & *Minima* que l'on y trouvera, appartiennent à la proposée A . Ainsi, dans notre Exemple, cette Méthode appliquée à C donne $2y = \theta$; & substituant θ au lieu de y dans la même C , on aura $x = b$ qui est un *Minima* de x pour A . Et comme $y = \theta$ avec $x = b$ font une Solution du Problème D, E , on peut s'en servir pour trouver fort vite les autres Solutions de ce Problème: de maniere que le principal A, B , se trouvant indéterminé, on peut toujours tirer avantage de l'indétermination pour abréger le calcul.

La raison de cette Indétermination est, que la Méthode de *Max.* & *Min.* est fondée sur les racines égales & qu'il y en a une infinité, tantôt réelles & tantôt imaginaires, dans cette espee de Problèmes. Aussi l'on verroit en construisant les Courbes qu'expriment A, B , que toutes les appliquées de celle que fournit leur commun diviseur C , sont tirées des racines communes à ces deux égalitez, & que c'est en cela que consiste l'indétermination.

On peut voir aussi la raison du choix des véritables Solutions, en appliquant la Méthode de *Max.* & *Min.* à chacun

chacun des diviseurs primitifs de A ; il est facile sur le détail qu'on vient de voir, de former une Règle qui abrège la recherche de ces diviseurs.

Il y a d'autres difficultez sur cette Methode, lorsque les Exposans de la Proposée sont conçus en termes généraux. Par exemple la Proposée étant F ,

$$F \dots a^r x^n - y^e x^m - b^l = 0.$$

Et voulant trouver les *Max.* ou *Min.* de y , on aura l'Egalité G ,

$$G \dots na^r x^{n-1} - my^e x^{m-1} = 0.$$

Comparant ces deux Egalitez pour faire évanouïr y , la

seconde donnera $y^e = \frac{na^r x^{n-1}}{mx^{m-1}}$. Substituant cette valeur

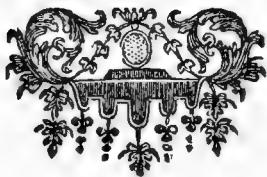
dans la premiere (en abregeant la fraction qu'on voit naître dans le résultat) on trouvera la réduite H ,

$$H \dots ma^r x^n - na^r x^n - mb^l = 0.$$

Cela posé, si l'on fait $a=1$. $e=1$. $l=1$. $r=1$. $2m=1$. $n=1$. on verra qu'il faut avoir égard aux différentes valeurs dont les exposans sont capables, quand on se sert de la Méthode de *Max.* & *Min.* Je ne propose ce petit Exemple que pour donner lieu de penser aux difficultez dont il est un indice. La 4^e Remarque du 5^e Exemple & la 1^{re} du 6^e Exemple demandent encore de nouvelles Regles, lorsque les Exposans & les Coëfficiens sont exprimez en termes généraux, pour marquer les chûtes de l'Inconnuë, où il arrive que la détermination de ces Exposans & de ces Coëfficiens donhent des Réduites ou Formules particulieres qui désignent des exceptions de la Réduite générale: ce qui est souvent nécessaire quand on applique l'Algebre à la Geometrie.

REMARQUE V. Il y a une Méthode pour faire évanouïr les Inconnuës, qui paroît différente de celle que nous avons examinée ici & qui est en usage dans la combinaison des lieux. Il ne paroît dans cette Méthode ni dégagement ni substitution. On y multiplie les deux Egalitez que l'on compare, de maniere que le premier terme de l'Inconnuë qu'on veut faire évanouïr, soit le

450 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
même dans les deux Egalitez qui résultent de ces multi-
plications, afin que ce terme s'évanouisse en prenant leur
différence. Quand on y divise les Proposées ou les Ré-
sultantes, cela ne se fait ordinairement que pour abre-
ger le calcul, & alors on rejette les Diviseurs. Il se trouve
aussi que les inconveniens sont les mêmes que ceux que
nous avons marquez icy dans la Méthode en question,
quand on ne fait aucune division dans l'une ni dans l'au-
tre, & quand on fait dans chacune des divisions équiva-
lentes : en sorte qu'il est aisé d'appliquer les Remarques
de ce Memoire à la Methode où les dégagemens & les
substitutions se couvrent, pour en reconnoître les incon-
veniens & pour les éviter ; dans l'hypothèse que les Pro-
blèmes proposez n'ont que deux égalitez & deux incon-
nuës, & que ces égalitez dans leur premier état, ne sont
affectées ni de fractions, ni de signes radicaux, selon ce
que j'en ai dit au commencement de ce Memoire.





MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ
 Royale des Sciences établie à Montpellier,
 ont envoyé à l'Académie l'Ouvrage qui
 suit, pour entretenir l'union intime qui doit
 être entr'elles, comme ne faisant qu'un seul
 Corps, aux termes des Statuts accordez
 par le Roi au mois de Février 1706.

OBSERVATIONS

*Sur l'Evaporation qui arrive aux Liquides pendant
 le grand froid : Avec des Remarques sur quel-
 ques effets de la Gelée.*

PAR M. GAUTERON.

ON est accoutumé à regarder l'Evaporation des Li-
 quides comme un effet de la chaleur ou du mouve-
 ment de l'air qui les environne ; mais il paroît surprenant
 qu'une cause toute opposée produise à peu près le même
 effet, & que les liquides perdent beaucoup plus de leurs
 parties pendant la plus forte gelée, que pendant que l'air
 est dans un état moyen entre le grand froid & le grand
 chaud, c'est-à-dire, quand il est dans l'état qu'on appelle
 temperé.

C'est pourtant ce que j'ai remarqué dans le temps de
 la gaande gelée de cet hiver. J'ai observé, que plus le
 froid a été grand, plus l'évaporation des liqueurs a été
 considérable ; & que la glace même qui étoit formée de-
 puis quelques jours, diminuoit considérablement, & au-

452 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
tant à proportion , que les liqueurs qui résistoient à la
gelée.

Ce fut le 12^e Decembre 1708. , que la gelée commença
à Montpellier ; le vent étoit au Nord $\frac{1}{4}$ de Nord - Est ,
{ c'est ordinairement le vent de Nord , ou le vent de Nord
un peu déclinant vers l'Est ou vers l'Oüest qui regne dans
ce pais-cy pendant la gelée). Ce fut donc le 12. Decem-
bre 1708 ; * le Thermometre ordinaire étant au 10^e degré
de sa graduation , & celui de M. Amontons au 53^e degré
quelques lignes , que j'exposai à la gelée à 6 heures du
soir une once d'eau commune , que j'avois mise dans un
gobelet de porcelaine. Elle fut totalement gelée dans la
nuit ; le lendemain à 8 heures du matin , je pesai le culot
de glace , & je trouvai que l'eau en se gelant avoit dimi-
nué de 24 grains. Cette diminution étoit très-réelle, puis-
que la glace étant fonduë , l'eau se trouva encore dimi-
nuée de 12 grains , quelque précaution que je pusse pren-
dre pour éviter cette seconde évaporation qui me paroîs-
soit presque inévitable.

La même expérience répétée quelques jours de suite ,
me donna à peu près la même chose , avec cette differen-
ce pourtant , que l'évaporation étoit beaucoup plus gran-
de quand la nuit étoit orageuse , ou que le vent de bise
souffloit un peu fort.

Le dégel qui arriva pour lors ne me permit pas de pouf-
fer plus loin mes expériences ; mais la gelée qui revint
brusquement la nuit du 6 au 7 de Janvier me donna lieu
de faire celles que je vais rapporter.

J'exposai au grand froid la nuit du 7 au 8, de l'eau com-
mune , de l'eau de vie , d'huile d'olive , d'huile de noix .
d'huile de therebentine , & du mercure , une once de cha-
cune de ces liqueurs ; le Thermometre ordinaire étoit au
2^e degré de sa graduation , & celui de M. Amontons à 51
degré 6 lignes ; l'eau fut bien-tôt gelée , & diminua dans
une heure de 6 grains , l'huile de noix diminua de 8 , l'eau

* L'un & l'autre Thermometre ont toujours été dans un cabinet exposé au
Nord , & les vitres du cabinet ont toujours été fermées.

de vie, & l'huile de therebentine, de 12 chacune dans le même temps d'une heure ; & l'huile d'olive & le mercure me parurent avoir plutôt augmenté que diminué de leur poids. Le lendemain matin la diminution de l'eau gelée fut de 36 grains, celle de l'huile de noix qui ne gela point, de 40, celle de l'eau de vie & de l'huile de therebentine, qui résisterent aussi à la gelée, de 54 chacune. Le mercure & l'huile d'olive restèrent à peu près au même état.

Il est inutile de marquer jour par jour l'évaporation que le grand froid a produite, puisque toutes choses étant d'ailleurs égales, l'évaporation a été à peu près la même ; le grand froid & les vents en ont toujours produit une plus grande, que le moindre froid & le tems calme.

Il est nécessaire de remarquer que la glace la plus ferme n'est pas exempte d'évaporation dans le grand froid, comme je l'ai déjà dit. Elle a diminué de 36 grains depuis huit heures du matin jusqu'à une heure après midy, & de 36 grains encore depuis une heure après midy jusqu'à 8 heures du soir. L'évaporation de la nuit a été à peu près de la même quantité, c'est-à-dire, que la glace a souffert environ 100 grains de diminution dans 24 heures, quoiqu'elle puisse passer dans un corps assez solide ; & cela dans un temps qui semble plus propre à la ressermer qu'à enlever les moindres de ses parties. Toutes ces épreuves ont été faites sur une once de liqueur, poids de marc, & dans des gobelets qui avoient deux pouces de diamètre.

Je remarquerai pourtant que la nuit du 10 au 11 de Janvier a été la plus froide qu'on ait jamais sentie dans ce pays-cy : la liqueur du Thermometre ordinaire plongea tout-à-fait dans la boule ; celui de M. Amontons étoit au 51 degré 1 ligne, qui est presque le grand froid du 8^e climat : dans les maisons les mieux étoffées on sentoit un froid très-cuisant dont on avoit peine à se garantir ; & peu de personnes pûrent dormir d'un bon somme, malgré toutes les précautions qu'elles avoient pû prendre pour se mettre à couvert du grand froid.

L'évaporation des Liquides pendant cette nuit fut fort confiderable ; l'eau commune diminua de 48 grains, l'huile de noix de 54, & l'huile de therebentine & l'eau de vie de 72.

Voilà en abrégé ce que j'ai observé fur l'évaporation des Liquides pendant le grand froid ; & voici ce que j'ai remarqué fur la Gelée.

1°. Que la superficie de l'eau qui se gele paroît toute ridée, & que ces rides forment tantôt des lignes parallèles, & tantôt des raïons qui paroissent aller du centre à la circonference; & quand on la fait geler dans un vaisseau de verre cilindrique, j'ai observé qu'il se forme tout autour du cylindre, des tuiiaux fistuleux disposez de bas en haut, & qui paroissent aller de la circonference au centre.

2°. Que l'eau couverte d'huile par dessus & par les côtes, a gelé environ demie heure plus tard que l'eau exposée à l'air sans précaution, & en se gelant elle a formé un champignon de glace relevé d'un ponce au dessus de la superficie de l'huile.

3°. Que l'huile de noix a garanti l'eau d'une gelée médiocre, ce que l'huile d'olive n'avoit pas pû faire.

4°. Que l'eau chaude & prête à bouillir, a gelé plus tard d'environ demie heure que l'eau naturelle.

5°. Que l'eau de vie, l'huile de noix, & l'huile de therebentine n'ont point gelé du tout

6°. Que pendant la gelée, quoique le ciel fut fort serain, le soleil paroissoit un peu pâle.

7°. Que les Orangers & les Oliviers ont perdu leurs feuilles & leurs branches : que la plus grande partie de ces arbres sont morts jusqu'à la racine ; & ce que l'on n'avoit jamais vû dans ce Pais-cy, les Lauriers, les Figuiers, les Grenadiers, les Jasmins, les Yeuses, & quelques Chênes même, ont eu le même sort. Le Rhône a été gelé jusqu'à la hauteur de 12 pieds par les couches de glace qui s'y sont amassées ; & l'Etang de Thau, ordinairement fort orageux & qui communique à la Mer par

un court & large canal , s'est pris de bout-à-bout, & plusieurs personnes sont allées des Bains de Balaruc & du lieu des Boufigues jusqu'à Sette par-dessus la glace ; route inconnue à nos peres , & qui le sera peut-être long-temps à nos neveux.

8°. Enfin , que le dégel du 23 Janvier comme celui du 26 de Fevrier ont été suivis d'un Rhume Epidemique dont presque personne n'a été exempt.

Tous ces faits doivent-êtré déduits de la même cause , c'est-à-dire du changement qui arrive à l'air pendant la gelée. Voici suivant moi quel est ce changement.

Dans l'hiver le Soleil ne jette que des raïons obliques sur la Terre , & cette obliquité de raïons par raport à la partie de la Terre qui a l'hiver , fait qu'ils y occupent une plus grande étendue , & qu'ils se reflexissent moins sur eux-mêmes. Il suit de-là , que la superficie de la Terre qui a l'hiver , doit-êtré moins échauffée , & que la matiere étherée qui a le plus de force , doit se mouvoir du côté où le Soleil est le plus perpendiculaire à la Terre. Il ne doit donc rester à la partie de la Terre qui a l'hiver , que la matiere étherée la moins propre au mouvement.

Or tout le monde convient , que la matiere étherée est la cause du mouvement des liquides , & que l'air même ne peut recevoir son mouvement d'ailleurs. Donc tous les liquides doivent rester dans un état d'engourdissement ou d'épaississement , dès que cette matiere perd une partie de sa force. L'air par conséquent doit êtré plus condense en hiver que dans aucune autre saison de l'année.

Mais on est convaincu par plusieurs expériences , que l'air contient un sel que l'on croit êtré d'une nature approchant de celle du nitre. Cela étant , & l'épaississement de l'air supposé , je dis que les molecules de ce nitre doivent se rapprocher & grossir par la condensation de l'air , comme au contraire l'augmentation de mouvement de ce fluide doit les diviser. Si la même chose arrive à toutes

les liqueurs qui ont dissous quelque sel , si la chaleur du liquide tient ce sel exactement divisé , & si la fraîcheur d'un lieu souterrain , ou de la glace donne lieu aux molécules du sel dissous de se rapprocher , de grossir & de se cristalliser ; pourquoi l'air capable de rarefaction & de condensation , seroit-il exempt de cette loy generale ? Pour être plus subtil , en est-il moins de la nature des autres fluides ?

Si le nitre de l'air est plus grossier pendant le grand froid , comme on n'en sçauroit disconvenir , il doit avoir véritablement moins de vitesse ; mais le produit de sa masse augmentée , par la vitesse qui lui reste , lui doit donner pourtant une plus grande quantité de mouvement.

Il n'en faut pas davantage pour faire agir ce sel avec plus de forces contre les parties des fluides , & je crois que c'est-là la véritable cause de la grande évaporation qu'ils souffrent pendant le grand froid.

Cependant ce nitre aérien ne doit pas empêcher les liquides de se changer en glace ; il doit au contraire en hâter médiatement la concretion. Car ce n'est pas l'air & le nitre qu'il contient , qui donne le mouvement aux liquides , c'est la matiere étherée. C'est donc de la moindre force de celle-cy que dépend la perte ou la diminution de mouvement des autres. Or la matiere étherée déjà foible pendant l'hyver , doit encore perdre beaucoup de sa force en agissant contre l'air condensé , & chargé de plus grosses molécules de sel , la matiere étherée doit donc s'affoiblir encore pendant le grand froid , & être moins en état d'entretenir le mouvement des liquides. En un mot , on peut regarder l'air pendant la gelée ; comme la glace chargée de sel dont on se sert pour faire glacer certaines liqueurs pendant l'été. Ces liqueurs gèlent vraisemblablement par la diminution de mouvement de la matiere étherée qui agit contre la glace & le sel mêlez ensemble , & l'air tout brûlant qu'il est dans ce temps-là , ne peut point empêcher cette concretion.

On dira peut-être que les Liquides contiennent beaucoup

coup de parties d'air, lesquelles sont dans un état de compression dix fois plus fort dans les liquides, que dans l'air libre, suivant les Observations de M. de Mariotte de l'Académie Royale des Sciences ; que les ressorts de l'air ainsi comprimez se débloquent pendant la gelée par la diminution & mouvement du liquide ; & que c'est à l'explosion de ces ressorts, d'autant plus forte qu'ils sont plus comprimez, qu'on doit rapporter l'évaporation des parties des liquides pendant la gelée.

Je ne disconviens pas que les liquides contiennent beaucoup d'air, que cet air est plus comprimé dans les liquides que dans l'air libre ; que la gelée donne occasion à ses ressorts de se débloquent, ni que ses ressorts se débloquent avec plus de force à cause de l'état de compression dans lequel ils sont ; puisque je crois que ce *débloquent* des ressorts de l'air produit la rarefaction & la légèreté de la glace, aussi-bien que les bulles & les fistules dont j'ai parlé dans mes Remarques. Mais j'ai peine à me persuader, que l'action de ces ressorts soit la cause de l'évaporation, quand je considère que les liquides qui gèlent & ceux qui résistent à la gelée, souffrent une évaporation proportionnée à la ténuité de leurs parties, & que la glace formée depuis quelques jours diminuée autant ou plus que l'eau qui commence à se geler. Dans les liquides qui ne gèlent point, le *débloquent* des ressorts de l'air ne doit pas être fort considérable ; & dans la glace formée depuis quelques jours, ces ressorts doivent avoir fait tout leur jeu, & n'être plus capable d'aucune action.

J'ai remarqué que quand la glace commence à se former, il paroît à sa superficie des rides, disposées quelquefois en lignes parallèles, & quelquefois en manières de rayons : on voit au-dessous de cette superficie un grand nombre de petites parties gelées en forme d'aiguilles attachées par la pointe, & qui forment des espèces d'entonnoirs, dont le bout le plus délié est tourné vers la superficie de l'eau. On remarque très-distinctement ces petits entonnoirs dans une bouteille cylindrique, lorsque

le liquide qu'elle contient est entierement gelé.

Je dis que cette disposition de la glace qui commence à se former , favorise la sortie de l'air qui est contenu dans l'eau & dont les ressorts commencent à se débander , & semble défendre en même tems l'entrée à l'air extérieur qui pourroit aller prendre la place de celui qui sort du liquide. L'air qui reste dans l'eau qui se gele doit donc se dilater plus librement , n'étant plus comprimé par l'air extérieur ; c'est de là vrai-semblablement que vient la rarefaction & la legereté de la glace , mais non pas l'évaporation de ses parties.

Je serois trop long si j'allois expliquer en détail tout ce que j'ai observé sur la gelée, outre qu'il est très-aisé de le déduire des principes que j'ai déjà posez. On voit bien par exemple , que l'huile d'olive a ses parties plus branchuës que l'huile de noix, que c'est à cause des branches qui en tiennent exactement les parties , que le nitre aérien ne sçauroit les enlever. Que l'huile de noix a ses parties plus grosses , mais moins branchuës que celles de l'huile d'olive ; que c'est pour cela que l'huile de noix est plus pesante & qu'elle sèche plus vite. D'ailleurs l'huile de noix doit avoir ses parties lisses , polies & qui ne se touchent que par peu de points de leur superficie ; ce qui fait que la matiere étherée , toute foible qu'elle est , peut les mouvoir aisément & empêcher cette huile de se geler ; mais ces parties ne sont pas assez fortes pour résister à l'impulsion du nitre aérien qui les enleve. On voit aussi que la ténuité des parties de l'eau de vie & de l'huile de rhébéntine , favorise leur fluidité & leur évaporation ; & pour les parties globuleuses & pesantes du mercure , il est clair qu'il faudroit un agent plus fort que le nitre de l'air pour pouvoir les séparer de leur masse.

Puisque la matiere étherée entretient toujours la fluidité de l'huile de noix , ce n'est pas merveille si l'eau qui en est couverte , résiste à la gelée. L'huile de noix est pour lors comme une espece de filtre qui donne entrée à une grande quantité de cette matiere , laquelle suffit à

entretenir la fluidité de l'eau. Si l'huile d'olive défend l'eau de la gelée pendant un peu de temps, c'est aussi à cause que cette huile, qui ne fait que s'épaissir par le froid, contient dans ses branches un peu de cette matière éthérée, ce qui fait que l'eau couverte d'huile d'olive résiste un peu plus au froid que si elle étoit privée de ce petit secours. Si l'eau chaude a gelé demi-heure plus tard, c'est qu'il a fallu plus long-temps pour y faire perdre le mouvement que le feu y avoit imprimé. Et si pendant la gelée le Soleil paroît plus pâle, qui ne voit que l'épaississement de l'air, & la grossièreté du nitre qu'il contient, doivent faire réfléchir beaucoup de rayons, & les empêcher de pénétrer jusqu'à nous ? Enfin s'il paroît une espèce de gangrene aux parties des arbres & des plantes qui ont été gelées, cette pourriture ne doit-elle pas être l'effet d'un sel corrosif qui en a corrompu la tissure ? Il y a tant de rapport entre cette gangrene qui arrive aux plantes par la gelée & celle qui arrive aux parties des animaux, qu'elles doivent avoir une cause fort analogue, les humeurs corrosives brûlent les parties des animaux, le nitre aérien plus grossier qu'à l'ordinaire fait le même effet sur les parties des Plantes, *Penetrabile frigus adurit.*

Je finirai ce Memoire en faisant quelques réflexions sur les Rhumes Epidémiques qui suivirent le dégel du 23 Janvier & du 26 Fevrier de cette année. Tant de personnes en furent saisies tout à la fois, qu'on ne peut rapporter cette maladie qu'à une cause générale qui ait agi en même tems sur tous les hommes. Nous trouverons cette cause dans l'air que l'on respira après le dégel : son nitre avoit été déjà divisé, & avoit repris à peu près sa forme naturelle. Je m'explique : l'air qui est porté dans les poumons par la trachée artère, remplit les vessicules dont ce viscère est composé ; le sang ne tombe jamais dans ces vessicules que par une disposition contre nature ; cependant le sang de la veine du Poumon plus animé & plus vermeil que celui de l'artère, marque qu'il a reçu un changement considérable par l'air de la respiration ; mais

l'air n'agit pas sur le sang immédiatement, il faut donc que le tissu des vessicules pulmonaires soit une espece de filtre qui sépare la partie nitreuse de l'air, & que ce soit cette partie nitreuse qui anime le sang de la veine pulmonaire.

S'il arrive donc que le nitre de l'air soit plus grossier qu'à l'ordinaire, comme nous avons prouvé qu'il le doit être pendant le grand froid, je dis que pour lors il n'aura plus la même proportion avec le filtre qui devoit le séparer; qu'il ne s'en mêlera qu'une petite quantité avec le sang; & cela joint avec le froid extérieur fera que ce fluide restera dans une espece d'engourdissement. Dans cet état, & les voyes de la transpiration n'étant pas libres, le sang doit retenir beaucoup de parties sereuses & lymphatiques qui demeureront envelopées dans ses parties sulphureuses, & dont il ne pourra se débarrasser que par une fonte generale. Cette fonte d'humeurs doit arriver par le dégel. Dans ce tems-là le nitre se divise en petites molecules, une grande quantité de ce sel se mêle brusquement avec le sang, l'anime & le fermente; il n'en faut pas davantage pour faire séparer tout à coup une grande quantité de limphe & de sérosité qui se jette sur toutes les glandes du corps & produit le mal de tête, le dégoût, l'*enchifrenure*, la toux, la crudité & l'abondance des urines, la lassitude qu'on appelle spontanée, & quelquefois un peu de fièvre.

Le Rhume que je viens de décrire est fort différent de celui qui arrive pendant le grand froid; dans celui-cy les humeurs circulent avec peine, & par leur épaisissement donnent occasion à quelques parties sereuses de s'en séparer, ce qui produit la roupie & la toux, qui sont souvent accompagnées d'un larmoyement involontaire, parce que les points lacrymaux se trouvent quelquefois bouchés par l'épaissement de la mucoité qui se sépare dans le nez. Aussi doit-on traiter ces rhumes d'une manière bien différente; les rhumes de froid se guerissent par des remèdes qui peuvent donner de la fluidité aux

humeurs; ceux qui sont enchiffrenez pendant le grand froid, guérissent plus promptement par le parfum de Karabé que par aucun autre remède que je connoisse, sans doute à cause de la quantité de sel & de soufre volatil que cette resine contient. Le vin & l'eau de vie brûlez avec du sucre, le Thé, le café, & le chocolate conviennent par la même raison; & j'ai guéri plusieurs rhumes cet hiver très-violens & très-opiniâtres avec des bouillons de poulet, dans lesquels je faisois bouillir pendant un quart-d'heure, une once de chair de serpent séchée avec une poignée de feuilles de cresson,

Les Rhumes du dégel doivent être traitez d'une manière toute différente. Il faut empêcher la trop grande fonte des humeurs par les émulsions cuites, les crèmes de ris, de gruau, d'orge, par l'eau de son, l'eau rose & le jaune d'œuf avec le sucre candi, par le petit lait & par le lait même. Les Narcotiques & la saignée conviennent aux deux especes de rhume, sur-tout quand les malades sont fatiguez de la toux, & que l'on craint quelqu'inflammation de poitrine.

Voilà quelle est l'idée que j'ai de la gelée & de ses effets. De l'obliquité du Soleil par rapport à la partie de la Terre qui à l'hiver, j'ai conclu que la matiere étherée qui répond à cette partie de la Terre, doit avoir moins de force; de-là, la condensation des fluides, de l'air même, & l'augmentation des molecules du nitre. De cette augmentation l'évaporation des liquides, la mortification des plantes & l'épaississement du sang. Tout cela paroît assez simple & puisé dans la Nature même: cependant je suis très-persuadé qu'il faut faire encore beaucoup d'expériences sur le même sujet pour avoir quelque chose de plus certain. Si le Système est véritable, elles s'y rangeront toutes comme autant de conséquences nécessaires, & pour lors on pourra se flatter qu'on a fort approché de la vérité.

FAUTES A CORRIGER.

Dans 1708.

P Age 114. lig. 19. & 20. au lieu de résistances actuelles
lisez résistances en raison des vitesses actuelles.

Pag. 117. lig. 1. au lieu de qu'en faisant lisez en sorte
qu'en faisant



A P A R I S.

De l'Imprimerie de JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils,
Imprimeur du Roi.

